

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Existencia y unicidad de solución para una ecuación
P-Laplaciano del tipo Kirchhoff con término singular
y dependiente del gradiente**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática**

Autor:

Mg. Luque Rivera, Jesús Virgilio
Código ORCID: 0000-0003-4438-6868

Asesor:

Dr. Morales Marchena, Herón Juan
Código ORCID: 0000-0002-5394-0958
DNI N° 32837715

Línea de Investigación
Ecuaciones diferenciales Parciales

Nuevo Chimbote - PERÚ
2026



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CERTIFICACIÓN DEL ASESOR

Yo, **Dr. Morales Marchena, Herón Juan**, Mediante la presente certifico mi asesoramiento de la tesis doctoral titulada: **Existencia y unicidad de solución para una ecuación P-laplaciano del tipo Kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente**; elaborado por el tesista **Luque Rivera, Jesús Virgilio**, para obtener el grado de **Doctor en Matemática** en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa,

Nuevo Chimbote, setiembre 2026

Dr. Morales Marchena, Juan Herón

Asesor

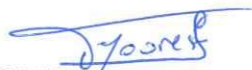
DNI N° 32837715

Código ORCID: 0000-0002-5394-0958

AVAL DEL JURADO EVALUADOR

Tesis doctoral titulada: **Existencia y unicidad de solución para una ecuación P-laplaciano del tipo Kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente;** elaborado por el tesista **Luque Rivera, Jesús Virgilio,**

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:



Dr. Moore Flores, Teodoro
Presidente

DNI N° 32763522

Código ORCID: 0000-0002-1755-3459



Dr. Marquina Alvarado, Carlos Alfonso
Secretario

DNI N° 18111165

Código ORCID 0000-0003-1119-3680



Dr. Morales Marchena, Juan Herón
Vocal/Asesor

DNI N° 32837715

Código ORCID: 0000-0002-5394-0958



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los dieciséis días del mes de diciembre del año 2025, siendo las 11:30 horas, en el aula P-02 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 856-2025-EPG-UNS de fecha 14.10.2025, conformado por los docentes: Dr. Teodoro Moore Flores (Presidente), Dr. Carlos Alfonso Marquina Alvarado (Secretario) y Dr. Herón Juan Morales Marchena (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis intitulada: "EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN PARA UNA ECUACIÓN P-LAPLACIANO DEL TIPO KIRCHHOFF CON TÉRMINO SINGULAR Y DEPENDIENTE DEL GRADIENTE"; presentado por el tesista **Jesús Virgilio Luque Rivera**, egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Que, por ausencia del Dr. Fidel Vera Obeso, asume las funciones de Secretario del jurado evaluador el Dr. Carlos Marquina Alvarado (accesitario)

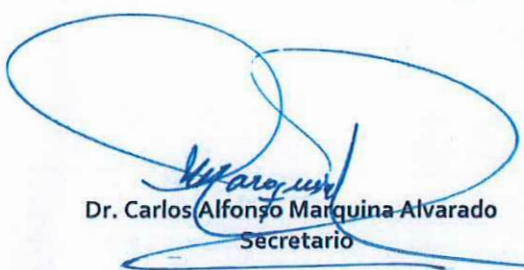
Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 983-2025-EPG-UNS de fecha 11 de diciembre de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones a la tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de DIECINUEVE.

Siendo las 12:40 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Teodoro Moore Flores
Presidente


Dr. Carlos Alfonso Marquina Alvarado
Secretario


Dr. Herón Juan Morales Marchena
Vocal/Asesor

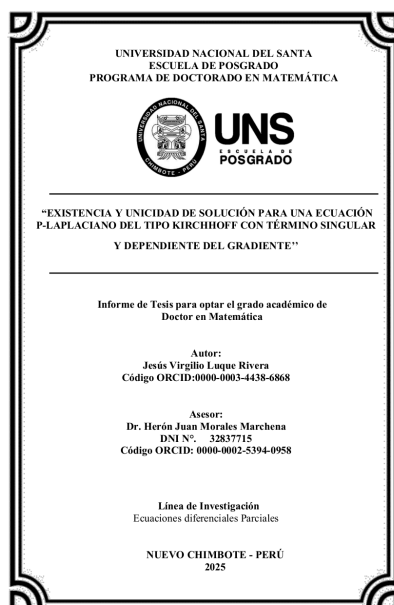


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: JESUS LUQUE RIVERA
Título del ejercicio: REVISION PRELIMINAR
Título de la entrega: TESIS LUQUE RIVERA
Nombre del archivo: INFORME_FINAL_DE_TESIS_MODIFICADO_-1.pdf
Tamaño del archivo: 1.42M
Total páginas: 82
Total de palabras: 15,587
Total de caracteres: 75,133
Fecha de entrega: 07-sept-2026 10:30a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 3026120671



TESIS LUQUE RIVERA

INFORME DE ORIGINALIDAD

20%

INDICE DE SIMILITUD

19%

FUENTES DE INTERNET

4%

PUBLICACIONES

6%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net	Fuente de Internet	9%
2	repositorio.uns.edu.pe	Fuente de Internet	2%
3	repositorio.unsch.edu.pe	Fuente de Internet	2%
4	cybertesis.unmsm.edu.pe	Fuente de Internet	1%
5	repositorio.unac.edu.pe	Fuente de Internet	1%
6	Submitted to Unviersidad de Granada	Trabajo del estudiante	1%
7	arxiv.org	Fuente de Internet	1%
8	www.cartagena99.com	Fuente de Internet	<1%
9	Vigo Ingar, Katia. "Estudio local de la ecuacion de Korteweg-De Vries modificada II.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020	Publicación	<1%
10	Submitted to Universidad Nacional del Santa	Trabajo del estudiante	<1%
11	apjm.apacific.org	Fuente de Internet	<1%
12	idus.us.es	Fuente de Internet	<1%
13	www.mtm.ufsc.br	Fuente de Internet	<1%
14	Submitted to Universidad de Málaga	Trabajo del estudiante	<1%

DEDICATORIA

A mis padres Julián y Victoria, a mis abuelos Elías y María quienes con su inquebrantable apoyo me enseñaron que los sueños se alcanzan con sacrificio, esfuerzo, determinación y fe. Elevo mi gratitud y agradecimiento a ustedes donde quiera se encuentren

AGRADECIMIENTO

Hoy, al finalizar este capítulo tan importante de mi vida, no puedo evitar mirar hacia atrás y sentir una profunda gratitud hacia todas las personas que, de una u otra manera, me acompañaron, me impulsaron y me sostuvieron en este largo y desafiante camino. Este logro no es solo mío; es el reflejo del amor, el sacrificio y el apoyo de quienes nunca dejaron de creer en mí, a ellos quiero expresar mi más profundo agradecimiento.

Agradecer a todos mis maestros de pregrado y posgrado con quienes compartí y aprendí mucho de ellos, de manera especial quiero agradecer al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, por sus enseñanzas y sugerencias, su experiencia y consejos han sido de muchísima importancia para terminar esta tesis. Asimismo, mi agradecimiento y gratitud a mi asesor Dr. Juan Heron Morales Marchena por su dirección y sugerencias, también agradecer todos los docentes de la universidad Nacional del Santa con quienes compartí y recibí sus enseñanzas.

A mi esposa Silvia y mis hijos Jesús, Valeri y Sergio, quienes con su amor y comprensión llenaron de alegría y esperanza este camino. Sus sonrisas, sus palabras y su paciencia me dieron la energía que necesitaba para seguir adelante, incluso cuando parecía imposible. Ustedes son mi mayor inspiración y mi razón para nunca rendirme.

Un homenaje póstumo a mis padres Julián y Victoria y a mi tía Adelaida, elevo mi agradecimiento y gratitud a ustedes donde se encuentren, gracias por todo apoyo, a pesar de las dificultades que hemos pasado junto con mis hermanos Cesar y Dina.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional del Santa, por brindarme el apoyo necesario para desarrollar esta investigación, así como a todos aquellos que, de una u otra manera, contribuyeron a la realización de este proyecto.

INDICE

CAPITULO I

RESUMEN	1
ABSTRACT	2

CAPITULO II

2.- PLAN DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Planteamiento y fundamentación del problema de Investigación	3
2.2 Antecedentes de la Investigación	5
2.3 Formulación del Problema de Investigación	6
2.4 Delimitación del Problema	7
2.5 Justificación e importancia de la investigación.....	7
2.6 Objetivos de la Investigación.....	8
2.61 Objetivo general	8
2.62 Objetivo específico.....	9

CAPITULO III

MARCO TEORICO

3. MARCO CONCEPTUAL.....	10
3.1 Espacio de las Funciones continuas	10
3.2 Espacio de funciones de Prueba	11
3.3 Espacio de Banach, Espacios con Producto Interno y espacios de Hilbert	13
3.4 Isomorfismo E Isometría	15
3.5 Desigualdad de Cauchy- Schwarz, inmersión compacta Base Hilbertiana	16
3.6 Espacios Reflexivos, Espacios Separables, Espacios L_p	18
3.6.1 Espacios Reflexivos.....	18
3.6.2 Espacios Separables.....	19
3.6.3 Espacios L_p	19
3.7 La Integral de Lebesgue.....	22
3.8 Distribuciones	25
3.9 Convergencia en $D(\Omega)$	26
3.10 Derivada de una Distribución	28
3.11 Espacios de Sobolev	29
3.11.1 El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$	31
3.11.2 Inmersiones de los espacios $W^{m,p}(\Omega)$	33

3.12 Partes positiva y negativa de una función	34
3.13 Principio del Máximo	36
3.14 Principio del máximo débil	37
3.15 Teoremas de la Divergencia y Formulas de Green	39
3.16 Teorema (Formula de Green)	39

CAPÍTULO IV

4. METODOLOGIA DE LA

INVESTIGACIÓN.....	41
---------------------------	-----------

4.1 Hipótesis Central de la Investigación.....	41
4.2 Variables E Indicadores de la investigación.....	42
4.2.1 Variable Independiente	42
4.2.2 Variable dependiente	42
4.3 Métodos de la Investigación	42
4.4 Diseño o esquema de la Investigación.....	43
4.5 Población o Muestra	43
4.6 Actividades del Proceso Investigativo	43
4.6.1 Fase Inicial	43
4.6.2 Fase Intermedia	43
4.6.3 Fase Final	44
4.7 Técnicas e Instrumentos de la Investigación	44
4.8 Procedimiento para la recopilación de datos.....	44
4.9 Técnicas de procesamiento y análisis de datos	44

CAPITULO V

5. RESULTADOS Y DISCUCIÓN	45
--	-----------

5.1 “Existencia y unicidad de solución para una ecuación p-laplaciano del tipo kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente”	46
--	----

CONCLUSIONES	73
---------------------------	-----------

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	74
--	-----------

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla el estudio de la existencia de solución de una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local especial $\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$ y una convección (termino que contiene a la gradiente) $f(x,u,\nabla u)$, que está asociado al modelo de Gierer- Meinhardt que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibor. En este trabajo se aplica el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita, con el objetivo de demostrar la existencia de solución débil aplicaremos el teorema del ángulo agudo como una herramienta matemática fundamental. Para abordar este trabajo consideramos $\Omega \subseteq R^n$ un abierto acotado, con frontera suave, M una función continua, f una función convenientemente definida para el objetivo de nuestro trabajo, $1 < p < N$, y $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x,u,\nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Palabras Clave:

Ecuación del tipo p- Kirchhoff, solución débil, método de Galerkin, teorema del punto fijo.

ABSTRACT

In this work we will study the existence of a solution of a P-Kirchhoff type equation with a special non-local $\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$ source term and a convection (term containing the gradient) $f(x, u, \nabla u)$, which is associated with the Gierer-Meinhardt model that studies the associated “Shadow System”, through a large diffusion of the inhibitor. In our work we will apply the Galerkin method, which in quick terms consists of approaching the solution of the problem through finite-dimensional spaces for which we will use the acute angle theorem to find the existence of a weak solution. To approach this work we consider $\Omega \subset R^n$ a bounded open set, with smooth boundary, M a continuous function, f a function conveniently defined for the purpose of our work,

$$1 < p < N, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Keywords:

p-Kirchhoff type equation, weak solution, Galerkin method, fixed point theorem

CAPITULO II

2. PLAN DE LA INVESTIGACION

2.1 Planteamiento y fundamentación del problema de Investigación

Durante la última década, el estudio de los sistemas elípticos no locales del tipo Kirchhoff ha generado un gran interés en el ámbito de la investigación matemática. Este interés se remonta, después de los trabajos de Lions [29], debido a que dichos modelos permiten representar una amplia variedad de fenómenos y situaciones físicas presentes en las Ciencias y la Ingeniería. Asimismo, su naturaleza no local introduce importantes dificultades analíticas, por lo que su tratamiento requiere el empleo de herramientas matemáticas avanzadas. En este contexto, diversos autores han desarrollado investigaciones orientadas al análisis de estos modelos, entre los cuales destacan [2], [9], [11], [12] [14] y [18], con diversas técnicas. El modelo clásico Kirchhoff ha sido generalizada al contexto del operador P - Laplaciano, dando lugar a una clase de problemas no locales de tipo P-Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\right)^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ suave

$$-\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Este tipo de ecuaciones a sido estudiados por [8], [10], [31], y [35].

En diversos campos de la ciencia como la ingeniería, Astronomía, la Glaciología,
la Climatología, la dinámica de fluidos no newtonianos y los procesos asociados a
la extracción de petróleo, el operador del tipo P- Kirchhoff tiene sus aplicaciones.

En nuestro trabajo estudiaremos la siguiente ecuación que involucra el operador Δ_p P- Laplaciano

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Que contiene un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [24], [22] que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibidor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener [25] para analizar el comportamiento cualitativo de reacción- difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” está formado por una ecuación de reacción - difusión acoplada con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión original [34].

Por otro lado, a nuestro conocimiento, los términos no locales fueron inicialmente introducidas en modelos biológicos de dinámica de poblaciones [17]

En estos modelos, la presencia del término no local significa en general que el efecto de la variable depende no solo de su propia posición en el espacio, si no de su valor medio (promedio) en el dominio de definición.

Como es sabido, el término de convección (término que contiene al gradiente) representa el transporte o movimiento de una cantidad (como calor, masa o momento) debido al movimiento masivo de un fluido o material. Este término está abocado al fenómeno de la convección, que consiste en la transferencia de una propiedad por el movimiento del fluido o material en sí.

La presencia de este término hace que el problema (1) sea no variacional, por lo que no es posible aplicar, al menos directamente, las técnicas del cálculo variacional tales como el Teorema del paso de la Montaña, minimización directa vía el teorema de Weierstrass o el Principio de Ekeland, por lo que aplicaremos el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de

espacios de dimensión finita. Así esta no linealidad (que contiene al gradiente) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo, en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos [23] y [33]

2.2 Antecedentes de la Investigación

La ecuación de Kirchhoff

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que apareció en 1883 [10], extiende el modelo para las pequeñas oscilaciones de una cuerda, realizado por D'Alembert, donde se considera el alargamiento de la cuerdas al vibrar.

Mas adelante Lions [28] generalizó este modelo, dando lugar su alcance a una formulación más amplia dentro del marco de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

$$u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f \text{ en } \Omega \times]0, \infty[$$

El siguiente modelo asociado a esta ecuación esta descrita por

$$\begin{cases} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Numerosos autores e investigadores han abordado el estudio de estos modelos, entre los cuales cabe mencionar [2], [9], [11], [12] [14] y [18], con diversas técnicas. La ecuación de Kirchhoff ha sido generalizada en décadas recientes, a una ecuación denominada del tipo P-Kirchhoff

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\partial\Omega$

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas y $\Delta_p u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ este tipo de ecuaciones han sido estudiados por

diversos autores como [8], [10], [31], y [35]. La generalización está relacionada con el hecho de que el operador P- Laplaciano Δ_p aparece en la descripción de fenómenos físicos, en diversas ramas de la ciencia.

Nuestro trabajo aborda un modelo P-Kirchhoff con un término no local especial, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que consideramos nuestro estudio como aporte al avance en el área de las ecuaciones diferenciales parciales.

$$\left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Nuestra ecuación contiene, un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [22] [24], que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibidor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener [25] para analizar el contexto cualitativo de los sistemas de reacción- difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande.

2.3 Formulación del Problema de Investigación

En este problema estudiamos y analizamos una **ecuación elíptica del tipo p-kirchhoff que incluye un término de difusión**, cuya presencia permite considerar los efectos asociados a la propagación o dispersión en la dinámica descrita por el modelo.

$$(1) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

En el presente trabajo $\Omega \subseteq R^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciaran a seguir.

Dentro del contexto de nuestro trabajo, nos formulamos la siguiente cuestión fundamental: ¿existe una única solución débil del problema (1) representada por la función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$?

En este trabajo no implementaremos solución numérica o algún software para encontrar una solución aproximada, pero si una técnica variacional de Galerkin.

2.4 Delimitación del Estudio

Teniendo en cuenta que la ecuación (1) es del tipo P- Kirchhoff ahora restringiremos nuestra formulación variacional (de la solución débil) al espacio $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m] \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Por lo que queremos determinar

$$u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución del sistema aproximado (S.A)}$$

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_i dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{\alpha} w_i dx - \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_i dx, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

La existencia de una solución débil de (1) se encuentra el espacio Banach separable $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^{\alpha} u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

2.5 Justificación e Importancia de la Investigación

Los sistemas elípticos no locales, también llamados ecuaciones de Kirchhoff, son de gran importancia porque modelan diversos fenómenos físicos en Ciencia, Ingeniería y tecnología, por ejemplo, como modelos de difusión de especies o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio: desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones.

En este trabajo consideramos una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local especial y un término que contiene la gradiente.

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \left(\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy\right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x,u,\nabla u)$$

asociado al modelo de Gierer-Meinhardt que estudia el “Sistema de Sombra”. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener para describir el comportamiento cualitativo de los sistemas de reacción-difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” está formado por una ecuación de reacción - difusión acoplado con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión.

En este trabajo abordamos un modelo del tipo P-Kirchhoff con un término no local especial y un término que contiene la gradiente, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que un desarrollo didáctico de este trabajo permitirá entender y explicar la metodología usada en la resolución del problema planteado.

2.6 Objetivo de la investigación

2.6.1 Objetivo General

Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \left(\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy\right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x,u,\nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave
 $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones
que se enunciaran a seguir

2.6.2 Objetivo Específico

1.- Demostrar la existencia de la solución del problema auxiliar problema
(2), aplicando el método de Galerkin

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u^+)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $u^+ = \max \{u(x), 0\}$, y encontraremos la solución no trivial de (2)
utilizando el teorema del ángulo agudo y el teorema de la convergencia
dominada de Lebesgue.

2.- Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema (1)
definimos

$u^- = \max \{-u(x), 0\}$. Luego $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y mostramos que

$$u^- = 0 \text{ c. s en } \Omega.$$

Por tanto $u = u^+ - u^- = u^+ > 0$ c. s en Ω .

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ Será la solución débil de (1)

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

En este capítulo consideramos las notaciones, resultados de proposiciones y teoremas importantes que utilizaremos en la demostración de nuestro resultado principal, para el cual se utilizará el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita. El término que contiene al gradiente en (1) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo, en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos.

En la demostración del problema (1) abordaremos, la integral de Lebesgue, los espacios reflexivos, espacios separables, los espacios L^p , isomorfismo e isometría, espacios de Sobolev, inmersiones continuas y compactas, principio del máximo débil, desigualdad de Tartar, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue teorema de la divergencia y formulas y teorema del ángulo agudo.

3. MARCO CONCEPTUAL

3.1 ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Definición 1. Consideremos a K para referirnos al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ dependiendo en que contexto estamos. Por $\mathbb{N}$ representamos el monoide de los números naturales y por $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros.

Dado: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in K^n$

Se define $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ y $z^\alpha = (z_1^{\alpha_1}, z_2^{\alpha_2}, z_3^{\alpha_3}, \dots, z_n^{\alpha_n})$

Por D^α denotamos al operador de derivación de orden α definido por

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Observación:

- i. Para $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^\alpha u = u$ para toda función u .
- ii. Por D_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
- iii. Si α y $\beta \in \mathbb{N}^n$ escribimos $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cuando u y v son funciones numéricas suficiente derivables, se tiene la regla de Leibniz

$$D(uv) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha^{|\alpha|}}{\beta_i(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

3.2 ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, una función real u definida en Ω es denominada función de prueba en Ω si u es de clase C^∞ en Ω y es nula fuera del compacto de Ω . Con el símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ se representa el espacio de las funciones de prueba en Ω

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ tiene derivadas parciales de cualquier orden y existe un compacto } K_u \subset \Omega \text{ tal que } u(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus K_u \right\}$$

Suporte de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $\text{sup } u$, el cual se define

$$\text{sup } u = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$$

Definición 2. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y consideremos $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos con $C^0(\Omega)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$. Luego se consideran los siguientes subespacios de $C^0(\Omega)$:

$$C^m(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega); D^\alpha \varphi \in C^0(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega); \text{soporte de } \varphi \text{ es compacto en } \Omega\}$$

$$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap \{u / \text{sopp}(u) \text{ es compacto, } \text{sopp}(u) \subseteq \Omega\}$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

Sobre $C^\infty(\Omega)$ se define la norma de convergencia uniforme, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Definición 3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $m \in \mathbb{N}$. se designa con $C^0(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas que son acotadas y uniformemente continuas en Ω .

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}); D^\alpha \varphi \in C^0(\bar{\Omega}), \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega})$$

$$C_0(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}); \text{soporte de } \varphi \text{ es compacto en } \bar{\Omega}\}$$

$$C_0^m(\bar{\Omega}) = C^m(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

Donde: $\bar{\Omega}$ es la clausura de Ω .

Proposición 1. El espacio vectorial $C^m(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach con

$$\text{la norma } \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Proposición 2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$

Demost. Ver [30] página. 10

3.3 ESPACIOS DE BANACH, ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y ESPACIOS DE HILBERT.

Enunciaremos las proposiciones y teoremas importantes de los espacios de Banach, espacios con producto interno y los espacios de Hilbert.

Definición 4. Sea E un espacio normado, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en E y $u \in E$. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $u \in E$ cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$

Proposición 3. Sean $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en el espacio vectorial E y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en el cuerpo K . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow u$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow v$ y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha$, entonces

- (i) $(\alpha_n u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha u + v$
- (ii) $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$
- (iii) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|u_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- (iv) Si E es un espacio con producto interno, entonces
$$\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$$

Definición 5. Una sucesión de vectores $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio normado E es denominado una sucesión de Cauchy de E cuando $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$

Proposición 4. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy

Proposición 5. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy del espacio normado E . Entonces

- (i) Existe $c > 0$ tal que $\|u_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- (ii) Si existe una subsucesión de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para un vector $u \in E$ entonces $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $u \in E$

Definición 6. Sean E y F espacios normados y D un subconjunto no vacío de E la aplicación $A: E \rightarrow F$. Se dice que es continua en $u \in D$ cuando para todo

$\varepsilon > 0$ Existe $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que si $v \in D$ y $\|u - v\| \leq \delta$ entonces $\|Au - Av\| \leq \varepsilon$

Proposición 6. A es continua en $u \in D$ si y solo si para toda sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores en D convergentes para $u \in D$ se tiene que la sucesión $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para Au

Proposición 7. Sean E y F espacios normados, D un subespacio vectorial de E y $A: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes

- (1) A es continua en 0 .
- (2) Existe $c > 0$ tal que $\|Au\| \leq c\|u\|$ para $u \in D$.
- (3) A es uniformemente continua.

Definición 7. Sea X un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. La **distancia asociada a la norma** se define por $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$. Lo cual es una métrica. La topología asociada a la norma es la **topología del espacio métrico inducida por la distancia d** .

La función $f: X \rightarrow Y$ es continua en un punto $a \in X$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Diremos que un espacio normado X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X ; es decir,

$$\forall (x_n) \subset X, \left[\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 \right] \Rightarrow \left[\exists x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right].$$

Todo espacio completo es un espacio de Banach.

Observación:

Dado los espacios vectoriales X e Y sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Una aplicación $T: X \rightarrow Y$ es llamado **operador lineal** si, para cualesquiera $x, z \in X$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\boxed{T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)}.$$

3.4 ISOMORFISMO E ISOMETRÍA

Definición 8. Sean los espacios normados X e Y , un isomorfismo es una aplicación lineal y biyectiva $T: X \rightarrow Y$ tal que T y T^{-1} son continuas.

En este caso diremos que los espacios normados son isomorfos, lo cual denotamos $X \approx Y$

La aplicación lineal $T: X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si solo si existen constantes positivas m y M tal que

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad x \in X$$

Definición 9. Una isometría entre dos espacios normados X e Y es una aplicación lineal $T: X \rightarrow Y$ que es un isomorfismo isométrico sobre su imagen tal que $\|Tx\| = \|x\|$ para $x \in X$

Definición 10. Sean espacios normados X e Y . Diremos el operador lineal

$$T: X \rightarrow Y$$

es **acotado** si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, para todo $x \in X$. El conjunto $L(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales que aplican X en Y . De la misma forma $B(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores de $L(X, Y)$ que son acotados. El espacio $B(X, Y)$ es un espacio normado y la **norma del operador** T se define por:

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

para todo $T \in B(X, Y)$.

Teorema 1. Sean los espacios normados X e Y sobre K . $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado si, solo si, T es continuo.

Definición 11. Dado los espacios normados X e Y . Se dice que X está **inmerso continuamente** en Y , y se denota por $X \hookrightarrow Y$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. X es un **subespacio vectorial** de Y .
2. El operador lineal identidad $I: X \rightarrow Y, I(u) = u$, definido sobre X , es continuo. Es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \forall u \in X$.

Definición 12. Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, un producto escalar o producto interno definido en X es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

- (i) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para cualquier $u, v, w \in X$.
- (ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para $u, v \in X$, y $\alpha \in \mathbb{K}$
- (iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para $u, v \in X$.
- (iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

3.5 DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ.

Dado V un espacio vectorial con producto interno.

Para vectores cualesquiera $u, v \in V$ se cumple:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Definición 13. Sea H un espacio vectorial con producto interno. Se dice que H es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la métrica inducida por el producto interno.

Definición 14. Sean X, Y dos espacios normados, se dice que existe una inmersión compacta de X en Y , el cual es denotado por $X \hookrightarrow Y$ (inmersión compacta) si:

- (a) $X \hookrightarrow Y$
- (b) $I : X \rightarrow Y$ es compacta, es decir $\forall B$ acotado $\subseteq X : \overline{I(B)}$ es compacto en Y .

Observación:

De la parte (b) se infiere que si $x_n \rightarrow x$ en X por tanto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $(x_{n_k}) \rightarrow x$ en Y .

Definición 15. Un espacio de Hilbert H dice que es separable, si existe un subconjunto $D \subset H$ denso y numerable en H .

Definición 16. (Base Hilbertiana). Sea H un espacio de Hilbert H separable, se llama base Hilbertiana (o base ortonormal) de H a toda sucesión $(\psi_n)_{n \geq 1}$ de elementos de H , que constituye sistema completo en H y que verifica:

- (i) $(\psi_n, \psi_m) = 0, \quad \forall m \neq n$

$$\|\psi_n\| = 1$$

(ii) El espacio vectorial generado por $(\psi_n)_{n \geq 1}$ es denso en H .

Teorema 2. Todo espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana.

Teorema 3. (Teorema de representación de RIESZ)

Si f es una funcional lineal continuo definido en un espacio de Hilbert H . Entonces existe un único vector tal que $u \in H$ tal que

(i) $f(u) = \langle v, u \rangle$ para todo $v \in H$

(ii) $\|f\| = \|u\|$

Definición 17. (Formas sesquilineales). Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces una aplicación $h: H \times H \rightarrow K$ se denomina forma sesquilineal si para $x, x_1, x_2 \in H$, $y, y_1, y_2 \in H$ y los escalares α, β se tiene:

(i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

(ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

(iii) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

(iv) $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$

Teorema 4. (Lax - Milgram). Sea H un espacio de Hilbert y $h: H \times H \rightarrow K$ es una forma sesquilineal. Si existen $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que

(i) $c_1 \|u\|^2 \leq \operatorname{Re} h(x, x)$ para todo $x \in H$

(ii) $|h(x, y)| \leq c_2 \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in H$

Entonces existe un isomorfismo $A: H \rightarrow H$ tal que $h(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ para todo $x, y \in H$

3.6. ESPACIOS REFLEXIVOS, ESPACIOS SEPARABLES, ESPACIOS $L^p(\Omega)$

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Se designa por $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Cuando f recorre E' se obtiene una familia $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$.

Definición 20. Sea E un espacio normado y sea E' su espacio dual. La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Proposición 8. Sea (x_n) una sucesión en E . Se verifica:

- (i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle; \quad \forall f \in E']$
- (ii) Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$
- (iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$; entonces $\|x_n\|$ esta acotada y $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$ y si $f_n \rightarrow f$ fuertemente en E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$), entonces $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

3.6.1 Espacios reflexivos

Definición 21. Dado un espacio Banach diremos que es reflexivo si la inyección canónica de X en X^{**} ($x \rightarrow J_x$) es sobreyectiva, es decir, es decir $\text{Im}(J(X)) = X^{**}$

Así J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**} .

Proposición 9. Si X es un espacio normado reflexivo, entonces es un espacio de Banach [31] pág. 241

Proposición 10. Todo espacio normado X de dimensión finita es reflexivo. [31] pág. 241

Teorema 5 (espacio de Hilbert). Todo espacio de Hilbert H es reflexivo [31] pág. 242

3.6.2 Espacios separables

Definición. 22. Se dice que un espacio métrico es separable si existe un subconjunto $D \subset E$ numerable y denso.

Proposición 10. Sea E un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E . Entonces F es separable. [28] pág. 47

Teorema 6. Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable. Entonces E es separable. [28] pág. 47

Teorema 7. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión

acotada en E . Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge en la topología $\sigma(E, E')$. [28] pag. 50

Teorema 8. (Eberlein-Smulian). Sea E un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada (x_n) posee una subsucesión (x_{n_k}) convergente en la topología $\sigma(E, E')$. Entonces E es reflexivo.

[28] pág. 50

3.6.3 Los Espacios L^p

Definición 23. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Y se denota la norma por $\| \cdot \|_{L^p}$ y se define

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Definición: se define

$L^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$ y se denota la norma por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

NOTA 1.- Si $f \in L^\infty$, entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Proposición 11.

(i) $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

(ii) $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \text{Y la norma inducida es}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

[30] pág. 57

Teorema 9. Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, se tiene $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

Proposición 12. (Desigualdad de Hölder). Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$

con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

$$\int_{\Omega} |u, v| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración.- Ver [28] Pág. 56

Proposición 13. (Desigualdad de Hölder Generalizada). Sean $f_1, f_2, \dots, f_k$, funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, con $1 \leq i \leq k$, donde

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces el producto

$$f = f_1 f_2 f_3 \dots f_k \in L^p(\Omega) \text{ y}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|f_3\|_{L^{p_3}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Demostración .- Ver [28] Pág. 57

Teorema 11. (Desigualdad de interpolación). Sea $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ y se tiene

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \cdot \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

Donde

$$0 \leq \theta \leq 1 \text{ y } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

Demostración.- Ver[30] Pág. 4

Teorema 12. Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in L^p(\Omega)$ entonces $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$

Demostración.- Ver [27] Pág. 28

Teorema 13. $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Ver[28] Pág. 62.

Teorema 14(Teorema de la Representación de Riesz). Sean $1 < p < \infty$,

$\varphi \in (L^p(\Omega))'$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así existe una función única

$u \in L^q(\Omega)$ que cumple

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)},$$

Demostración. - Ver[28] Pág. 61

Proposición 14. Para $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ existe una función única

$u \in L^\infty(\Omega)$ que cumple

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver[28] Pág. 63

Proposición 15. Dado una sucesión funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en $L^p(\Omega)$ de tal que manera $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ para $f \in L^p(\Omega)$. Luego existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que:

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ c.s en Ω
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq |h(x)| \quad \forall k \in \mathbb{N}$ con $h \in L^p(\Omega)$

Teorema 16. $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.

[28] pag. 59

Teorema 17. $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

[28] pag. 60

Teorema 18. Sea $\varphi \in (L^1)'$. Entonces existe $u \in L^\infty$ única tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

[28] Brizis 63

Teorema 19. Sea $1 < p < +\infty : L^p(\Omega)$ es reflexivo.

Demostración.- Ver [28] Pág. 59

3.7 La Integral de Lebesgue

Definición 26. Dado una familia M de subconjuntos de un conjunto X diremos que es una σ -álgebra en X si M tiene las siguientes características:

1. $X \in M$.
2. Para $A \in M$, $A^c \in M$.
3. Dado $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, con $A_i \in M, i = 1, 2, 3, \dots$, así $A \in M$

Definición 27. Sea X un conjunto y M es un σ -álgebra en X entonces diremos que (X, M) es un espacio medible y a los elementos de M se llaman conjuntos medibles de X .

Definición 28. Sea M un σ -álgebra sobre X . La función $\mu: M \rightarrow [0, +\infty)$ es una medida positiva si satisface la propiedad de aditividad numerable, dado un conjunto numerable y disjunta $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 29. Dado un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de Lebesgue del subconjunto Ω , mediante:

$$m^*(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Vol(Q_n), \Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, Q_n \text{ rectángulos cerrados} \right\}$$

Observación:

$$m^*: P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\Omega \rightarrow m^*(\Omega)$$

donde $P(\mathbb{R}^n)$: es el conjunto de partes de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 20.

(i) La medida $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) Dado $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

(iii) Dado la familia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerable de conjuntos; entonces

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\Omega_n)$$

(iv) Definimos $m^*(\Omega) = \inf \{m^*(G) / G \text{ abierto } \Omega \subseteq G\}$

(v) Para Ω y para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega)$$

Definición 30. Un conjunto Ω se dice lebesgue medible, que en lo que sigue llamaremos simplemente medible, si verifica la siguiente propiedad: para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$m^*(E) = m^*(E \cap \Omega) + m^*(E - \Omega)$$

Denotemos por M a la familia de todos los conjuntos $\mathbb{R}^n$ que son medibles. Se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ a la restricción de la medida exterior m^* a M , es decir $m = m^*|_M$; se tiene así la función:

$$m : M \rightarrow [0, +\infty]$$

$$A \rightarrow m(A) = m^*(A)$$

Definición 31. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es Lebesgue medible o simplemente medible si para todo abierto A de $\mathbb{R}$, la imagen inversa

$$f^{-1}(A) = \{x \in \Omega / f(x) \in A\}$$

es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$.

Definición 32. Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Una función simple no negativa,

$$r = \sum_{i=1}^k a_i X_{A_i}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \Omega \quad \text{donde} \quad X_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \notin A_i \end{cases}$$

se define la integral de s en Ω por

$$\int_{\Omega} r = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i)$$

Definición 33. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Una función medible con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, se define la integral de f en Ω , denotada $\int_{\Omega} f$, mediante

$$\int_{\Omega} f = \sup \left\{ \int_{\Omega} s / s \text{ es una función simple, } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Ver [32]. Pág. 9, 10, 11 y 16.

Teorema 21 (Lema de Fatou). **Dado una** sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en L^1 tal que manera que

(1) Para cada $n \geq 1$, $f_n(x) \geq 0$ c.t.p en Ω

(2) $\sup_{\Omega} \int_{\Omega} f_n \leq \infty$

Entonces $f \in L^1$ y $\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx$

Demostración.- Ver [28]. Pág. 55

Teorema 22. (Convergencia Dominada de Lebesgue). Dado una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrables. Tal que:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ c.t.p. en Ω .

ii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω entonces:

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx$$

Ver [28]. Pág. 54

3.8 Distribuciones

Definición 1. Sea K el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Por $\mathbb{N}$ representamos el monoide de los números naturales y por $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros.

Dado: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in K^n$ Se define

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{ y } z^{\alpha} = (z_1^{\alpha_1}, z_2^{\alpha_2}, z_3^{\alpha_3}, \dots, z_n^{\alpha_n})$$

Por D^{α} denotamos al operador de derivación de orden α definido por

$$D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_n^{\alpha_n}$$

Observación:

iv. Para $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^\alpha u = u$ para toda función u .

v. Por D_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

vi. Si α y $\beta \in \mathbb{N}^n$ escribimos $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cuando u y v son funciones numéricas suficiente derivables, se tiene la regla de Leibniz

$$D(uv) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha^{|\alpha|}}{\beta_i(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, una función real u definida en Ω es denominada función de prueba en Ω si u es de clase C^∞ en Ω y es nula fuera del compacto de Ω . Con el símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ se representa el espacio de las funciones de prueba en Ω

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ tiene derivadas parciales de cualquier orden y existe un compacto } K_u \subset \Omega \text{ tal que } u(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega / K_u \right\}$$

Suporte de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $\text{sup } u$, el cual se define $\text{sup } u = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$

3.9 Convergencia en $D(\Omega)$

Se dice que una sucesión $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones de $C_0^\infty(\Omega)$ es convergente para cero, cuando las siguientes condiciones se cumplen:

- i) Los soportes de todas las funciones de prueba φ_i de están contenidos en un compacto fijo K
- ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la sucesión $(D^\alpha \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para cero en K

Se dice que la sucesión $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ converge $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ cuando la sucesión $(\varphi_i - \varphi)$ converge para cero en el sentido anterior.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con esta noción de convergencia es representado por $D(\Omega)$ y es denominado el espacio de las funciones de prueba en Ω .

El espacio de distribuciones en Ω es el conjunto es el conjunto denotado por

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} / T \text{ es lineal y continua} \}$$

Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de adición y el producto de un escalar por una función;

Para $S, T \in D'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} * (S + T)(\varphi) &= S(\varphi) + T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ * (cT)(\varphi) &= cT(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ y } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En el espacio vectorial de las distribuciones $D'(\Omega)$ definimos la convergencia en el sentido distribucional: una sucesión distribuciones $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T \in D'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{R}$ para toda $\phi \in D(\Omega)$.

Ejemplo. Para cada $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. El funcional $T_u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T_u(\varphi) = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in D(\Omega)$$

Es una distribución.

En efecto, sean $\phi_1, \phi_2 \in D(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_u(\phi_1 + \beta\phi_2) &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)\phi_1(x)dx + \beta \int_{\Omega} u(x)\phi_2(x)dx \\ &= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2) \end{aligned}$$

Proposición : (Lema de Du Bois Raymond)

Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Entonces $T_u = 0$ si solo si $u = 0$ casi siempre en Ω .

Observación:

Se tiene la siguiente cadena para $1 \leq p < \infty$

$$D(\Omega) \hookrightarrow L_{Loc}^p(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

3.10 Derivada de una Distribución:

Se define como distribución sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$ que es continua en el sentido de la convergencia definida sobre $D(\Omega)$. Esto es si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $D(\Omega)$ convergente para cero en el sentido de la definición anterior entonces $(\langle T, \varphi_n \rangle)$ converge para cero en $\mathbb{R}$, donde $\langle T, \varphi_n \rangle$ el valor de T en φ_n . Se dice que la sucesión (T_n) en $D'(\Omega)$ converge para cero en $D'(\Omega)$ cuando $(\langle T_n, \varphi_n \rangle)$ converge para cero en $\mathbb{R}$ esto se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$. Se dice $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ en $D'(\Omega)$ cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n - T = 0$ en $D'(\Omega)$.

Definición 36. (Derivada α -ésima de $T \in D'(\Omega)$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $T \in D'(\Omega)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se define la derivada α -ésima de T como el operador

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

Ejemplo: Considérese $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ la función valor absoluto. Es conocido el hecho de que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su derivada viene dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, f no es derivable en $x = 0$. Se verá ahora que f si es derivable en el sentido de las distribuciones y su derivada es, precisamente, la extensión g_1 de g a todo el dominio $\mathbb{R}$, de modo que $g_1(0) = 0$. Nótese, a modo de observación, que el conjunto $\{0\}$ es de medida nula, luego la elección particular del valor $g_1(0)$ no es relevante. Así pues, dada $\phi \in D(\mathbb{R})$, se tiene que $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) |x| d\mu$, luego utilizado la técnica de integración por partes,

$$\begin{aligned}
\frac{dT_f}{dx}(\phi) &= (-1)T_f(\phi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \phi' f d\mu \\
&= \int_{(-\infty,0)} x\phi'(x)d\mu(x) - \int_{(\infty,0)} x\phi'(x)d\mu(x) \\
&= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 x\phi(x)dx - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x\phi'(x)dx \\
&= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left([x\phi(x)]_M^0 - \int_M^0 \phi(x)dx \right) - \lim_{M \rightarrow \infty} \left([x\phi(x)]_0^M - \int_0^M \phi(x)dx \right) \\
&= -\int_{(-\infty,0)} \phi d\mu + \int_{(\infty,0)} \phi d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi g d\mu = T_g(\phi)
\end{aligned}$$

Teorema 25 (Caracterización de la convergencia en $D'(\Omega)$). Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales lineales de $D'(\Omega)$. Se verifica que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento $T \in D'(\Omega)$ si y solo si

$$T_n(\phi) \rightarrow T(\phi), \quad \text{para todo } \phi \in D(\Omega)$$

3.10 Espacios de Sobolev

La introducción de los espacios de Sobolev proporciona un marco fundamental para formular y estudiar las ecuaciones diferenciales, así como para establecer resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Estos espacios permiten trabajar con funciones que, aun cuando no posean derivadas clásicas en el sentido usual, admiten derivadas débiles que satisfacen determinadas condiciones de integrabilidad.

Definición 37. Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, además $1 \leq p \leq \infty$ y m un entero tal que $0 \leq m$. Entonces

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ se denomina Espacios de Sobolev sobre Ω . Dotado de la norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{ess} |D^\alpha u|$$

Así es un espacio normado.

De la definición $\|u\|_{m,p} \geq 0$, si $\|u\|_{m,p} = 0$ entonces $\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$,
y en consecuencia $\|D^\alpha u\|_p^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. En particular para $\alpha = 0$ se tiene que

$$\|D^\alpha u\|_p^p = \|D^0 u\|_p^p = \|u\|_p^p = 0,$$

de lo cual se obtiene $u = 0$.

Observación:

(1) $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

(2) Si $p = 2$ tenemos

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / Du \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \quad \forall m\}$$

es un espacio de Hilbert. En este espacio introducimos la forma bilineal

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx \end{aligned}$$

Lo cual es un producto interno inducido por la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}$$

(3) Si $m = 1$ tenemos

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / Du \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 26. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración.- Ver [30]. Pág. 24

Proposición 18. Sea α un multi-índice, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ y $D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$. Entonces $v_\alpha = D^\alpha u$.

Demostración.- Ver [30].pag. 24

3.11.1 EL ESPACIO $W_0^{m,p}(\Omega)$

cuando $m = 0$ se tiene $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, además se tiene que $D(\Omega)$ es denso cuando $m = 0$ se tiene $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, además se tiene que $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$. Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ es decir $\overline{D(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$, $\overline{D(\Omega)} \subset W^{m,p}(\Omega)$

es decir $\overline{D(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$, $\overline{D(\Omega)} \subset W^{m,p}(\Omega)$

Proposición:

Sea $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $\bar{u}$ extensión de u es decir cero fuera de Ω . Se tiene

- i) $\bar{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$
- ii) $D^\alpha \bar{u} = D^\alpha u$ para todo $|\alpha| \leq m$
- iii) $\|u\|_{m,p} = \|\bar{u}\|_{m,p}$

Demostración: Ver [30]. Pág. 26

Teorema 27. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$ Se tiene:

- i) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.
- ii) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.

Demostración.- Ver [27]. Pág. 121

Observación: Los espacios $W^{m,1}(\Omega)$ y $W^{m,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.

Definición 38. Sea $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir.

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

En el caso particular en que $p = 2$, es usual usar la notación $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$

Observación:

1. $W_0^{m,p}(\Omega)$ si y solo si existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ tal que $\varphi_n \rightarrow u$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es: existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$.
2. Se comprueba que $C_0^m(\Omega) \subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$, para todo $m \geq 1, p \in [1, \infty)$.

Teorema 28. (Desigualdad de Poincaré). Para un abierto acotado (Ω) de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ bien regular, existe $C_* > 0$ tal que se verifica

$$\|u\|_p \leq C_* \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p^p dx \right)^{1/p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad 1 < p < \infty$$

Si $p = 2$ entonces $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ por teorema de Poincaré

$$\|u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [27] Pag. 36

Observación: Por otro lado existen $M_0 > 0, M_1 > 0$ tal que

$$M_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq M_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

tenemos el producto interno asociado a esta norma

$$((u, v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Proposición 19. (Desigualdad de Hardy-Sobolev). Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, luego $\frac{u}{\phi_1} \in L^q(\Omega)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-r}{N}, 0 < r \leq 1$, y entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^r} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [8 pág. 2]

3.11.2 INMERSIONES DE LOS ESPACIOS $W^{m,p}(\Omega)$

- **Inmersiones Continuas**

Teorema 29. Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ ($2 \leq n$). Ω de clase C^m . Para un entero $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Tenemos las inmersiones continuas:

- i) Para $mp < n$ $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$
- ii) Si $mp = n$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$,
- iii) Si $mp > n$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\Omega)$ donde

$$k \text{ es un entero } k < m - \frac{n}{p} \leq k+1 \text{ y } 0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0$$

Demostración. Ver [27 pág.76].

Proposición 22. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 , con frontera acotada. Sean $1 \leq p < +\infty$, entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:

$$\text{Para } 1 \leq p < n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

$$\text{Para } p = n \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$\text{Para } p > n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

Teorema 30: Dado un conjunto abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq n$). Ω de clase C^m . Entonces

$$W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\bar{\Omega})$$

Demostración. Ver [27 pág.76].

- **Inmersiones Compactas**

Teorema 31. (Inmersión Compacta). Para un abierto acotado Ω y bien regular de $\mathbb{R}^n$, y para $j \geq 0$, $m \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(i) \quad \text{Para } m < \frac{n}{p} \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-mp}$$

$$(ii) \quad \text{Para } m = \frac{n}{p} \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \infty$$

$$(iii) \quad \text{Para } m > \frac{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} a) & W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega); 1 \leq q < \infty \\ b) & W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^j(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

Demostración. Ver [27 pág. 80].

Teorema 32. (Rellich-Kondrachov). Dado subconjunto Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 . Se verifican las siguientes inmersiones compactas:

$$i) \quad \text{Para } p < n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[,$$

$$\text{donde } 1 \leq q < \frac{np}{n-p} = p^*$$

$$ii) \quad \text{Para } p = n \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$iii) \quad \text{Para } p > n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} C^0(\overline{\Omega})$$

Demostración. Ver [27 pág. 80-81].

Teorema 33 (Teorema del ángulo agudo). Dado la aplicación continua $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, si existe $R > 0$ tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$, Para todo $|\xi| = R$, entonces existe $\varepsilon_0 \in \overline{B(0, R)}$ tal que $F(\xi_0) = 0$

Demostración.- Ver [21].

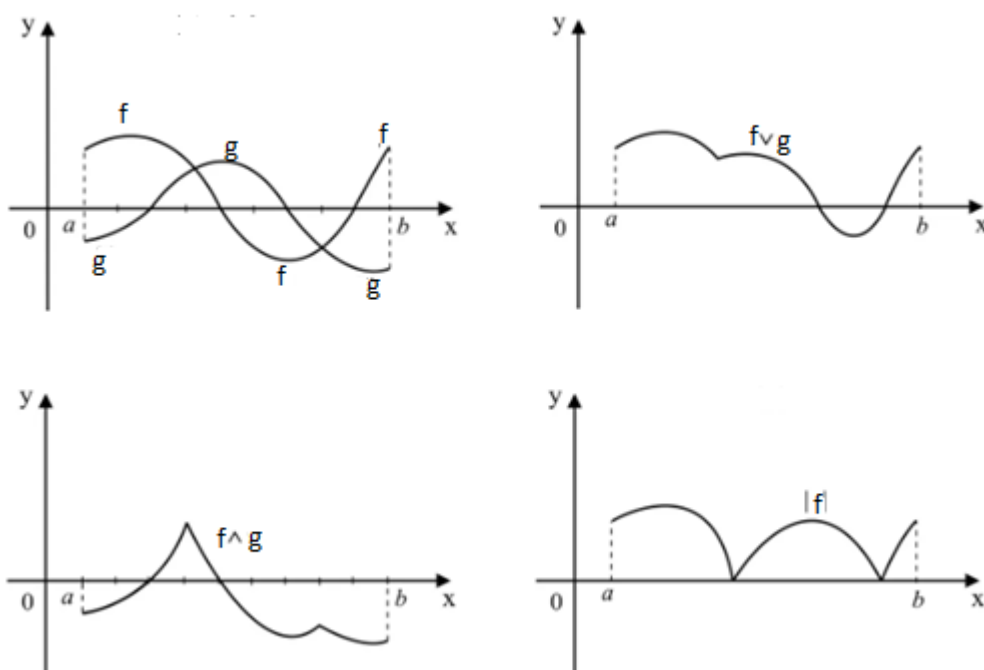
3.11 PARTES POSITIVA Y NEGATIVA DE UNA FUNCION

Dado dos funciones reales f y g definidas en $[a;b]$ se define las funciones $f \vee g$, $f \wedge g$ y $|f|$ del siguiente modo

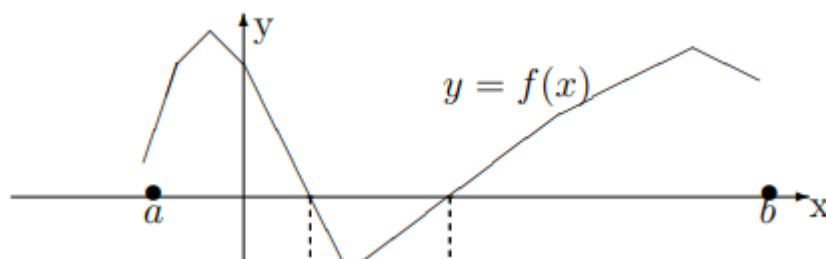
$$(f \vee g)(x) = \max \{ f(x), g(x) \}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min \{ f(x), g(x) \}$$

$$|f|(x) = |f(x)|$$



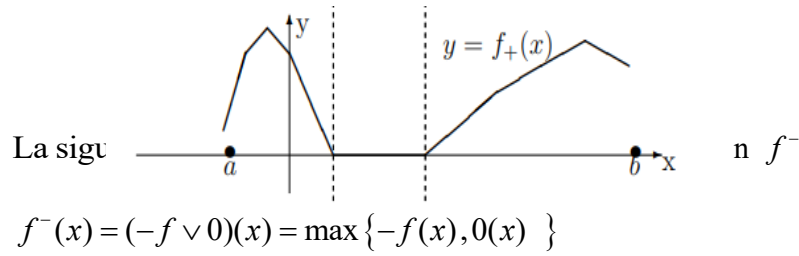
Dada una función $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ definimos f^+ y f^- llamadas respectivamente, parte positiva y negativa de f de la siguiente manera



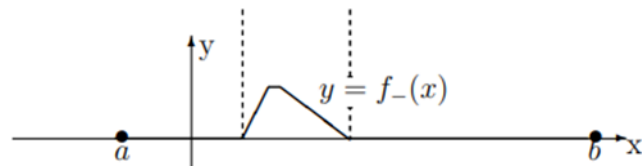
$$f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max \{ f(x), 0(x) \}$$

La siguiente figura ilustra geométicamente la función f^+

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



$$f^-(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



Lema 1. Sea $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$
- (ii) $f = f^+ - f^-$
- (iii) $|f| = f^+ + f^-$
- (iv) Si $f \geq 0$, entonces $f = f^+$ y $f^- = 0$

Lema 2. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ son medibles, entonces $f \vee g$ y $f \wedge g$ son medibles.

Proposición 23. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ es medible si, y sólo si, sus partes positiva y negativa f^+ y f^- son medibles

3.12 Principio del máximo.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Definimos el operador diferencial parcial de segundo orden lineal L como

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu$$

donde $a^{i,j}, b^i, c$ coeficientes acotados

3.13 Principio del máximo débil.

Primero identificamos circunstancias bajo las cuales una función debe asumir su máximo (o mínimo) en la frontera, siempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sea acotado y abierto.

Teorema 34 (Principio del máximo débil para $c \equiv 0$). Sean $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y $c \equiv 0$ en Ω .

(i) Si u es una subsolución, es decir $Lu \leq 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(ii) Si u es una sobresolución, es decir $Lu \geq 0$ en Ω , entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Raimund Burger [33] [pág. 145]

Teorema 35 (Principio del máximo débil para $c \geq 0$).

Sean $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$ en Ω ,

$$u^+(x) = (u \vee 0)(x) = \max \{u(x), 0(x)\}$$

$$u^-(x) = (-u \wedge 0)(x) = \min \{-u(x), 0(x)\}$$

(i) Si $Lu \leq 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+$$

(ii) Si $Lu \geq 0$ en Ω , entonces

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u^-$$

Comentamos que si $Lu = 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Raimund Burger [33] [pag. 146]

Teorema 36 (Principio del máximo fuerte). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $c \equiv 0$ en Ω .

Supongamos también que Ω es conexo, acotado y abierto.

(i) Si $Lu \leq 0$ en Ω y u asume su máximo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .

(ii) Análogamente, si $Lu \geq 0$ en Ω y u asume su mínimo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior; entonces u es constante en Ω .

Raimund Burger [33] [pág. 147]

Teorema 37 (Principio del máximo fuerte con $c \geq 0$). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $c \geq 0$ en Ω .

(i) Si $Lu \leq 0$ en Ω y u asume un máximo no negativo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .

(ii) Análogamente, si $Lu \geq 0$ en Ω y u asume su mínimo no positivo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .

Ver. [33] [pág. 148]

Proposición 24.(Desigualdad de Tartar) Para cualquier vector x , y de $\mathbb{R}^n$ se tiene las desigualdades

$$\left\langle x - y, |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \begin{cases} \geq c_p |x - y|^p, & \text{si } p \geq 2, \\ \geq e_p |x - y|^2 (|x| + |y|)^{p-2}, & \text{si } 1 < p < 2, \end{cases}$$

c_p, e_p son constantes positivas y dependientes de p .

3.15 Teoremas de las divergencias y fórmulas de Green.

Teorema 38. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio elemental cuyo cierre $\overline{\Omega}$ (que es compacto) esta contenido en un abierto un poco mayor: $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. Para todo campo de vectores $F : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C_1 , se tiene:

$$\int_{\Omega} \text{div} F \, dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial\Omega} (F \cdot v) \, d \text{ área}$$

Siendo v la normal unitaria exterior a Ω .

Corolario 4. Sea $v = (v_1, \dots, v_n)$ la normal exterior a Ω . Para toda la función f de clase C^1 en Ω_1 y todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:

$$\int_{\Omega} f_{x_i} \, dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial\Omega} f v_i \, ds$$

Resulta de aplicar el teorema de la divergencia al campo $F = f \cdot e_i$

Corolario 4. (Integración por partes). Dadas f, g de clase C^1 en Ω_1 y dado un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:

$$\int_{\Omega} (f_{x_i} g) \, dx_1 \dots dx_n = - \int_{\Omega} (f g_{x_i}) \, dx_1 \dots dx_n + \int_{\partial\Omega} (f \cdot g \cdot v_i) \, ds.$$

3.16 Teorema (fórmulas de Green)

En lo siguiente Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega \in C^1$.

Definición:

- 1) si $\partial\Omega \in C^1$ entonces a lo largo de $\partial\Omega$ se define el campo vectorial normal unitario exterior $v = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n)$. La normal unitaria en $x_0 \in \partial\Omega$ Esta definido por $v(x_0) = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n) = v$
- 2) Sea $u \in C^1(\Omega)$ Entonces, $\frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot Du$ se llama derivada normal (exterior) de u

$$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_n})$$

Teorema 39. (Teorema de Gauss-Green). Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ver. [33] [pág. 15]

Teorema 40. (Integración por partes). Sean $u, w \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

Ver. [33] Pag. 16

$$\int_{\Omega} u_{x_i} w dx = - \int_{\Omega} u w_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u w v^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 41. (Formula de GauB-Green) Sean $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dw dx = - \int_{\Omega} u(\Delta w) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} u dS,$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta w - w \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Ver. [33] Pag. 16

,

CAPITULO IV

4.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En nuestro presente trabajo utilizamos resultados importantes, los espacios Banach, espacios de Hilbert, isomorfismo e isometría, espacios reflexivos, espacios separables, espacios L^p , distribuciones, Espacios de Sobolev, Inmersiones continuas y compactas, teorema de la convergencia dominada, teorema del ángulo agudo, parte positiva y negativa de una función, principio del máximo, teoremas de la divergencia y fórmulas de Green, todos estos temas vinculados al problema elíptico sobre dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que involucran el operador P-Laplaciano. Las demostraciones de teoremas y propiedades que utilizamos se encuentran en [28] y [30] y adicionalmente otros autores.

Para demostrar el resultado central consideraremos el problema auxiliar (2), y expresamos este problema en su formulación variacional. Para encontrar la solución débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$ en este problema utilizamos esencialmente, el método de Galerkin, teoremas de inmersión, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el teorema del ángulo agudo.

Luego utilizaremos el principio del máximo para encontrar la solución del débil única del problema (1).

4.1 HIPOTESIS CENTRAL DE LA INVESTIGACION

Existe la solución débil y es única del problema (1) en el espacio Banach separable $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$ donde

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$(1) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $\Omega \subseteq R^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciarán a seguir.

(M_0) $M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[$ es una función continua, $m_0 > 0$

(f_0) $f(x, u, \nabla u) = h(x, u) + g(x, \nabla u)$, donde:

i) $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua y existen funciones no negativas

$a_1 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_1 \in L^{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}}(\Omega)$, $\gamma_1 \in]0, p-1[$ tal que
 $0 < h(x, t) \leq a_1 + b_1 |t|^{\gamma_1}$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

ii) $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua tal que
 $0 < g(x, \lambda) \leq a_2 + b_2 |\lambda|^{\gamma_2}$, $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ para funciones no negativas

$a_2 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_2 \in L^{\frac{p}{p-\gamma_2}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $\gamma_2 \in]0, p-1[$

(C_0) $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\frac{\beta}{p-1} < \alpha < p-1$

4.2 VARIABLES E INDICADORES DE LA INVESTIGACION

4.2.1 VARIABLE INDEPENDIENTE

El problema (1) de valor frontera (PVF) que involucra un término no local del tipo P-Kirchhoff, con la función f y la función M que cumple ciertas condiciones es la variable dependiente

4.2.2 VARIABLE DEPENDIENTE

Existencia de solución débil del problema (1) es la variable independiente.

4.3 METODOS DE LA INVESTIGACION

En este trabajo seguiremos el método deductivo, que se deriva del razonamiento lógico basados en leyes y principios que tiene por finalidad inferir a partir de premisas o hechos establecidos que son ciertas, conclusiones que también serán ciertas.

Estableceremos dos etapas:

- a) **Formulación de hipótesis:** Nuestro trabajo se inicia con la formulación de una hipótesis, el cual es una premisa o una suposición del objeto de estudio (1) que realizamos en nuestro trabajo central.
- b) **Deducciones y consecuencias:** De nuestras hipótesis se deducirán las consecuencias, de estas consecuencias se deducirán la solución del problema (1), mediante una demostración, utilizando el razonamiento lógico.

Este trabajo está dentro de la clasificación de investigación básica o Fundamental.

4.4 DISEÑO O ESQUEMA DE LA INVESTIGACION

Para encontrar solución de (1) consideramos el problema auxiliar(2), y expresamos este problema en su formulación variacional. Para encontrar la solución débil en el espacio de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$, para este problema, utilizamos esencialmente el método de Galerkin, teoremas de inmersión, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el teorema del ángulo agudo, luego encontramos la solución del problema central (1)

4.5 POBLACION Y MUETRA

Nuestra población se limita al espacio de las Ecuaciones diferenciales Parciales (EDP) y la muestra serán las ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas del tipo P- Kirchhoff

En donde trabajaremos es el espacio Banach separable

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

Cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

4.6 ACTIVIDADES DEL PROCESO INVESTIGATIVO

Para el desarrollo de esta investigación se aplicaron las siguientes fases:

4.6.1 Fase Inicial

En la fase inicial se realiza una actividad recopilación en temas asociados a nuestro trabajo en revistas especializadas, en textos y en artículos de investigación relacionados con las ecuaciones del tipo P-Kirchhoff.

4.6.2 Fase Intermedia

En esta fase intermedia se realiza las actividades exploratorias y la formulación variacional del problema planteado (1) y el problema auxiliar asociado (2), para ello se reviso el espacio de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$ y el método de Galerkin

4.6.3 Fase Final

En la parte final de este trabajo se verifica la hipótesis mediante la demostración de existencia y unicidad solución débil del problema (1), utilizando el método de Galerín y los teoremas y propiedades dadas en el marco teórico.

4.7 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACION

Se realizó la búsqueda de artículos relacionados con las EDP elípticas del tipo Kirchhoff en libros y revistas científicas, revistas indexadas y bibliotecas virtuales haciendo uso de la tecnología

El instrumento es el análisis de los documentos y artículos recopilados y de las técnicas de solución para abordar las soluciones de (1)

4.8 PROCEDIMIENTO PARA LA RECOPIACION DE DATOS

Se realizó la búsqueda de diferentes trabajos de investigación relacionados con las ecuaciones elípticas del tipo P-Kirchhoff.

4.9 TECNICAS DE PROCESAMIENTO Y ANALIS DE LOS DATOS

Para obtener la existencia y unicidad de solución del problema (1), se han analizado los datos recopilados esencialmente los métodos y técnicas de demostración utilizadas en las revistas y artículos especializados relacionados con la demostración de los problemas de valor frontera (PVF) del tipo P- Kirchhoff.

Asimismo, resultados de Análisis Funcional, resultados importantes de teoría de operadores, y de los Espacios de Sobolev.

CAPITULO V

5. RESULTADOS Y DISCUSION

La ecuación de Kirchhoff

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que apareció en 1883, extiende el modelo para las pequeñas oscilaciones de una cuerda, realizado por D'Alembert, considerando el efecto de los cambios en la longitud de las cuerdas al vibrar. Este problema resulta ser no local debido al termino.

$$\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$$

En general, los problemas no locales han atraído tremendamente la atención de los investigadores porque representan una gran variedad de situaciones físicas y biológicas, cuyo tratamiento requiere herramientas matemáticas sofisticadas.

La ecuación de Kirchhoff ha sido generalizada en décadas recientes, a una ecuación denominada del tipo P-Kirchhoff.

$$\begin{aligned} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u &= f(x, u) \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ ; $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $M : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas. La generalización está relacionada con el hecho de que el operador P- Laplaciano Δ_p aparece en la descripción de fenómenos físicos, en diversas ramas de la ciencia.

En este trabajo consideramos una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local y una convección.

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u)$$

Nuestra ecuación contiene, un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [5], que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibidor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Reener [10] para describir el comportamiento cualitativo de los sistemas de reacción-difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” esta formado por una ecuación de reacción - difusión acoplada con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión original Reener [10].

Por otro lado, a nuestro conocimiento, los términos no locales fueron inicialmente introducidas en modelo biológicos de dinámica de poblaciones [21].

En estos modelos, la presencia del término no local significa en general que el efecto de la variable depende no solo de su propia posición en el espacio, si no de su valor medio (promedio) en el dominio de definición.

Como es sabido, el termino de convección (termino que contiene al gradiente) representa el transporte o movimiento de una cantidad (como calor, masa o momento) debido al movimiento masivo de un fluido o material. Este término está abocado al fenómeno de la convección, que consiste en la transferencia de una propiedad por el movimiento del fluido o material en sí.

La presencia de este termino hace que el problema (1) sea no variacional, por lo que no es posible aplicar, al menos directamente, las técnicas variacionales como el Teorema del Paso de la Montaña. minimización directa vía el teorema de Weierstrass o el Principio de Ekoland, por lo que aplicaremos el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita. Así esta no linealidad (que contiene al gradiente) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos

En nuestro trabajo abordamos un modelo del tipo P-Kirchhoff con un término no local especial, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que

consideramos nuestro estudio como aporte al avance en el área de las ecuaciones diferenciales parciales.

Este trabajo de tesis está compuesto de los siguientes capítulos. En el capítulo II utilizaremos los resultados preliminares para abordar la parte central, así como la definición de solución débil y la notación a ser usada. El capítulo V es el objetivo fundamental de este trabajo y consiste en la deducción detallada de la existencia y unicidad de la solución del problema (1) como se mencionó la herramienta matemática para probar la existencia de solución débil es el método de Galerkin, en tanto que la unicidad será probada por el método de contradicción realizando cuidadosas estimativas con apropiadas desigualdades algebraicas. La positividad será mostrada vía el principio del máximo fuerte.

5.1 Existencia y unicidad de solución para una ecuación

p-laplaciano del tipo kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciarán a seguir.

i) (M_0) $M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[$ es una función continua, $m_0 > 0$

ii) (f_0) $f(x, u, \nabla u) = h(x, u) + g(x, \nabla u)$, donde

$h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua y existen funciones no negativas $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_1 \in L^{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}}(\Omega)$, $\gamma_1 \in]0, p-1[$ tal que $0 < h(x, t) \leq a_1 + b_1 |t|^{\gamma_1}$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$g : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua tal que $0 < g(x, \lambda) \leq a_2 + b_2 |\lambda|^{\gamma_2}$, $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ para funciones no negativas $a_2 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_2 \in L^{\frac{p}{p-\gamma_2}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $\gamma_2 \in]0, p-1[$

$$\text{iii) } (C_0) \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \frac{\beta}{p-1} < \alpha < p-1$$

Para resolver (1) aplicaremos el Método de Galerkin.

Definición: Diremos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es solución débil de (1) si

$$\text{i) } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ii)

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx$$

Teorema 5.1 .- Asuma que las condiciones (M_0) , (f_0) y (C_0) se verifican. Entonces el problema (1) posee una solución débil, no trivial.

Para la demostración del teorema (5.1) dos lemas

Lema 5.1 El problema

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} (u^+)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Posee una solución débil $u_{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ donde $u_{\varepsilon}^+ = \max\{u_{\varepsilon}, 0\}$.

Demostración

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es separable, existe una base de Galerkin

$$\{w_1, w_2, \dots\} \text{ para } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ el espacio generado por las “m” primeros elementos de la base.

Observemos aquí, que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow V_m$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} \rightarrow \phi(\xi) = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j$$

1. ϕ es un operador lineal, en efecto sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\phi(\alpha\xi + \beta\eta) = \sum_{j=1}^m (\alpha\xi_j + \beta\eta_j)w_j = \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j w_j + \beta \sum_{j=1}^m \eta_j w_j = \alpha\phi(\xi) + \beta\phi(\eta)$$

2. Es un operador inyectivo

$$\text{sea } \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \in \text{Nuc}(\phi) \text{ entonces } \phi(\eta) = \sum_{j=1}^m \eta_j w_j = 0$$

entonces $\eta_j = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$ pues $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ es base

$$\text{asi } \eta = (0, 0, 0, \dots, 0) \text{ luego } \text{Nuc}(\phi) = \{0\}$$

por tanto ϕ es inyectiva

3. Por la misma definicin ϕ es sobreyectivo

$$\text{Asi } \phi \text{ es un isomorfismo lineal. Adem\'as } \|\phi(\xi)\|_{W_0^{1,p}}^2 = \|\phi(\xi)\|_{V_m}^2 = \sum_{j=1}^m \xi_j^2 = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2$$

por lo que ϕ es un isomorfismo isom\'etrico.

En adelante identificaremos

$$u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \quad \text{con } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{sin mayor comentario.}$$

Ahora restringiremos nuestra formulaci\'on variacional (de la soluci\'on d\'ebil) al espacio V_m . Por lo que queremos determinar

$$u_{m\varepsilon} = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$$

Restringimos nuestra soluci\'on d\'ebil del problema auxiliar (2) al espacio $V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$, luego tenemos, $u_{m\varepsilon} \in V_m$ es soluci\'on d\'ebil de (2) si:

$$i) u_{m\varepsilon} \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$ii) M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{m\varepsilon} \nabla w_j dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_{m\varepsilon}^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_{m\varepsilon}^{+\alpha} w_j dx + \int_{\Omega} f(x, u_{m\varepsilon}, \nabla u_{m\varepsilon}) w_j dx,$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

Luego

$$M\left(\int_{\Omega}|\nabla u_{m\varepsilon}|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u_{m\varepsilon}|^{p-2}\nabla u_{m\varepsilon}\nabla v dx=\left(\int_{\Omega}\frac{u_{m\varepsilon}^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u_{m\varepsilon}^{+\alpha}v dx+\int_{\Omega}f(x,u_{m\varepsilon},\nabla u_{m\varepsilon})v dx, \forall v \in V_m$$

En adelante, salvo mención contraria, denotaremos $u_{m\varepsilon} \equiv u_m$. Para resolver el sistema aproximado (2), aplicaremos el lema del ángulo agudo.

Definimos el campo vectorial

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \xi &\rightarrow F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), \dots, F_m(\xi)) \end{aligned}$$

Con $F_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= M\left(\int_{\Omega}|\nabla u_m|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega}\frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u_m^{+\alpha}w_j dx - \int_{\Omega}f(x,u_m,\nabla u_m)w_j dx, \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Notamos aquí que las F_i son continuas. Luego F es continua. Por el momento denotamos con $u_m = u$ luego se tiene

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega}\frac{u^{+\alpha+1}}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u^{+\alpha}w_j dx - \int_{\Omega}f(x,u,\nabla u)w_j dx, \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F(\xi), \xi \rangle &= \sum_{j=1}^m \xi_j F_j(\xi) = \sum_{j=1}^m \xi_j \left[M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega}\frac{u^{+\alpha+1}}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u^{+\alpha}w_j dx - \int_{\Omega}f(x,u,\nabla u)w_j dx \right] \\ &= \left[M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j\right) dx - \left(\int_{\Omega}\frac{u^{+\alpha+1}}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u^{+\alpha}\left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j\right) dx - \int_{\Omega}f(x,u,\nabla u)\left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j\right) dx \right] \\ &= M\left(\int_{\Omega}|\nabla u_m|^p dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u dx - \left(\int_{\Omega}\frac{u^{+\alpha+1}}{\alpha+1}dy+\varepsilon\right)^{-\beta}\int_{\Omega}u^{+\alpha}u dx - \int_{\Omega}h(x,u)u dx - \int_{\Omega}g(x,\nabla u)u dx \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Holder, la positividad de la función M, las inmersiones continuas y las condiciones de la hipótesis se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi \rangle &\geq m_0 |\nabla u|_p^p - C_\alpha \left(\int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{1-\beta} - \int_\Omega h(x, u) u dx - \int_\Omega g(x, \nabla u) u dx \\
&\geq m_0 |\nabla u|_p^p - C_\beta |u|_{\alpha+1}^{(\alpha+1)(1-\beta)} - |a_1|_{p'} |u|_p - |b_1|_{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}} |u|_p^{\gamma_1+1} - |a_2|_{p'} |u|_p \\
&\quad - \left(\int_\Omega b_2^{p'} |\nabla u|^{p'\gamma_2} dx \right)^{\frac{1}{p'}} |u|_p \\
&\geq m_0 \|u\|^p - C_p' \|u\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} - h_1 |a_1|_{p'} \|u\| - h_2 |b_1|_{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}} \|u\|^{\gamma_1+1} \\
&\quad - h_3 |a_2|_{p'} \|u\| - h_4 |b_2^{p'}|_{\frac{p}{p-\gamma_2}} \|u\|^{\gamma_2+1} \\
&= m_0 \|u\|^p - k_0 \|u\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} - k_1 \|u\|^{\gamma_1+1} - k_2 \|u\|^{\gamma_2+1} - k_3 \|u\|
\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado que $W^{1,p+p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $pp' = p + p'$ y la desigualdad

$$\|u\| \leq C_5 |\nabla u|_{p+p'}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Ahora, como $(\alpha+1)(1-\beta) < p$, $\gamma_1+1, \gamma_2+1 < p$ se tiene que:

Luego existen ρ y R positivos tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$, $\forall |\xi| = R$

Por el teorema del ángulo agudo, existe $\xi_0 \equiv u_m \in V_m$ tal que

$\xi_0 \in \bar{B}(0, R)$ tal que $F(\xi_0) = 0$, entonces $F_j(\xi_0) = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned}
F_j(\xi_0) &= M \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx \right) \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx - \left(\int_\Omega \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_\Omega u_m^{+\alpha} w_j dx - \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx = 0 \\
j &= 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

Esto significa $u_{m\varepsilon} = u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface la ecuación

$$M \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx \right) \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx = \left(\int_\Omega \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_\Omega u_m^{+\alpha} w_j dx + \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

por lo tanto $u_{m\varepsilon}$ es solución débil de la ecuación auxiliar (2) en V_m

$$(S.A) \left\{ \begin{array}{l} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_1 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_1 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_1 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_2 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_2 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_2 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_3 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_3 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_3 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_m dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_m dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_m dx, \end{array} \right.$$

Así, el sistema aproximado (S.A) posee solución $u_{m\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. El radio R puede depender de m luego buscaremos una cota para $\|u_m\|$ independiente de m .

Lema 5.2 La sucesión $(\|u_m\|)_{m \geq 1}$ es acotada

Demostración

La demostración será por contradicción. Supongamos que $(u_m)_{m \geq 1}$ no está acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Luego existe una subsucesión aun denotado (u_m) tal que $\|u_m\| \rightarrow +\infty$.

Del el sistema aproximado

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_j dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

haciendo " $w_i \equiv u_m$ ", tenemos

$$\begin{aligned}
M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx &= \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} u_m dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) u_m dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \frac{|u_m|^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} [h(x, u_m) + g(x, \nabla u_m)] u_m dx
\end{aligned}$$

Como $m_0 \leq M(t)$, $u^+ \leq |u|$ usando la desigualdad de Holder, y los teoremas de inmersión y las condiciones para las funciones h y g obtenemos

$$\begin{aligned}
m_0 \|u_m\|^p &\leq h_0 \left(\int_{\Omega} |u_m|^{\alpha+1} dx \right)^{1-\beta} + \int_{\Omega} |a_1| |u_m| dx + \int_{\Omega} |b_1| |u_m|^{\gamma_1+1} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |a_2| |u_m| dx + \int_{\Omega} |b_2| |\nabla u_m|^{\gamma_2} |u_m| dx \\
&\leq h_0 \|u_m\|_{\alpha+1}^{(\alpha+1)(1-\beta)} + \|a_1\|_{p'} \|u_m\|_p + \|b_1\|_{\frac{p}{p-(\gamma_1-1)}} \|u_m\|_p^{\gamma_1+1} + \|a_2\|_{p'} \|u_m\|_p + \|b_2\|_{\frac{p}{p-\gamma_2}} \|u_m\|_p^{\gamma_2+1}
\end{aligned}$$

Luego

$$m_0 \|u_m\|^p \leq h_0 \|u_m\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} + h_1 \|u_m\| + h_2 \|u_m\|^{\gamma_1+1} + h_3 \|u_m\| + h_4 \|u_m\|^{\gamma_2+1}$$

Dividiendo por $\|u_m\|^p$ resulta

$$0 < m_0 \leq \frac{h_0}{\|u_m\|^{p-(\alpha+1)(1-\beta)}} + \frac{\overline{h_1}}{\|u_m\|^{p-1}} + \frac{h_2}{\|u_m\|^{p-(\gamma_1+1)}} + \frac{h_4}{\|u_m\|^{p-(\gamma_2+1)}}$$

como $\|u_m\| \rightarrow +\infty$ resulta $0 < m_0 \leq 0$

Lo que no puede ser. Así $(\|u_{m\varepsilon}\|)_{m \geq 1}$ es acotada.

Esto es, existe $k > 0$ $\|u_{m\varepsilon}\| \leq k$

$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo y ademas $W_0^{1,p}(\Omega)$ es cerrado y de Banach entonces $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, entonces por teorema de Alaoglu – Burbaki posee una subsucesion debilmente convergente que aun denotamos por $(u_m)_{m \geq 1}$, esto es $u_m \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

de la inmersión compacta de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq p^*$ existe una subsucesión de (u_m) aun denotada con (u_m) tal que

$$\left. \begin{aligned} \|u_m\|^p &\rightarrow \theta \\ u_m &\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_m &\rightarrow u_\varepsilon \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \\ u_m(x) &\rightarrow u_\varepsilon(x) \text{ c.t.p } x \in \Omega \\ \text{como } \alpha &< \alpha+1 < q \text{ (haciendo } 1 < q = p) \\ \text{tenemos } |u_m(x)| &\leq E, L^\alpha(\Omega) \\ |u_m(x)| &\leq F, L^{\alpha+1}(\Omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

Ahora, de la continuidad de M : y de (1) tenemos

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \rightarrow M(\theta) \dots\dots\dots(2)$$

Fijando $i_0 < m$, luego $V_{i_0} \subseteq V_m$; resulta para $w \in V_{i_0}$ que

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} \, dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w \, dx$$

$$\forall w \in V_{i_0} \dots\dots\dots(3)$$

Notemos que

$$|h(x, u)|_{p'}^{p'} \leq |a_1|_{p'}^{p'} + C_0 + |u|_p^p \equiv C_0 + |u|_p^p \rightarrow |h(x, u)|_{p'} \leq \widehat{C}_0 + |u|_p^{p-1} \leq \widehat{C}_0 + \overline{C}_0 |\nabla u|_p^{p-1} \dots\dots\dots(4)$$

Esto implica que $h(x, u) \in L^{p'}(\Omega)$

Como por (1) se tiene

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_m &\rightarrow u_\varepsilon \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \\ u_m(x) &\rightarrow u_\varepsilon(x) \text{ c.t.p } x \in \Omega \\ (x, u_m(x)) &\rightarrow (x, u_\varepsilon(x)) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R} \text{ c.t.p} \end{aligned}$$

observamos como h es Hólder localmente continua, entonces h es continua

$$h(x, u_m(x)) \rightarrow h(x, u_\varepsilon) \quad \text{c.t.p } x \in \Omega$$

$$h(x, u_m(x))w(x) \rightarrow h(x, u_\varepsilon)w(x) \quad c.t.p \quad x \in \Omega; \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

También se tiene

$$\begin{aligned} |h(x, u_m)w| &\leq a_1 |w| + b_1 |u_m|^{\gamma_2} |w| \\ &\leq F \in L^1(\Omega) \quad , \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

Luego del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(x, u_m)w \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} h(x, u_\varepsilon)w \, dx \dots\dots\dots(5) \\ &\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

Por otro lado como

$$\begin{aligned} |g(x, \nabla u_m)|_{\frac{p}{\gamma_2}} &\leq |a_2|_{\frac{p}{\gamma_2}} + \left| b_2 \right|_{\infty}^{\frac{p}{\gamma_2}} |\nabla u_m|_p^{\gamma_2} \\ &\leq C_1 + C_2 K^{\gamma_2} \end{aligned}$$

Como $(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ es acotada en $L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega)$ y como es reflexivo, entonces existe una subsucesión de $(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ aun denotado con

$(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ tal que $g(x, \nabla u_m) \rightharpoonup A(x)$, en $L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega)$ esto es

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m)w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x)w \, dx, \quad \forall w \in L^q(\Omega) \dots\dots\dots(6)$$

Donde $\frac{\gamma_2}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) = \left(L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega) \right)'$ $(q = \frac{p}{p-\gamma_2})$.

, La función

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / T(s) = s^\alpha \text{ es continua para } \alpha > 0, \dots\dots\dots(6.1)$$

de la convergencia (1) y la continuidad de la aplicación T $s \rightarrow s^\alpha$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, se tiene

$$u_m^\alpha(x) \rightarrow u_\varepsilon^\alpha(x) \quad \text{y} \quad u_m^{\alpha+1}(x) \rightarrow u_\varepsilon^{\alpha+1}(x) \quad \text{c. s en } \Omega.$$

Además por (1) tenemos que

$$\begin{aligned} |u_m(x)| &\leq E, \quad L^\alpha(\Omega) \\ |u_m(x)| &\leq F, \quad L^{\alpha+1}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\|E^\alpha\|_{L_1} = \int_{\Omega} |E^\alpha(x)| dx = \int_{\Omega} |E(x)|^\alpha dx = \|E\|_{L^\alpha}^\alpha < \infty \text{ pues } E \in L^\alpha(\Omega)$$

$$\|F^{\alpha+1}\|_{L_1} = \int_{\Omega} |F^{\alpha+1}(x)| dx = \int_{\Omega} |F(x)|^{\alpha+1} dx = \|F\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1} < \infty \text{ pues } F \in L^{\alpha+1}(\Omega)$$

Así tenemos que

$$|u_m|^\alpha \leq E^\alpha \in L^1(\Omega), \quad |u_m|^{\alpha+1} \leq F^{\alpha+1} \in L^1(\Omega) \quad \dots\dots\dots(7)$$

También, obviamente, se tiene para $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$u_m^\alpha(x)w(x) \rightarrow u_\varepsilon^\alpha(x)w(x) \quad \text{C.S en } \Omega \quad \text{y}$$

$$\|E^\alpha |W|\|_{L_1} = \int_{\Omega} |E^\alpha(x)| |W(x)| dx = \int_{\Omega} |E(x)|^\alpha |W(x)| dx \leq \|E\|_{L^\alpha}^\alpha \|W\|_{L^q(\Omega)} < \infty$$

Por la desigualdad de Holder y las inmersión continua de $L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

Luego tenemos por (7) $|u_m w|^\alpha \leq E^\alpha |w|$ para $E^\alpha w \in L^1(\Omega)$, así

$$|u_m^\alpha(x)w(x)| \leq E^\alpha(x)|w(x)| \in L^1(\Omega)$$

Luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} (u_m^+(x))^\alpha w(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+(x))^\alpha w(x) dx \quad \dots\dots\dots(8)$$

Por la continuidad de la aplicación T se tiene que

$$u_m^{\alpha+1}(x) \rightarrow u_\varepsilon^{\alpha+1}(x) \quad \text{c. s en } \Omega.$$

Y de (7) se tiene que $|u_m(x)|^{\alpha+1} \leq F^{\alpha+1}(x) \quad F^{\alpha+1} \in L^1(\Omega)$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \rightarrow \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

Así de (8) y (9) tenemos la siguiente convergencia

$$\left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+(x))^{\alpha} w dx \rightarrow \left(\int_{\Omega} \frac{(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^+(x))^{\alpha} w dx \dots\dots\dots(10)$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Ahora probaremos que $A(x) = g(x, \nabla u_{\varepsilon})$

Como (3) es lineal respecto a $w \in V_{i_0}$ la ecuación (3) es válida para las combinaciones lineales de los w , es decir

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w dx = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} w dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w dx, \quad \forall w \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$$

Por la densidad y continuidad obtenemos

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) v dx,$$

$$\forall v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(11)$$

Ahora estamos interesados en probar que

$$u_m \rightarrow u_{\varepsilon} \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(12)$$

(donde (u_m) representa una subsucesión

de la sucesión original $(u_m)_{m \geq 1} \subseteq V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, para después verificar que u es en efecto solución débil de (1), vía un pasaje al límite.

Consideremos $v = u_m - u_{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en (11) resulta

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla (u_m - u_{\varepsilon}) dx = \underbrace{\left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} (u_m - u_{\varepsilon}) dx}_{I_1} +$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) (u_m - u_{\varepsilon}) dx}_{I_2} \dots\dots\dots(13)$$

Por otro lado si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $|\nabla u|^{p-2} \nabla u$ es medible y

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \Big|^{p'} dx = \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{(p-1)p'} dx = \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^p dx = |\nabla u_{\varepsilon}|_p^p = \|u_{\varepsilon}\|^p < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \rightarrow p = p'(p-1)\right)$$

Luego $X = |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \in L^{p'}(\Omega)$ y como $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) = (W^{1,p}(\Omega))'$

Por otro lado tenemos de (1) tenemos

$u_m \rightharpoonup u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_m - u_{\varepsilon} \rightharpoonup 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\left\langle |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}, u_m - u_{\varepsilon} \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

Esto es

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot (\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}) dx \rightarrow 0 \dots \text{para } |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \in W^{-1,p'}(\Omega) \dots (14)$$

Veamos que el miembro de la derecha en (13) tiende a cero cuando $m \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} (u_m - u_{\varepsilon}) dx \right| \leq \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \right| \int_{\Omega} |u_m^{+\alpha}| |u_m - u_{\varepsilon}| dx \leq \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \right| \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha} |u_m - u_{\varepsilon}| dx \\ &\leq (I_m + \varepsilon)^{-\beta} I_m^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|u_m - u_{\varepsilon}\|_{\alpha+1} \leq \varepsilon^{-\beta} C_1 \|u_m - u_{\varepsilon}\|_{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\text{donde } I_m = \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha+1} dx = \|u_m^+\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq C_k \|\nabla u_{\varepsilon}\|_p^{\alpha+1} \leq C_k (K_0)^{\alpha+1} = K, \quad C_1 = K^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

como $\alpha < \alpha+1 < p$ $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ inmersión compacta para $1 \leq q$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha}(\Omega)$$

Entonces $u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $L^{\alpha+1}(\Omega)$

Luego $|I_1| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty \dots (15)$

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left| g(x, \nabla u_m) \right|_{\frac{p}{\gamma_2}} |u_m - u_\varepsilon|_p + \left| h(x, u_m) \right|_p |u_m - u_\varepsilon|_p \\
&\leq \left[\left(|a_2|_{\frac{p}{\gamma_2}} + \left| b_2 \right|_{\frac{p}{\gamma_2}}^\infty |\nabla u_m|_p^{\gamma_2} \right) + C \left(|a_1|_p + |b_2|_\infty |\nabla u_m|_p^{p-1} \right) \right] |u_m - u_\varepsilon|_p \rightarrow 0 \dots \dots (16)
\end{aligned}$$

Ya que de (1), $(|\nabla u_m|_p)$ está acotada y de la inmersión compacta de

$$\begin{aligned}
W_0^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ (inmersión compacta) se tiene que} \\
|u_m - u_\varepsilon|_p &\rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Consecuencia en (13)

$$I_1 + I_2 \rightarrow 0, \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

Luego, como

$$m_0 \leq M(\|\nabla u_m\|_p^p) \text{ entonces}$$

$$m_0 \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx \leq M(\|\nabla u_m\|_p^p) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx = I_1 + I_2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

Entonces

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty \dots \dots \dots (17)$$

Como

$\nabla u_m(x), \nabla u_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n$, entonces por la desigualdad de Tartar

se tiene que

$$\begin{aligned}
C_p |\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)|^p &\leq \left(|\nabla u_m(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) - |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) \right) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) \\
\int_{\Omega} |\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)|^p dx &\leq \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) - |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) \right) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx \\
&= \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} |\nabla u_m(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx - \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx
\end{aligned}$$

de (14) y (17) tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_{\varepsilon}(x)) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_{\varepsilon}(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_{\varepsilon}(x)) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

Luego tenemos que

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}|^p dx \leq \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m - |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}) \cdot (\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}) dx \rightarrow 0$$

Esto es

$$\|u_m - u_{\varepsilon}\|^p = \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}|^p dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

Por tanto $u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$(18)

Lo que se demuestra (12).

Por otro lado tenemos

$u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ entonces $\nabla u_m \rightarrow \nabla u_{\varepsilon}$ en $L^p(\Omega)$ y por la continuidad de la aplicación T en (6.1) tenemos que

$$|\nabla u_m|^{p-2} \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \text{ en } \mathbb{R}$$

luego

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} |\nabla u_{\varepsilon}| \text{ en } L^{p'}(\Omega)$$

como

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \in L^{p'}(\Omega), \text{ y } v \in W_0^p(\Omega)$$

entonces

$$\int_{\Omega} \left| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \right| dx \leq \left\| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \right\|_{p'} \|v\|_p \text{ entonces } |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \in L^1(\Omega)$$

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} |\nabla u_{\varepsilon}| v \text{ en } L^1(\Omega)$$

así

$$|\nabla u_m(x)|^{p-2} \nabla u_m(x) v(x) \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}(x) v(x) \text{ c.t.p en } \Omega$$

$$\left| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \right| \leq R, \quad R \in L^1(\Omega)$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (19)$$

Por otro lado de (1) y (2) tenemos que

$$\|u_m\|^p \rightarrow \theta \quad \text{y} \quad M(\|u_m\|^p) \rightarrow M(\theta) \dots (20)$$

Como $u_m \rightarrow u_\varepsilon$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces

$$\|u_m\| - \|u_\varepsilon\| \leq \|u_m - u_\varepsilon\|_{W_0^1(\Omega)}$$

entonces

$$\|u_m\| \rightarrow \|u_\varepsilon\| \quad m \rightarrow \infty \quad \text{en } \mathbb{R},$$

entonces por la continuidad de T (6.1)

$$\|u_m\|^p \rightarrow \|u_\varepsilon\|^p \dots (21)$$

Por la unicidad de limite de (20) y (21) tenemos que $\theta = \|u\|^p$

Luego de la continuidad de M y de (1) tenemos

$$M(\|u_m\|^p) \rightarrow M(\|u_\varepsilon\|^p) \dots (22)$$

Luego de (19) y (22) obtenemos que

$$M(\|u_m\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx \rightarrow M(\|u_\varepsilon\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (23)$$

Por (6) tenemos

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x) w \, dx, \quad \forall w \in L^q(\Omega)$$

y por (18) $u_m \rightarrow u_\varepsilon$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

entonces $\nabla u_m \rightarrow \nabla u_\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$, y como g es localmente Holder continua

entonces

$$g(x, \nabla u_m) \rightarrow g(x, \nabla u_\varepsilon)$$

y por (5)

$$|g(x, \nabla u_m)|_{p'} \leq R, \quad R \in L^1(\Omega)$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) v dx \rightarrow \int_{\Omega} g(x, \nabla u_\varepsilon) v dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega) \dots \dots \dots (24)$$

Lo que implica $A(x) = g(x, \nabla u_\varepsilon)$.

Recién estamos en condiciones de pasar al límite (11)

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} v \, dx + \int_{\Omega} h(x, u_m) v dx + \int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) v dx$$

$$\forall v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = W_0^{1,p}(\Omega)$$

Entonces, utilizando las convergencias (5), (10) (19) y (13), (22) y (24) y haciendo $w = v$ tenemos

$$M\left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} v \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v \, dx \dots \dots \dots (25)$$

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Se obtiene la existencia de $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir:

i) $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) $M\left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_\varepsilon^{+\alpha} v \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Esto es u_ε es solución débil del problema (2).

5.3 POSITIVIDAD DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA (2)

Sea ahora $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una solución débil de (2) y denotemos con

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) < 0\}$$

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) > 0\}$$

Definamos $u_\varepsilon^- = \max\{-u_\varepsilon, 0\}$.

Como $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-$ entonces $u_\varepsilon^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$, luego

$$\nabla u_\varepsilon^- = \begin{cases} -\nabla u_\varepsilon & \text{en } \Omega^- \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \Omega^- \end{cases}$$

Haciendo $v = -u_\varepsilon^-$ en (25) resulta

$$\begin{aligned} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx &= \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^+} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \\ &\quad + \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \left[\int_{\Omega^+} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx \right] &= \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \varepsilon \right)^{-\beta} \left[\int_{\Omega^+} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx \right] \\ &\quad + \left[\int_{\Omega^+} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

Como

$$f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = [h(x, u_\varepsilon) + g(x, \nabla u_\varepsilon)] \geq 0 \text{ y como para } x \in \Omega^- - u_\varepsilon(x) > 0$$

Luego de (26) tenemos

$$-M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \geq 0$$

luego

$$M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq 0$$

Y como que $M(s) \geq m_0 > 0$

Entonces

$$\|\nabla u_\varepsilon^-\|_p^p = \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon^-|^p dx \leq 0 \rightarrow \|\nabla u_\varepsilon^-\|_p = 0$$

entonces

$$\nabla u_\varepsilon^- = 0 \quad \text{c.s. en } \Omega^-$$

Luego será $\nabla u_\varepsilon^- = 0$ c.s. en Ω .

como

$$\|u_\varepsilon^-\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u_\varepsilon^-\|_p = 0 \quad \text{c.s. en } \Omega$$

Luego $u_\varepsilon^- = 0$ c. s en Ω .

Como $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^- = u_\varepsilon^+ \geq 0$ c. s en Ω (27)

Luego $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil de (2), además de la hipótesis (f_0) y (i) y el principio del máximo obtenemos $u_\varepsilon > 0$

Luego sustituyendo por $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+$ en (25) tenemos

$$i) u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$ii) M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_\varepsilon^\alpha v dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v dx$$

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(28)$$

Por tanto u_ε es solución débil del problema (2).

5.4 PASAJE AL LIMITE: SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (1)

Demostración del teorema 5.1

Por el lema 5.1, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_\varepsilon > 0$ en Ω

que es la solución débil del problema (2). Además, procediendo similarmente, como la obtención de la acotación para $(u_{m\varepsilon})$ dada en (pág. 52-53)

resulta:

$$\|u_\varepsilon\|_{1,p} \equiv \|u_\varepsilon\| \leq c \dots\dots\dots (29)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y $u_{\frac{1}{n}} \equiv u_n$, donde es solución débil del problema perturbado.

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \Delta_p u_n = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} (u_n^+)^{\alpha} + f(x, u_n, \nabla u_n) \\ u_n > 0 \quad \quad \quad \text{en } \Omega \\ u_n = 0 \quad \quad \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Obtenida en el lema 5.1.

Por la inmersión continua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$ existe c_α tal que

$$\|u_n\|_{\alpha+1} \leq c_\alpha \|u_n\|_{1,p} \leq c_\alpha c_x \dots\dots\dots (30)$$

Observe que $c_\alpha \cdot n \cdot c_x$ depende de n .

Como $f(x, u_n, \nabla u_n) > 0$, $u_n > 0$ se tiene de (3)

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \Delta_p u_n \geq \left(\int_{\Omega} u_n^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} u_\varepsilon^\alpha \dots\dots\dots (31)$$

Pero de (30), para $0 < \varepsilon < 1$

$$0 < \int_{\Omega} u_m^{\alpha+1} dx + \varepsilon \leq (c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + \varepsilon < (c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + 1$$

Lo que implica

$$\left(\int_{\Omega} u_m^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} > \left[(c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + 1 \right]^{-\beta} =: K > 0 \dots\dots\dots (32)$$

Luego de (31) y (32).

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \Delta_p u_m \geq K u_m^\alpha \dots\dots\dots (33)$$

Observe aquí que cualquier $K' > 0$ tal que $K' \leq K$ satisficiera (33).

Con la finalidad de usar un criterio de comparación (para poder analizar el termino no local sin dificultad) hallaremos una solución $\underline{v}$ del problema auxiliar.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx\right) \Delta_p v = K v^\alpha & \text{en } \Omega \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (34)$$

Vale la pena observar que este problema admite solución $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $v > 0$ en Ω para $\alpha > 1$, que puede ser obtenida, por ejemplo, minimizando el funcional $J: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (que es de clase C^1)

$$J(v) = \frac{1}{p} \widehat{M}\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx\right) - \frac{K}{\alpha+1} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx$$

Donde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$

Para construir la subsolución $\underline{v}$ de (34), proponemos $\underline{v} = t\varphi_1$

Para algún $t > 0$ y φ_1 es la primera autofunción del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p z = \lambda |z|^{p-2} z & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Sabemos que

ver [30]

- i) $\varphi_1 > 0$ en Ω
- ii) $\varphi_1 \in C^{1,r}(\overline{\Omega})$
- iii) φ_1 puede normalizarse $\|\nabla \varphi_1\|_p = 1$.

Sea también λ_1 el correspondiente autovalor.

Para determinar t , de la condición de ser subsolucion $\underline{v}$ se tiene:

$$-M\left(t^p \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p dx\right) \Delta_p (t\varphi_1) \leq K (t\varphi_1)^\alpha$$

Luego

$$M(t^p \lambda_1) t^{p-1} \lambda_1 \varphi_1^{p-1} \leq K t^\alpha \varphi_1^\alpha$$

$$\rightarrow m_1 \lambda_1 \varphi_1^{p-1-\alpha} t^{p-1-\alpha} \leq K$$

Esto es

$$0 < t \leq \left(\frac{K}{m_1 \lambda_1 \phi_1^{p-1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p-1-\alpha}}$$

Así para t en este intervalo $\underline{v} = t\phi_1$ es subsolución del problema (34), esto es

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^p dx \right) \Delta_p \underline{v} \leq K \underline{v}^\alpha \dots\dots\dots (35)$$

Por otro lado, de (31) y (32):

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \Delta_p u_m \geq K u_m^\alpha \dots\dots\dots (36)$$

Restando (35) y (36), usando luego $w = (\underline{v} - u_m)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^p dx \right) |\nabla \underline{v}|^{p-2} \nabla \underline{v} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \right] \cdot \nabla w dx \\ & \leq K \int_{\Omega} (\underline{v}^\alpha - u_m^\alpha) w dx \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

Supongamos, por contradicción, que $\Omega^+ = \{x \in \Omega : \underline{v}(x) > u_m(x)\} \neq \emptyset$

De (37) y la monotonía del operador $-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u$ resulta

$$\begin{aligned} c_p \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|_p^p & \leq K \int_{\Omega^+} (\underline{v}^\alpha - u_m^\alpha) (\underline{v} - u_m)^+ dx \leq K \int_{\Omega^+} ((\underline{v} - u_m)^+)^{\alpha+1} dx \leq K c_\alpha \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|_p^{\alpha+1} \\ \Rightarrow (c_p - K c_\alpha) \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|^{p-(\alpha+1)} & \leq 0 \end{aligned}$$

Luego, tomando K suficientemente pequeño, obtenemos $(\underline{v} - u_m)^+ = 0$ y así $\underline{v} \leq u_m$ en Ω^+ , lo que es una contradicción, por tanto $\Omega^+ = \emptyset$ y así

$$0 < t d_\Omega(x) < t\phi_1(x) < \underline{v}(x) \leq u_m(x), \quad c.t.p \ x \in \Omega \dots\dots\dots (38)$$

$$\text{donde } d_\Omega(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

Observe que haciendo $I_n = \int_{\Omega} u_n^{\alpha+1}$, tenemos por (38)

$$\begin{aligned} (u_n(x))^{\alpha+1} &\geq c_0 > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} I_n &= \int_{\Omega} \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx \geq \frac{c_0 |\Omega|}{\alpha+1} \end{aligned}$$

Luego

$$0 < \left(\frac{1}{\alpha+1} I_m + \frac{1}{m} \right)^{-\beta} \leq \left(\frac{c_0 |\Omega|}{\alpha+1} \right)^{-\beta} \equiv K_0$$

Visto estas estimaciones preliminares, vayamos a la convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

De principio, por (29) y de la reflexividad de $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtenemos, una subsucesión de (u_n) que seguiremos denotando con (u_n) , tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots (39)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \dots\dots\dots (40)$$

$$u_n \rightarrow u(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \dots\dots\dots (41)$$

Además de (38) se tiene

$$\begin{aligned} u(x) &\geq v(x) > 0, \text{ c.t.p. } x \in \Omega \dots\dots\dots \\ (42) \end{aligned}$$

y de (40)

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ en } L^{\alpha+1}(\Omega) \quad (\text{pues } \alpha+1 < p < p^*) \dots\dots\dots \\ (43) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\Omega} u_n^{\alpha+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} u^{\alpha+1} = I \dots\dots\dots \\ (44) \end{aligned}$$

También de (38)

$$\begin{aligned} I_n &\geq c_0 > 0 \Rightarrow I \geq c_0 > 0. \dots\dots\dots \\ (45) \end{aligned}$$

De (44) y (45), observando que por el teorema de convergencia dominada

$$\int_{\Omega} u_n^{\alpha} \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Obtenemos

$$\left(\frac{1}{\alpha+1} I_n + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_n^{\alpha} \varphi dx \rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1} I \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots (46)$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\int_{\Omega} h(x, u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x, u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots (47)$$

Por otro lado, de la definición de solución débil en (2) haciendo $\varphi = u_n - u$

$$\begin{aligned} & M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &= \left(\frac{1}{\alpha+1} I_n + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_n^{\alpha} (u_n - u) dx + \int_{\Omega} h(x, u_n) (u_n - u) dx + \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) dx \\ &\leq K_0 \left| u_n^{\alpha} \right|_{\alpha+1} \left| u_n - u \right|_{\alpha} + \left| h(x, u_n) \right|_{\frac{p}{\gamma_1}} \left| u_n - u \right|_s + \left| g(x, u_n) \right|_{\frac{p}{\gamma_2}} \left| u_n - u \right|_q \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{p} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{\gamma_2}{p} = 1, \quad 1 < s, \quad q < p^*.$$

Luego

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0, \quad \text{Si } n \rightarrow \infty$$

Aplicando la propiedad del operador $-\Delta_p$, de ser un operador del tipo (s_+) . Ver [34]

resulta

$$u_m \rightarrow u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Procediendo similarmente a la obtención del límite (23), obtenemos

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \dots\dots$$

(48)

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} g(x, \nabla u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots$$

(49)

Tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$ en (3), usando las convergencias (46), (47), (48) y (49) obtenemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisface

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \varphi dx$$

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Esto es u es solución débil del problema (1)

5.5 UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Teorema 2.- Asume que se verifican (M_0) y (f_0) y $2 \leq p < +\infty$.

Además, supongo que

$$(M_1) \quad M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[\text{ es creciente}$$

$$(f_1) \quad (i) \exists b_3 \geq 0 \quad \text{talque} \quad (h(x, s) - h(x, t))(s - t) \leq b_3 |s - t|^p \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

c.t.p $x \in \Omega$

$$(ii) \exists b_4 \geq 0 \quad \text{talque}$$

$$|g(x, \xi) - g(x, \eta)| \leq b_4 |\xi - \eta|^{p-1}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \quad \text{c.t.p } x \in \Omega$$

Entonces el problema

$$(4) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = f(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{Admite una única solución débil, si } m_0 > \left[\frac{b_3}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} + \frac{b_3}{\lambda_1} \right]$$

Donde λ_1 es el primer autovalor del operador $-\Delta_p$

Demostración. – procediendo de manera similar, como en la demostración del teorema (1), obtenemos la existencia de la solución.

Para probar el resultado de unicidad requerimos de la siguiente afirmación.

Afirmación: El operador $T : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p}(\Omega)$

definido por:

$$\langle Tu, v \rangle = M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

es monótono.

En efecto, sean $L : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por

$$L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{y} \quad \phi(u) = \frac{1}{p} \tilde{M}_1(L(u)), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\text{donde} \quad \tilde{M}(t) = \int_0^t M(s) ds, \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{Luego, obtenemos} \quad \langle L'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{y}$$

$$\langle \phi'(u), v \rangle = M(L(u)) \langle L'(u), v \rangle = M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle Tu, v \rangle$$

En consecuencia $\phi' = T$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$

Luego, bastará analizar las propiedades de ϕ' para determinar las propiedades de T .

Se tiene:

a) L es estrictamente convexo.

En efecto de la desigualdad

$$\left| |\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta, \xi - \eta \right| \geq c_p |\xi - \eta|^p, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m \quad p \geq 2$$

Resulta

$$\langle L'(u) - L'(v), u - v \rangle = p \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx$$

$$\geq p c_p \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^p dx > 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \neq v$$

$$\text{Luego} \quad \langle L'(u) - L'(v), u - v \rangle > 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \neq v$$

En consecuencia, por proposición 25.10 [36], L es estrictamente convexo.

b) ϕ es estrictamente convexo.

En efecto, como M es creciente, $\tilde{M}$ es convexo en $[0, +\infty[$.

Luego, para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y $u \neq v$ y $s, t \in]0, 1[$, con $s + t = 1$ resulta $\tilde{M}(L(su + tv)) < \tilde{M}(sL(u) + tL(v)) \leq s\tilde{M}(L(u)) + t\tilde{M}(L(v))$

y así $\phi = \frac{1}{p}\tilde{M}$ es estrictamente convexo.

En consecuencia, de a) y b) aplicando nuevamente la proposición 25.10 [36] resulta que ϕ' es estrictamente monótono, y por tanto T lo es.

Retomando a la prueba de unicidad, definamos:

$$S : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \quad \text{dado} \quad \text{por}$$

$$\langle Su, v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

De la condición (f_1) resulta que S está bien definido.

Así podemos reescribir el problema (3), como $(T - S)u = 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Para demostrar la unicidad, bastará probar que $T - S : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ es inyectiva.

Sean u_1 y $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dos soluciones de (3) tal que $(T - S)(u_1) = (T - S)(u_2)$.
Luego

$$\langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle Su_1 - Su_2, u_1 - u_2 \rangle \quad (4.1)$$

Aplicando Lema 3 de [35], las hipótesis (M_1) y (f_1) , (4.1) y la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned} m_0 \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx &\leq \langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle Su_1 - Su_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\leq \int_{\Omega} (f(x, v_1, \nabla u_1) - f(x, v_2, \nabla u_2))(u_1 - u_2) dx \\ &\leq \int_{\Omega} h(x, u_1) - h(x, v_2) \cdot (u_1 - u_2) dx + \int_{\Omega} |g(x, \nabla u_1) - g(x, \nabla v_2)| (u_1 - u_2) dx \\ &\leq b_3 \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^p dx + b_4 \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{p-1} |u_1 - u_2| dx \\ &\leq b_3 \frac{1}{\lambda_1} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p + b_4 \left[\frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^p dx \right] \\ &\leq \left(\frac{b_3}{\lambda_1} + \frac{b_4}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} \right) |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p \end{aligned}$$

Luego

$$\left\{ m_0 - \left[\frac{b_3}{\lambda_1} + \frac{b_4}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} \right] \right\} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p \leq 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

La hipótesis el termino entre llaves es positiva, y así resulta $|\nabla u_1 - \nabla u_2|_p = 0$

Lo que implica $u_1 = u_2$

CONCLUSIONES

Del proceso de solución del problema podemos extraer las siguientes conclusiones.

1.- Se demostró la Existencia del problema (1), para ello se consideró una ecuación auxiliar (2) el cual expresó en su forma variacional para encontrar la solución débil utilizando el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita.

2.- Se demostró la unicidad de la solución del problema auxiliar (2) y como consecuencia la unidad de solución del problema (1)

3.- El teorema del ángulo agudo, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la desigualdad de Tartar y las propiedades del Análisis Funcional fueron los pilares para encontrar la solución débil de (1)

4.- La presente investigación nos permitió obtener las siguientes conclusiones

- La solución del problema planteado (1) está en el universo de los espacios $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$ y es positiva
 - para encontrar la solución del problema (1) se consideró una base, luego se obtuvo espacios de dimensión finita a través de las cuales se aproximó a la solución
- 5.- Considero que la metodología que se utilizó en la resolución de existencia y unicidad puede utilizarse en futuras investigaciones similares al problema (1) y que involucren el operador P-Laplaciano

REFERENCIAS BIBLIOGRAFIA

- [1] Adams, R. , Fourier, J. ; sobolev space. Elsevier. second edition (2003)
- [2] CO. Alves, F.J.S.A. Correa and T.F Ma, 'Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type', Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.
- [3] CO. Alves and F.J.S.A. Correa, 'On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator', Comm. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001), 43-56
- [4] Burger, Raimud. Ecuaciones Diferenciales Parciales. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Concepción 2021
- [5] Benboubker, M.; Azroul, E.; Barbara, A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growth. Electron. J. Differ. Equ. 2011,
- [6] Brezis H. Analyse fonctionnelle, Theorie et Applications. Collection Mathematiques Appliquées Pour la Maitrise. Masson (1987)
- [7] E. Cabanillas L. §, Luis Z. Huaranga M. A nonlocal $p(x)$ & $q(x)$ elliptic transmission problem with dependence on the gradient. International Journal of Applied Mathematics. Volume 34 No. 1 2021, 93-108
- [8] F. J. S. A. Corrêa, R.G. Nascimento, On the Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic Equation with a p Kirchhoff-Type Term, Int. J. Math. Sc. (2008) Article ID 364085 doi:10.1155/20
- [9] F. J.S.A. Correa, On an Elliptic Equation Involving a Kirchhoff Term and a Singular Perturbation *The Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon S* Volume 14, Number 1 (2007), 15-24.
- [10] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, On an Elliptic equation of p -Kirchhoff type via variational methods, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006) 263”
- [11] F.J.S.A. Correa & S.D.B. Menezes, Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method, Electronic Journal of Differential Equations, (2004), 1-10.
- [12] F.J.S.A. Correa and G. M. Figueiredo, 'On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration method', Bound. Value Probl. (to appear)
- [13] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhauser Advanced Texts, 2000.
- [14] M. Chipot & B. Lovat, On the asymptotic behavior of some nonlocal problems, Positivity, 3(1999), 65-81.

- [15] J. Chabrowski and J. Yang, 'Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponents', *Adv. Differential Equations* 2 (1997), 231-25
- [16] Dumitru Motreanu, Viorica v. Motreanu and Nikolaos S. Papageorgiou.
Multiple constant sign and nodal solutions for nonlinear Neumann eigenvalue problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)* Vol. X (2011), 729-755
- [17] Furter J., and Grinfeld M., Local vs. nonlocal interactions in population dynamics, *J. Math. Biol.*, 27 (1989), 65–80.
- [18] D.G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, *Lecture Notes in Mathematics*, 957, Springer-Verlag, (1982).
- [19] Fan, X.; Zhao, D. A class of De Giorgi type and Hölder continuity. *Nonlinear Anal.* 1999, 36, 295–318.
- [20] Gatica Gabriel Introducción al análisis funcional: Teoría y aplicaciones. Editorial reverté. España (2014)
- [21] Gatica, Massiel. Espacio de funciones: Una introducción a los espacios de Sobolev. Tesis (2011).
- [22] Ge S. , Yuan R., Zhang X. , Global existence, blow-up and dynamical behavior in a nonlocal parabolic problem with variational structure , *Nonlinear Anal. Real World App.* 76 (2024) 104007
- [23] [26] . Ho, K.; Sim, I. A-priori bounds and existence for solutions of weighted elliptic equations with a convection term. *Adv. Nonlinear Anal.* 2017, 6, 427–445.
- [24] N.I. Kavallaris, T. Suzuki, On the dynamics of a non-local parabolic equation arising from the Gierer–Meinhardt system, *Nonlinearity* 30 (2017) 1734–1761, <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6544/aa64b2>
- [25] Keener J 1978 Activators and inhibitors in pattern formation *Stud. Appl. Math.* 59 1–23
- [26] Kreyszig, Erwin. *Introductory functional analysis with applications.* Copyright © 1978, by John Wiley & Sons. Inc.
- [27] Kirchhoff; *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883
- [28] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [29] [12] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Instituto de Matematica, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (1978)
- [30] P. Lindqvist, On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0$, *Proc. Amer. Math. Soc.* Volume 109, Number 1, 157-164, May 1990.
- [31] C. Liu , J. Wang and Q. Gao , Existence of nontrivial solutions for p-Kirchhoff type equations, *Bound. Val. Prob.* (2013) 2013-279
- [32] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. Espacos de Sobolev, *Iniciacao aos*

- problemas elipticos noa Homogeneos. Rio de Janeiro RJ 1999.
- [33] Motreanu, D. Quasilinear Dirichlet problems with competing operators and convection. Open Math. 2020, 18, 1510–1517
 - [34] Ni W-M 2011 The Mathematics of Diffusion (CBMS-NSF Series) (Philadelphia: SIAM)
 - [35] Y. Yang, J. Zhang, Existence results for a class of nonlocal problems involving p-Laplacian, Bound Val. Prob.(2011) 11-32.
 - [36] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its application, Vol. II/B, Berlin-Heidelberg- New York, 1990

TESIS LUQUE RIVERA

INFORME DE ORIGINALIDAD

20%

INDICE DE SIMILITUD

19%

FUENTES DE INTERNET

4%

PUBLICACIONES

6%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net	Fuente de Internet	9%
2	repositorio.uns.edu.pe	Fuente de Internet	2%
3	repositorio.unsch.edu.pe	Fuente de Internet	2%
4	cybertesis.unmsm.edu.pe	Fuente de Internet	1%
5	repositorio.unac.edu.pe	Fuente de Internet	1%
6	Submitted to Unviersidad de Granada	Trabajo del estudiante	1%
7	arxiv.org	Fuente de Internet	1%
8	www.cartagena99.com	Fuente de Internet	<1%
9	Vigo Ingar, Katia. "Estudio local de la ecuacion de Korteweg-De Vries modificada II.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020	Publicación	<1%
10	Submitted to Universidad Nacional del Santa	Trabajo del estudiante	<1%
11	apjm.apacific.org	Fuente de Internet	<1%
12	idus.us.es	Fuente de Internet	<1%
13	www.mtm.ufsc.br	Fuente de Internet	<1%
14	Submitted to Universidad de Málaga	Trabajo del estudiante	<1%

DEDICATORIA

A mis padres Julián y Victoria, a mis abuelos Elías y María quienes con su inquebrantable apoyo me enseñaron que los sueños se alcanzan con sacrificio, esfuerzo, determinación y fe. Elevo mi gratitud y agradecimiento a ustedes donde quiera se encuentren

AGRADECIMIENTO

Hoy, al finalizar este capítulo tan importante de mi vida, no puedo evitar mirar hacia atrás y sentir una profunda gratitud hacia todas las personas que, de una u otra manera, me acompañaron, me impulsaron y me sostuvieron en este largo y desafiante camino. Este logro no es solo mío; es el reflejo del amor, el sacrificio y el apoyo de quienes nunca dejaron de creer en mí, a ellos quiero expresar mi más profundo agradecimiento.

Agradecer a todos mis maestros de pregrado y posgrado con quienes compartí y aprendí mucho de ellos, de manera especial quiero agradecer al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, por sus enseñanzas y sugerencias, su experiencia y consejos han sido de muchísima importancia para terminar esta tesis. Asimismo, mi agradecimiento y gratitud a mi asesor Dr. Juan Heron Morales Marchena por su dirección y sugerencias, también agradecer todos los docentes de la universidad Nacional del Santa con quienes compartí y recibí sus enseñanzas.

A mi esposa Silvia y mis hijos Jesús, Valeri y Sergio, quienes con su amor y comprensión llenaron de alegría y esperanza este camino. Sus sonrisas, sus palabras y su paciencia me dieron la energía que necesitaba para seguir adelante, incluso cuando parecía imposible. Ustedes son mi mayor inspiración y mi razón para nunca rendirme.

Un homenaje póstumo a mis padres Julián y Victoria y a mi tía Adelaida, elevo mi agradecimiento y gratitud a ustedes donde se encuentren, gracias por todo apoyo, a pesar de las dificultades que hemos pasado junto con mis hermanos Cesar y Dina.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional del Santa, por brindarme el apoyo necesario para desarrollar esta investigación, así como a todos aquellos que, de una u otra manera, contribuyeron a la realización de este proyecto.

INDICE

CAPITULO I

RESUMEN	1
ABSTRACT	2

CAPITULO II

2.- PLAN DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Planteamiento y fundamentación del problema de Investigación	3
2.2 Antecedentes de la Investigación	5
2.3 Formulación del Problema de Investigación	6
2.4 Delimitación del Problema	7
2.5 Justificación e importancia de la investigación.....	7
2.6 Objetivos de la Investigación.....	8
2.6.1 Objetivo general	8
2.6.2 Objetivo específico.....	9

CAPITULO III

MARCO TEORICO

3. MARCO CONCEPTUAL.....	10
3.1 Espacio de las Funciones continuas	10
3.2 Espacio de funciones de Prueba	11
3.3 Espacio de Banach, Espacios con Producto Interno y espacios de Hilbert	13
3.4 Isomorfismo E Isometría	15
3.5 Desigualdad de Cauchy- Schwarz, inmersión compacta Base Hilbertiana	16
3.6 Espacios Reflexivos, Espacios Separables, Espacios L_p	18
3.6.1 Espacios Reflexivos.....	18
3.6.2 Espacios Separables.....	19
3.6.3 Espacios L_p	19
3.7 La Integral de Lebesgue.....	22
3.8 Distribuciones	25
3.9 Convergencia en $D(\Omega)$	26
3.10 Derivada de una Distribución	28
3.11 Espacios de Sobolev	29
3.11.1 El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$	31
3.11.2 Inmersiones de los espacios $W^{m,p}(\Omega)$	33

3.12 Partes positiva y negativa de una función	34
3.13 Principio del Máximo	36
3.14 Principio del máximo débil	37
3.15 Teoremas de la Divergencia y Formulas de Green	39
3.16 Teorema (Formula de Green)	39

CAPÍTULO IV

4. METODOLOGIA DE LA

INVESTIGACIÓN.....41

4.1 Hipótesis Central de la Investigación.....	41
4.2 Variables E Indicadores de la investigación.....	42
4.2.1 Variable Independiente	42
4.2.2 Variable dependiente	42
4.3 Métodos de la Investigación	42
4.4 Diseño o esquema de la Investigación.....	43
4.5 Población o Muestra	43
4.6 Actividades del Proceso Investigativo	43
4.6.1 Fase Inicial	43
4.6.2 Fase Intermedia	43
4.6.3 Fase Final	44
4.7 Técnicas e Instrumentos de la Investigación	44
4.8 Procedimiento para la recopilación de datos.....	44
4.9 Técnicas de procesamiento y análisis de datos	44

CAPITULO V

5. RESULTADOS Y DISCUCIÓN 45

5.1 “Existencia y unicidad de solución para una ecuación p-laplaciano del tipo kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente”	46
--	----

CONCLUSIONES 73

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS..... 74

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla el estudio de la existencia de solución de una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local especial $\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$ y una convección (termino que contiene a la gradiente) $f(x,u,\nabla u)$, que está asociado al modelo de Gierer- Meinhardt que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibor. En este trabajo se aplica el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita, con el objetivo de demostrar la existencia de solución débil aplicaremos el teorema del ángulo agudo como una herramienta matemática fundamental. Para abordar este trabajo consideramos $\Omega \subseteq R^n$ un abierto acotado, con frontera suave, M una función continua, f una función convenientemente definida para el objetivo de nuestro trabajo, $1 < p < N$, y $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x,u,\nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Palabras Clave:

Ecuación del tipo p- Kirchhoff, solución débil, método de Galerkin, teorema del punto fijo.

ABSTRACT

In this work we will study the existence of a solution of a P-Kirchhoff type equation with a special non-local $\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$ source term and a convection (term containing the gradient) $f(x, u, \nabla u)$, which is associated with the Gierer-Meinhardt model that studies the associated “Shadow System”, through a large diffusion of the inhibitor. In our work we will apply the Galerkin method, which in quick terms consists of approaching the solution of the problem through finite-dimensional spaces for which we will use the acute angle theorem to find the existence of a weak solution. To approach this work we consider $\Omega \subset R^n$ a bounded open set, with smooth boundary, M a continuous function, f a function conveniently defined for the purpose of our work,

$$1 < p < N, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Keywords:

p-Kirchhoff type equation, weak solution, Galerkin method, fixed point theorem

CAPITULO II

2. PLAN DE LA INVESTIGACION

2.1 Planteamiento y fundamentación del problema de Investigación

Durante la última década, el estudio de los sistemas elípticos no locales del tipo Kirchhoff ha generado un gran interés en el ámbito de la investigación matemática. Este interés se remonta, después de los trabajos de Lions [29], debido a que dichos modelos permiten representar una amplia variedad de fenómenos y situaciones físicas presentes en las Ciencias y la Ingeniería. Asimismo, su naturaleza no local introduce importantes dificultades analíticas, por lo que su tratamiento requiere el empleo de herramientas matemáticas avanzadas. En este contexto, diversos autores han desarrollado investigaciones orientadas al análisis de estos modelos, entre los cuales destacan [2], [9], [11], [12] [14] y [18], con diversas técnicas. El modelo clásico Kirchhoff ha sido generalizada al contexto del operador P - Laplaciano, dando lugar a una clase de problemas no locales de tipo P-Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\right)^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ suave

$$-\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Este tipo de ecuaciones a sido estudiados por [8], [10], [31], y [35].

En diversos campos de la ciencia como la ingeniería, Astronomía, la Glaciología,
la Climatología, la dinámica de fluidos no newtonianos y los procesos asociados a
la extracción de petróleo, el operador del tipo P- Kirchhoff tiene sus aplicaciones.

En nuestro trabajo estudiaremos la siguiente ecuación que involucra el operador Δ_p P- Laplaciano

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Que contiene un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [24], [22] que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener [25] para analizar el comportamiento cualitativo de reacción- difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” está formado por una ecuación de reacción - difusión acoplada con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión original [34].

Por otro lado, a nuestro conocimiento, los términos no locales fueron inicialmente introducidas en modelo biológicos de dinámica de poblaciones [17]

En estos modelos, la presencia del término no local significa en general que el efecto de la variable depende no solo de su propia posición en el espacio, si no de su valor medio (promedio) en el dominio de definición.

Como es sabido, el termino de convección (termino que contiene al gradiente) representa el transporte o movimiento de una cantidad (como calor, masa o momento) debido al movimiento masivo de un fluido o material. Este término está abocado al fenómeno de la convección, que consiste en la transferencia de una propiedad por el movimiento del fluido o material en sí.

La presencia de este término hace que el problema (1) sea no variacional, por lo que no es posible aplicar, al menos directamente, las técnicas del cálculo variacional tales como el Teorema del paso de la Montaña, minimización directa vía el teorema de Weierstrass o el Principio de Ekeland, por lo que aplicaremos el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de

espacios de dimensión finita. Así esta no linealidad (que contiene al gradiente) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo, en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos [23] y [33]

2.2 Antecedentes de la Investigación

La ecuación de Kirchhoff

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que apareció en 1883 [10], extiende el modelo para las pequeñas oscilaciones de una cuerda, realizado por D'Alembert, donde se considera el alargamiento de la cuerdas al vibrar.

Mas adelante Lions [28] generalizó este modelo, dando lugar su alcance a una formulación más amplia dentro del marco de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

$$u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f \text{ en } \Omega \times]0, \infty[$$

El siguiente modelo asociado a esta ecuación esta descrita por

$$\begin{cases} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Numerosos autores e investigadores han abordado el estudio de estos modelos, entre los cuales cabe mencionar [2], [9], [11], [12] [14] y [18], con diversas técnicas. La ecuación de Kirchhoff ha sido generalizada en décadas recientes, a una ecuación denominada del tipo P-Kirchhoff

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\partial\Omega$

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas y $\Delta_p u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ este tipo de ecuaciones han sido estudiados por

diversos autores como [8], [10], [31], y [35]. La generalización está relacionada con el hecho de que el operador P- Laplaciano Δ_p aparece en la descripción de fenómenos físicos, en diversas ramas de la ciencia.

Nuestro trabajo aborda un modelo P-Kirchhoff con un término no local especial, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que consideramos nuestro estudio como aporte al avance en el área de las ecuaciones diferenciales parciales.

$$\left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Nuestra ecuación contiene, un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [22] [24], que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener [25] para analizar el contexto cualitativo de los sistemas de reacción- difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande.

2.3 Formulación del Problema de Investigación

En este problema estudiamos y analizamos una **ecuación elíptica del tipo p-kirchhoff que incluye un término de difusión**, cuya presencia permite considerar los efectos asociados a la propagación o dispersión en la dinámica descrita por el modelo.

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

En el presente trabajo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciaran a seguir.

Dentro del contexto de nuestro trabajo, nos formulamos la siguiente cuestión fundamental: ¿existe una única solución débil del problema (1) representada por la función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$?

En este trabajo no implementaremos solución numérica o algún software para encontrar una solución aproximada, pero si una técnica variacional de Galerkin.

2.4 Delimitación del Estudio

Teniendo en cuenta que la ecuación (1) es del tipo P- Kirchhoff ahora restringiremos nuestra formulación variacional (de la solución débil) al espacio $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m] \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Por lo que queremos determinar

$$u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución del sistema aproximado (S.A)}$$

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_i dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{\alpha} w_i dx - \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_i dx, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

La existencia de una solución débil de (1) se encuentra el espacio Banach separable $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^{\alpha} u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

2.5 Justificación e Importancia de la Investigación

Los sistemas elípticos no locales, también llamados ecuaciones de Kirchhoff, son de gran importancia porque modelan diversos fenómenos físicos en Ciencia, Ingeniería y tecnología, por ejemplo, como modelos de difusión de especies o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio: desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones.

En este trabajo consideramos una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local especial y un término que contiene la gradiente.

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \left(\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy\right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x,u,\nabla u)$$

asociado al modelo de Gierer-Meinhardt que estudia el “Sistema de Sombra”. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Keener para describir el comportamiento cualitativo de los sistemas de reacción-difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” está formado por una ecuación de reacción - difusión acoplado con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión.

En este trabajo abordamos un modelo del tipo P-Kirchhoff con un término no local especial y un término que contiene la gradiente, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que un desarrollo didáctico de este trabajo permitirá entender y explicar la metodología usada en la resolución del problema planteado.

2.6 Objetivo de la investigación

2.6.1 Objetivo General

Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \left(\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy\right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x,u,\nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave
 $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones
que se enunciaran a seguir

2.6.2 Objetivo Específico

1.- Demostrar la existencia de la solución del problema auxiliar problema
(2), aplicando el método de Galerkin

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} (u^+)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $u^+ = \max \{u(x), 0\}$, y encontraremos la solución no trivial de (2)
utilizando el teorema del ángulo agudo y el teorema de la convergencia
dominada de Lebesgue.

2.- Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema (1)
definimos

$u^- = \max \{-u(x), 0\}$. Luego $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y mostramos que

$$u^- = 0 \text{ c. s en } \Omega.$$

Por tanto $u = u^+ - u^- = u^+ > 0$ c. s en Ω .

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ Será la solución débil de (1)

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

En este capítulo consideramos las notaciones, resultados de proposiciones y teoremas importantes que utilizaremos en la demostración de nuestro resultado principal, para el cual se utilizará el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita. El término que contiene al gradiente en (1) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo, en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos.

En la demostración del problema (1) abordaremos, la integral de Lebesgue, los espacios reflexivos, espacios separables, los espacios L^p , isomorfismo e isometría, espacios de Sobolev, inmersiones continuas y compactas, principio del máximo débil, desigualdad de Tartar, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue teorema de la divergencia y formulas y teorema del ángulo agudo.

3. MARCO CONCEPTUAL

3.1 ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Definición 1. Consideremos a K para referirnos al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ dependiendo en que contexto estamos. Por $\mathbb{N}$ representamos el monoide de los números naturales y por $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros.

Dado: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in K^n$

Se define $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ y $z^\alpha = (z_1^{\alpha_1}, z_2^{\alpha_2}, z_3^{\alpha_3}, \dots, z_n^{\alpha_n})$

Por D^α denotamos al operador de derivación de orden α definido por

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_n^{\alpha_n}$$

Observación:

- i. Para $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^\alpha u = u$ para toda función u .
- ii. Por D_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
- iii. Si α y $\beta \in \mathbb{N}^n$ escribimos $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cuando u y v son funciones numéricas suficiente derivables, se tiene la regla de Leibniz

$$D(uv) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha^{|\alpha|}}{\beta_i(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

3.2 ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, una función real u definida en Ω es denominada función de prueba en Ω si u es de clase C^∞ en Ω y es nula fuera del compacto de Ω . Con el símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ se representa el espacio de las funciones de prueba en Ω

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ tiene derivadas parciales de cualquier orden y existe un compacto } K_u \subset \Omega \text{ tal que } u(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus K_u \right\}$$

Suporte de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $\text{sup } u$, el cual se define

$$\text{sup } u = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$$

Definición 2. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y consideremos $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos con $C^0(\Omega)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$. Luego se consideran los siguientes subespacios de $C^0(\Omega)$:

$$C^m(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega); D^\alpha \varphi \in C^0(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega); \text{soporte de } \varphi \text{ es compacto en } \Omega\}$$

$$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap \{u / \text{sopp}(u) \text{ es compacto, } \text{sopp}(u) \subseteq \Omega\}$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

Sobre $C^\infty(\Omega)$ se define la norma de convergencia uniforme, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Definición 3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $m \in \mathbb{N}$. se designa con $C^0(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas que son acotadas y uniformemente continuas en Ω .

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}); D^\alpha \varphi \in C^0(\bar{\Omega}), \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega})$$

$$C_0(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}); \text{soporte de } \varphi \text{ es compacto en } \bar{\Omega}\}$$

$$C_0^m(\bar{\Omega}) = C^m(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

Donde: $\bar{\Omega}$ es la clausura de Ω .

Proposición 1. El espacio vectorial $C^m(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach con

$$\text{la norma } \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Proposición 2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$

Demost. Ver [30] página. 10

3.3 ESPACIOS DE BANACH, ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y ESPACIOS DE HILBERT.

Enunciaremos las proposiciones y teoremas importantes de los espacios de Banach, espacios con producto interno y los espacios de Hilbert.

Definición 4. Sea E un espacio normado, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en E y $u \in E$. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $u \in E$ cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$

Proposición 3. Sean $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en el espacio vectorial E y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en el cuerpo K . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow u$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow v$ y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha$, entonces

- (i) $(\alpha_n u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha u + v$
- (ii) $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$
- (iii) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|u_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- (iv) Si E es un espacio con producto interno, entonces
$$\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$$

Definición 5. Una sucesión de vectores $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio normado E es denominado una sucesión de Cauchy de E cuando $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$

Proposición 4. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy

Proposición 5. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy del espacio normado E . Entonces

- (i) Existe $c > 0$ tal que $\|u_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- (ii) Si existe una subsucesión de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para un vector $u \in E$ entonces $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $u \in E$

Definición 6. Sean E y F espacios normados y D un subconjunto no vacío de E la aplicación $A: E \rightarrow F$. Se dice que es continua en $u \in D$ cuando para todo

$\varepsilon > 0$ Existe $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que si $v \in D$ y $\|u - v\| \leq \delta$ entonces
$$\|Au - Av\| \leq \varepsilon$$

Proposición 6. A es continua en $u \in D$ si y solo si para toda sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores en D convergentes para $u \in D$ se tiene que la sucesión $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para Au

Proposición 7. Sean E y F espacios normados, D un subespacio vectorial de E y $A: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes

- (1) A es continua en 0 .
- (2) Existe $c > 0$ tal que $\|Au\| \leq c\|u\|$ para $u \in D$.
- (3) A es uniformemente continua.

Definición 7. Sea X un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. La **distancia asociada a la norma** se define por $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$. Lo cual es una métrica. La topología asociada a la norma es la **topología del espacio métrico inducida por la distancia d** .

La función $f: X \rightarrow Y$ es continua en un punto $a \in X$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Diremos que un espacio normado X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X ; es decir,

$$\forall (x_n) \subset X, \left[\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 \right] \Rightarrow \left[\exists x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right].$$

Todo espacio completo es un espacio de Banach.

Observación:

Dado los espacios vectoriales X e Y sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Una aplicación $T: X \rightarrow Y$ es llamado **operador lineal** si, para cualesquiera $x, z \in X$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\boxed{T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z).}$$

3.4 ISOMORFISMO E ISOMETRÍA

Definición 8. Sean los espacios normados X e Y , un isomorfismo es una aplicación lineal y biyectiva $T: X \rightarrow Y$ tal que T y T^{-1} son continuas.

En este caso diremos que los espacios normados son isomorfos, lo cual denotamos $X \approx Y$

La aplicación lineal $T: X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si solo si existen constantes positivas m y M tal que

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad x \in X$$

Definición 9. Una isometría entre dos espacios normados X e Y es una aplicación lineal $T: X \rightarrow Y$ que es un isomorfismo isométrico sobre su imagen tal que $\|Tx\| = \|x\|$ para $x \in X$

Definición 10. Sean espacios normados X e Y . Diremos el operador lineal

$$T: X \rightarrow Y$$

es **acotado** si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, para todo $x \in X$. El conjunto $L(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales que aplican X en Y . De la misma forma $B(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores de $L(X, Y)$ que son acotados. El espacio $B(X, Y)$ es un espacio normado y la **norma del operador** T se define por:

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

para todo $T \in B(X, Y)$.

Teorema 1. Sean los espacios normados X e Y sobre K . $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado si, solo si, T es continuo.

Definición 11. Dado los espacios normados X e Y . Se dice que X está **inmerso continuamente** en Y , y se denota por $X \hookrightarrow Y$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. X es un **subespacio vectorial** de Y .
2. El operador lineal identidad $I: X \rightarrow Y$, $I(u) = u$, definido sobre X , es continuo. Es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$, $\forall u \in X$.

Definición 12. Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, un producto escalar o producto interno definido en X es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{k}$ que verifica:

- (i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para cualquier $u, v, w \in X$.
- (ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para $u, v \in X$, y $\alpha \in \mathbb{k}$
- (iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para $u, v \in X$.
- (iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

3.5 DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ.

Dado V un espacio vectorial con producto interno.

Para vectores cualesquiera $u, v \in V$ se cumple:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Definición 13. Sea H un espacio vectorial con producto interno. Se dice que H es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la métrica inducida por el producto interno.

Definición 14. Sean X, Y dos espacios normados, se dice que existe una inmersión compacta de X en Y , el cual es denotado por $X \hookrightarrow Y$ (inmersión compacta) si:

- (a) $X \hookrightarrow Y$
- (b) $I : X \rightarrow Y$ es compacta, es decir $\forall B$ acotado $\subseteq X : \overline{I(B)}$ es compacto en Y .

Observación:

De la parte (b) se infiere que si $x_n \rightarrow x$ en X por tanto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $(x_{n_k}) \rightarrow x$ en Y .

Definición 15. Un espacio de Hilbert H dice que es separable, si existe un subconjunto $D \subset H$ denso y numerable en H .

Definición 16. (Base Hilbertiana). Sea H un espacio de Hilbert. Si H es separable, se llama base Hilbertiana (o base ortonormal) de H a toda

sucesión $(\psi_n)_{n \geq 1}$ de elementos de H , que constituye sistema completo en H y que verifica:

$$(i) \quad (\psi_n, \psi_m) = 0, \quad \forall m \neq n$$

$$\|\psi_n\| = 1$$

(ii) El espacio vectorial generado por $(\psi_n)_{n \geq 1}$ es denso en H .

Teorema 2. Todo espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana.

Teorema 3. (Teorema de representación de RIESZ)

Si f es una funcional lineal continuo definido en un espacio de Hilbert H . Entonces existe un único vector tal que $u \in H$ tal que

$$(i) \quad f(u) = \langle v, u \rangle \text{ para todo } v \in H$$

$$(ii) \quad \|f\| = \|u\|$$

Definición 17. (Formas sesquilineales). Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces una aplicación $h: H \times H_1 \rightarrow K$ se denomina forma sesquilineal si para $x, x_1, x_2 \in H$, $y, y_1, y_2 \in H_1$ y los escalares α, β se tiene:

$$(i) \quad h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$$

$$(ii) \quad h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$$

$$(iii) \quad h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$$

$$(iv) \quad h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$$

Teorema 4. (Lax - Milgram). Sea H un espacio de Hilbert y $h: H \times H \rightarrow K$ es una forma sesquilineal. Si existen $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que

$$(i) \quad c_1 \|u\|^2 \leq \operatorname{Re} h(x, x) \text{ para todo } x \in H$$

$$(ii) \quad |h(x, y)| \leq c_2 \|x\| \|y\| \text{ para todo } x, y \in H$$

Entonces existe un isomorfismo $A: H \rightarrow H$ tal que $h(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ para todo $x, y \in H$

3.6. ESPACIOS REFLEXIVOS, ESPACIOS SEPARABLES, ESPACIOS $L^p(\Omega)$

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Se designa por $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Cuando f recorre E' se obtiene una familia $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$.

Definición 20. Sea E un espacio normado y sea E' su espacio dual. La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Proposición 8. Sea (x_n) una sucesión en E . Se verifica:

- (i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle; \quad \forall f \in E']$
- (ii) Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$
- (iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$; entonces $\|x_n\|$ esta acotada y $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$ y si $f_n \rightarrow f$ fuertemente en E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$), entonces $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

3.6.1 Espacios reflexivos

Definición 21. Dado un espacio Banach diremos que es reflexivo si la inyección canónica de X en X^{**} ($x \rightarrow J_x$) es sobreyectiva, es decir, es decir $\text{Im}(J(X)) = X^{**}$

Así J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**} .

Proposición 9. Si X es un espacio normado reflexivo, entonces es un espacio de Banach [31] pág. 241

Proposición 10. Todo espacio normado X de dimensión finita es reflexivo. [31] pág. 241

Teorema 5 (espacio de Hilbert). Todo espacio de Hilbert H es reflexivo [31] pág. 242

3.6.2 Espacios separables

Definición. 22. Se dice que un espacio métrico es separable si existe un subconjunto $D \subset E$ numerable y denso.

Proposición 10. Sea E un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E . Entonces F es separable. [28] pág. 47

Teorema 6. Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable. Entonces E es separable. [28] pág. 47

Teorema 7. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión

acotada en E . Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge en la topología $\sigma(E, E')$. [28] pag. 50

Teorema 8. (Eberlein-Smulian). Sea E un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada (x_n) posee una subsucesión (x_{n_k}) convergente en la topología $\sigma(E, E')$. Entonces E es reflexivo.

[28] pág. 50

3.6.3 Los Espacios L^p

Definición 23. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Y se denota la norma por $\| \cdot \|_{L^p}$ y se define

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Definición: se define

$L^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$ y se denota la norma por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

NOTA 1.- Si $f \in L^\infty$, entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Proposición 11.

(i) $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

(ii) $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \text{Y la norma inducida es}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

[30] pág. 57

Teorema 9. Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, se tiene $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

Proposición 12. (Desigualdad de Hölder). Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$

con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

$$\int_{\Omega} |u, v| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración.- Ver[28] Pág. 56

Proposición 13. (Desigualdad de Hölder Generalizada). Sean $f_1, f_2, \dots, f_k$, funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, con $1 \leq i \leq k$, donde

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces el producto

$$f = f_1 f_2 f_3 \dots f_k \in L^p(\Omega) \text{ y}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|f_3\|_{L^{p_3}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Demostración .- Ver[28] Pág. 57

Teorema 11. (Desigualdad de interpolación). Sea $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ y se tiene

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \cdot \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

Donde

$$0 \leq \theta \leq 1 \text{ y } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

Demostración.- Ver[30] Pág. 4

Teorema 12. Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in L^p(\Omega)$ entonces $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$

Demostración.- Ver [27] Pág. 28

Teorema 13. $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Ver[28] Pág. 62.

Teorema 14(Teorema de la Representación de Riesz). Sean $1 < p < \infty$,

$\varphi \in (L^p(\Omega))'$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así existe una función única

$u \in L^q(\Omega)$ que cumple

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)},$$

Demostración. - Ver[28] Pág. 61

Proposición 14. Para $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ existe una función única

$u \in L^\infty(\Omega)$ que cumple

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver[28] Pág. 63

Proposición 15. Dado una sucesión funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en $L^p(\Omega)$ de tal que manera $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ para $f \in L^p(\Omega)$. Luego existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que:

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ c.s en Ω
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq |h(x)| \quad \forall k \in \mathbb{N}$ con $h \in L^p(\Omega)$

Teorema 16. $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.

[28] pag. 59

Teorema 17. $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

[28] pag. 60

Teorema 18. Sea $\varphi \in (L^1)'$. Entonces existe $u \in L^\infty$ única tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

[28] Brizis 63

Teorema 19. Sea $1 < p < +\infty : L^p(\Omega)$ es reflexivo.

Demostración.- Ver [28] Pág. 59

3.7 La Integral de Lebesgue

Definición 26. Dado una familia M de subconjuntos de un conjunto X diremos que es una σ -álgebra en X si M tiene las siguientes características:

1. $X \in M$.
2. Para $A \in M$, $A^c \in M$.
3. Dado $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, con $A_i \in M, i = 1, 2, 3, \dots$, así $A \in M$

Definición 27. Sea X un conjunto y M es un σ -álgebra en X entonces diremos que (X, M) es un espacio medible y a los elementos de M se llaman conjuntos medibles de X .

Definición 28. Sea M un σ -álgebra sobre X . La función $\mu: M \rightarrow [0, +\infty)$ es una medida positiva si satisface la propiedad de aditividad numerable, dado un conjunto numerable y disjunta $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 29. Dado un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de Lebesgue del subconjunto Ω , mediante:

$$m^*(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Vol(Q_n), \Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, Q_n \text{ rectángulos cerrados} \right\}$$

Observación:

$$m^*: P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\Omega \rightarrow m^*(\Omega)$$

donde $P(\mathbb{R}^n)$: es el conjunto de partes de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 20.

(i) La medida $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) Dado $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

(iii) Dado la familia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerable de conjuntos; entonces

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\Omega_n)$$

(iv) Definimos $m^*(\Omega) = \inf \{m^*(G) / G \text{ abierto } \Omega \subseteq G\}$

(v) Para Ω y para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega)$$

Definición 30. Un conjunto Ω se dice lebesgue medible, que en lo que sigue llamaremos simplemente medible, si verifica la siguiente propiedad: para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$m^*(E) = m^*(E \cap \Omega) + m^*(E - \Omega)$$

Denotemos por M a la familia de todos los conjuntos $\mathbb{R}^n$ que son medibles. Se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ a la restricción de la medida exterior m^* a M , es decir $m = m^*|_M$; se tiene así la función:

$$m : M \rightarrow [0, +\infty]$$

$$A \rightarrow m(A) = m^*(A)$$

Definición 31. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es Lebesgue medible o simplemente medible si para todo abierto A de $\mathbb{R}$, la imagen inversa

$$f^{-1}(A) = \{x \in \Omega / f(x) \in A\}$$

es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$.

Definición 32. Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Una función simple no negativa,

$$r = \sum_{i=1}^k a_i X_{A_i}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \Omega \quad \text{donde} \quad X_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \notin A_i \end{cases}$$

se define la integral de s en Ω por

$$\int_{\Omega} r = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i)$$

Definición 33. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in M$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Una función medible con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, se define la integral de f en Ω , denotada $\int_{\Omega} f$, mediante

$$\int_{\Omega} f = \sup \left\{ \int_{\Omega} s / s \text{ es una función simple, } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Ver [32]. Pág. 9, 10, 11 y 16.

Teorema 21 (Lema de Fatou). **Dado una** sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en L^1 tal que manera que

(1) Para cada $n \geq 1$, $f_n(x) \geq 0$ c.t.p en Ω

(2) $\sup_{\Omega} \int f_n \leq \infty$

Entonces $f \in L^1$ y $\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx$

Demostración.- Ver [28]. Pág. 55

Teorema 22. (Convergencia Dominada de Lebesgue). Dado una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrables. Tal que:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ c.t.p. en Ω .

ii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω entonces:

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx$$

Ver [28]. Pág. 54

3.8 Distribuciones

Definición 1. Sea K el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Por $\mathbb{N}$ representamos el monoide de los números naturales y por $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros.

Dado: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in K^n$ Se define

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{ y } z^{\alpha} = (z_1^{\alpha_1}, z_2^{\alpha_2}, z_3^{\alpha_3}, \dots, z_n^{\alpha_n})$$

Por D^{α} denotamos al operador de derivación de orden α definido por

$$D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_n^{\alpha_n}$$

Observación:

iv. Para $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^\alpha u = u$ para toda función u .

v. Por D_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

vi. Si α y $\beta \in \mathbb{N}^n$ escribimos $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cuando u y v son funciones numéricas suficiente derivables, se tiene la regla de Leibniz

$$D(uv) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha^{|\alpha|}}{\beta_i(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, una función real u definida en Ω es denominada función de prueba en Ω si u es de clase C^∞ en Ω y es nula fuera del compacto de Ω . Con el símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ se representa el espacio de las funciones de prueba en Ω

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ tiene derivadas parciales de cualquier orden y existe un compacto } K_u \subset \Omega \text{ tal que } u(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega / K_u \right\}$$

Suporte de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $\text{sup } u$, el cual se define $\text{sup } u = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$

3.9 Convergencia en $D(\Omega)$

Se dice que una sucesión $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones de $C_0^\infty(\Omega)$ es convergente para cero, cuando las siguientes condiciones se cumplen:

- i) Los soportes de todas las funciones de prueba φ_i de están contenidos en un compacto fijo K
- ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la sucesión $(D^\alpha \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para cero en K

Se dice que la sucesión $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ converge $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ cuando la sucesión $(\varphi_i - \varphi)$ converge para cero en el sentido anterior.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con esta noción de convergencia es representado por $D(\Omega)$ y es denominado el espacio de las funciones de prueba en Ω .

El espacio de distribuciones en Ω es el conjunto es el conjunto denotado por

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} / T \text{ es lineal y continua} \}$$

Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de adición y el producto de un escalar por una función;

Para $S, T \in D'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} * (S + T)(\varphi) &= S(\varphi) + T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ * (cT)(\varphi) &= cT(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ y } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En el espacio vectorial de las distribuciones $D'(\Omega)$ definimos la convergencia en el sentido distribucional: una sucesión distribuciones $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T \in D'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{R}$ para toda $\phi \in D(\Omega)$.

Ejemplo. Para cada $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. El funcional $T_u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T_u(\varphi) = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in D(\Omega)$$

Es una distribución.

En efecto, sean $\phi_1, \phi_2 \in D(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_u(\phi_1 + \beta\phi_2) &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)\phi_1(x)dx + \beta \int_{\Omega} u(x)\phi_2(x)dx \\ &= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2) \end{aligned}$$

Proposición : (Lema de Du Bois Raymond)

Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Entonces $T_u = 0$ si solo si $u = 0$ casi siempre en Ω .

Observación:

Se tiene la siguiente cadena para $1 \leq p < \infty$

$$D(\Omega) \hookrightarrow L_{Loc}^p(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

3.10 Derivada de una Distribución:

Se define como distribución sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$ que es continua en el sentido de la convergencia definida sobre $D(\Omega)$. Esto es si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $D(\Omega)$ convergente para cero en el sentido de la definición anterior entonces $(\langle T, \varphi_n \rangle)$ converge para cero en $\mathbb{R}$, donde $\langle T, \varphi_n \rangle$ el valor de T en φ_n . Se dice que la sucesión (T_n) en $D'(\Omega)$ converge para cero en $D'(\Omega)$ cuando $(\langle T_n, \varphi_n \rangle)$ converge para cero en $\mathbb{R}$ esto se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$. Se dice $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ en $D'(\Omega)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n - T = 0$ en $D'(\Omega)$.

Definición 36. (Derivada α -ésima de $T \in D'(\Omega)$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $T \in D'(\Omega)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se define la derivada α -ésima de T como el operador

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

Ejemplo: Considérese $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ la función valor absoluto. Es conocido el hecho de que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su derivada viene dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, f no es derivable en $x = 0$. Se verá ahora que f si es derivable en el sentido de las distribuciones y su derivada es, precisamente, la extensión g_1 de g a todo el dominio $\mathbb{R}$, de modo que $g_1(0) = 0$. Nótese, a modo de observación, que el conjunto $\{0\}$ es de medida nula, luego la elección particular del valor $g_1(0)$ no es relevante. Así pues, dada $\phi \in D(\mathbb{R})$, se tiene que $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)|x| d\mu$, luego utilizado la técnica de integración por partes,

$$\begin{aligned}
\frac{dT_f}{dx}(\phi) &= (-1)T_f(\phi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \phi' f d\mu \\
&= \int_{(-\infty,0)} x\phi'(x)d\mu(x) - \int_{(\infty,0)} x\phi'(x)d\mu(x) \\
&= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 x\phi(x)dx - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x\phi'(x)dx \\
&= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left([x\phi(x)]_M^0 - \int_M^0 \phi(x)dx \right) - \lim_{M \rightarrow \infty} \left([x\phi(x)]_0^M - \int_0^M \phi(x)dx \right) \\
&= -\int_{(-\infty,0)} \phi d\mu + \int_{(\infty,0)} \phi d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi g d\mu = T_g(\phi)
\end{aligned}$$

Teorema 25 (Caracterización de la convergencia en $D'(\Omega)$). Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales lineales de $D'(\Omega)$. Se verifica que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento $T \in D'(\Omega)$ si y solo si

$$T_n(\phi) \rightarrow T(\phi), \quad \text{para todo } \phi \in D(\Omega)$$

3.10 Espacios de Sobolev

La introducción de los espacios de Sobolev proporciona un marco fundamental para formular y estudiar las ecuaciones diferenciales, así como para establecer resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Estos espacios permiten trabajar con funciones que, aun cuando no posean derivadas clásicas en el sentido usual, admiten derivadas débiles que satisfacen determinadas condiciones de integrabilidad.

Definición 37. Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, además $1 \leq p \leq \infty$ y m un entero tal que $0 \leq m$. Entonces

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ se denomina Espacios de Sobolev sobre Ω . Dotado de la norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{ess} |D^\alpha u|$$

Así es un espacio normado.

De la definición $\|u\|_{m,p} \geq 0$, si $\|u\|_{m,p} = 0$ entonces $\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$,
y en consecuencia $\|D^\alpha u\|_p^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. En particular para $\alpha = 0$ se tiene que

$$\|D^\alpha u\|_p^p = \|D^0 u\|_p^p = \|u\|_p^p = 0,$$

de lo cual se obtiene $u = 0$.

Observación:

(1) $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

(2) Si $p = 2$ tenemos

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / Du \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \quad \forall m\}$$

es un espacio de Hilbert. En este espacio introducimos la forma bilineal

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx \end{aligned}$$

Lo cual es un producto interno inducido por la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}$$

(3) Si $m = 1$ tenemos

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / Du \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 26. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración.- Ver [30]. Pág. 24

Proposición 18. Sea α un multi-índice, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ y $D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$. Entonces $v_\alpha = D^\alpha u$.

Demostración.- Ver [30].pag. 24

3.11.1 EL ESPACIO $W_0^{m,p}(\Omega)$

cuando $m = 0$ se tiene $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, además se tiene que $D(\Omega)$ es denso cuando $m = 0$ se tiene $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, además se tiene que $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$. Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ es decir $\overline{D(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$, $\overline{D(\Omega)} \subset W^{m,p}(\Omega)$

es decir $\overline{D(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$, $\overline{D(\Omega)} \subset W^{m,p}(\Omega)$

Proposición:

Sea $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $\bar{u}$ extensión de u es decir cero fuera de Ω . Se tiene

- i) $\bar{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$
- ii) $D^\alpha \bar{u} = D^\alpha u$ para todo $|\alpha| \leq m$
- iii) $\|u\|_{m,p} = \|\bar{u}\|_{m,p}$

Demostración: Ver [30]. Pág. 26

Teorema 27. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$ Se tiene:

- i) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.
- ii) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.

Demostración.- Ver [27]. Pág. 121

Observación: Los espacios $W^{m,1}(\Omega)$ y $W^{m,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.

Definición 38. Sea $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir.

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

En el caso particular en que $p = 2$, es usual usar la notación $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$

Observación:

1. $W_0^{m,p}(\Omega)$ si y solo si existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ tal que $\varphi_n \rightarrow u$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es: existe $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$.
2. Se comprueba que $C_0^m(\Omega) \subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$, para todo $m \geq 1, p \in [1, \infty)$.

Teorema 28. (Desigualdad de Poincaré). Para un abierto acotado (Ω) de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ bien regular, existe $C_* > 0$ tal que se verifica

$$\|u\|_p \leq C_* \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p^p dx \right)^{1/p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad 1 < p < \infty$$

Si $p = 2$ entonces $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ por teorema de Poincaré

$$\|u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [27] Pag. 36

Observación: Por otro lado existen $M_0 > 0, M_1 > 0$ tal que

$$M_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq M_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

tenemos el producto interno asociado a esta norma

$$((u, v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Proposición 19. (Desigualdad de Hardy-Sobolev). Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, luego $\frac{u}{\varphi_1} \in L^q(\Omega)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-r}{N}, 0 < r \leq 1$, y entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^r} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [8 pág. 2]

3.11.2 INMERSIONES DE LOS ESPACIOS $W^{m,p}(\Omega)$

- **Inmersiones Continuas**

Teorema 29. Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ ($2 \leq n$). Ω de clase C^m . Para un entero $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Tenemos las inmersiones continuas:

- i) Para $mp < n$ $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$
- ii) Si $mp = n$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$,
- iii) Si $mp > n$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\Omega)$ donde

$$k \text{ es un entero } k < m - \frac{n}{p} \leq k+1 \text{ y } 0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0$$

Demostración. Ver [27 pág.76].

Proposición 22. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 , con frontera acotada. Sean $1 \leq p < +\infty$, entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:

Para $1 \leq p < n$, se tiene $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$

Para $p = n$ se tiene $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$,

Para $p > n$, se tiene $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$

Teorema 30: Dado un conjunto abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq n$). Ω de clase C^m . Entonces

$$W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\bar{\Omega})$$

Demostración. Ver [27 pág.76].

- **Inmersiones Compactas**

Teorema 31. (Inmersión Compacta). Para un abierto acotado Ω y bien regular de $\mathbb{R}^n$, y para $j \geq 0$, $m \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$ se tiene

- (i) Para $m < \frac{n}{p} \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-mp}$
- (ii) Para $m = \frac{n}{p} \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \infty$

$$(iii) \quad \text{Para } m > \frac{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} a) & W^{j+m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega); 1 \leq q < \infty \\ b) & W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^j(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

Demostración. Ver [27 pág. 80].

Teorema 32. (Rellich-Kondrachov). Dado subconjunto Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 . Se verifican las siguientes inmersiones compactas:

$$i) \quad \text{Para } p < n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[,$$

$$\text{donde } 1 \leq q < \frac{np}{n-p} = p^*$$

$$ii) \quad \text{Para } p = n \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$iii) \quad \text{Para } p > n, \text{ se tiene } W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} C^0(\overline{\Omega})$$

Demostración. Ver [27 pág. 80-81].

Teorema 33 (Teorema del ángulo agudo). Dado la aplicación continua $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, si existe $R > 0$ tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$, Para todo $|\xi| = R$, entonces existe $\varepsilon_0 \in \overline{B(0, R)}$ tal que $F(\xi_0) = 0$

Demostración.- Ver [21].

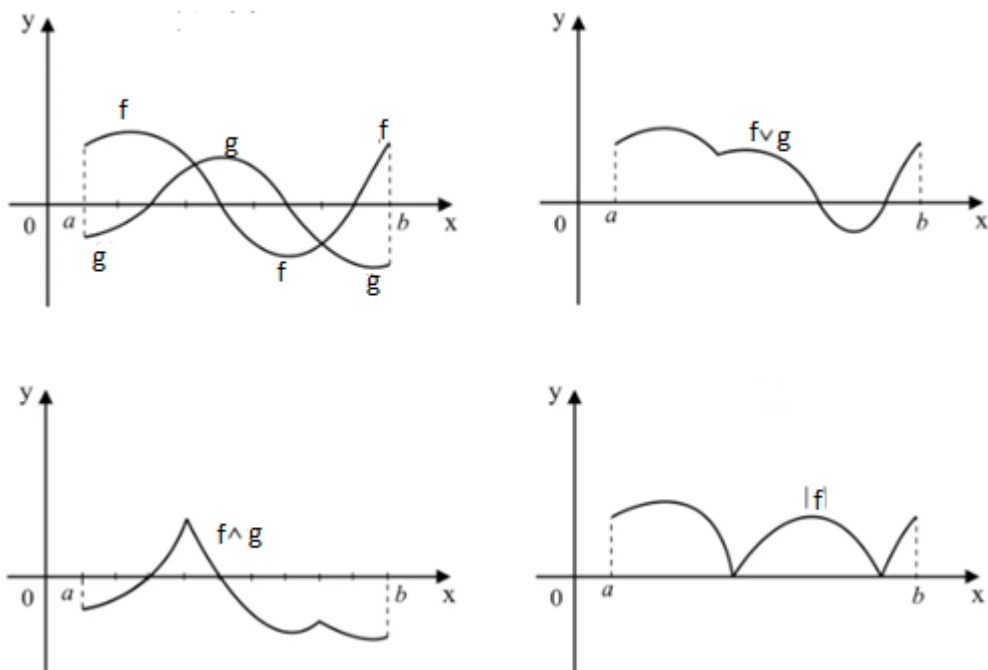
3.11 PARTES POSITIVA Y NEGATIVA DE UNA FUNCION

Dado dos funciones reales f y g definidas en $[a; b]$ se define las funciones $f \vee g$, $f \wedge g$ y $|f|$ del siguiente modo

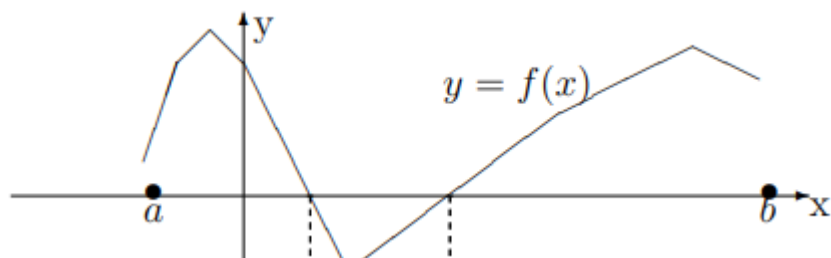
$$(f \vee g)(x) = \max \{ f(x), g(x) \}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min \{ f(x), g(x) \}$$

$$|f|(x) = |f(x)|$$



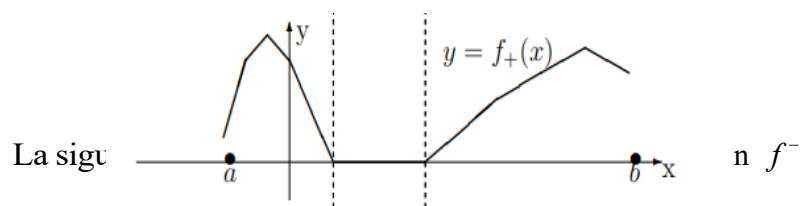
Dada una función $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ definimos f^+ y f^- llamadas respectivamente, parte positiva y negativa de f de la siguiente manera



$$f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max \{ f(x), 0(x) \}$$

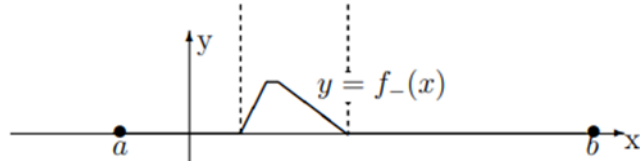
La siguiente figura ilustra geométicamente la función f^+

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



$$f^-(x) = (-f \vee 0)(x) = \max \{ -f(x), 0(x) \}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



Lema 1. Sea $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $f^+ = f \vee 0$
 $f^- = (-f) \vee 0$
- (ii) $f = f^+ - f^-$
- (iii) $|f| = f^+ + f^-$
- (iv) Si $f \geq 0$, entonces $f = f^+$ y $f^- = 0$

Lema 2. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ son medibles, entonces $f \vee g$ y $f \wedge g$ son medibles.

Proposición 23. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ es medible si, y sólo si, sus partes positiva y negativa f^+ y f^- son medibles

3.12 Principio del máximo.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Definimos el operador diferencial parcial de segundo orden lineal L como

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu$$

donde $a^{i,j}, b^i, c$ coeficientes acotados

3.13 Principio del máximo débil.

Primero identificamos circunstancias bajo las cuales una función debe asumir su máximo (o mínimo) en la frontera, siempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sea acotado y abierto.

Teorema 34 (Principio del máximo débil para $c \equiv 0$). Sean $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y $c \equiv 0$ en U .

(i) Si u es una subsolución, es decir $Lu \leq 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(ii) Si u es una sobresolución, es decir $Lu \geq 0$ en Ω , entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Raimund Burger [33] [pág. 145]

Teorema 35 (Principio del máximo débil para $c \geq 0$).

Sean $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$ en Ω ,

$$u^+(x) = (u \vee 0)(x) = \max \{u(x), 0(x)\}$$

$$u^-(x) = (-u \wedge 0)(x) = \min \{-u(x), 0(x)\}$$

(i) Si $Lu \leq 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+$$

(ii) Si $Lu \geq 0$ en Ω , entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u^-$$

Comentamos que si $Lu = 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Raimund Burger [33] [pag. 146]

Teorema 36 (Principio del máximo fuerte). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $c \equiv 0$ en Ω .

Supongamos también que Ω es conexo, acotado y abierto.

- (i) Si $Lu \leq 0$ en Ω y u asume su máximo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .
- (ii) Análogamente, si $Lu \geq 0$ en Ω y u asume su mínimo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior; entonces u es constante en Ω .

Raimund Burger [33] [pág. 147]

Teorema 37 (Principio del máximo fuerte con $c \geq 0$). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $c \geq 0$ en Ω .

- (i) Si $Lu \leq 0$ en Ω y u asume un máximo no negativo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .
- (ii) Análogamente, si $Lu \geq 0$ en Ω y u asume su mínimo no positivo sobre $\overline{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en Ω .

Ver. [33] [pág. 148]

Proposición 24. (Desigualdad de Tartar) Para cualquier vector x, y de $\mathbb{R}^n$ se tiene las desigualdades

$$\left\langle x - y, |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \begin{cases} \geq c_p |x - y|^p, & \text{si } p \geq 2, \\ \geq e_p |x - y|^2 (|x| + |y|)^{p-2}, & \text{si } 1 < p < 2, \end{cases}$$

c_p, e_p son constantes positivas y dependientes de p .

3.15 Teoremas de las divergencias y fórmulas de Green.

Teorema 38. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio elemental cuyo cierre $\overline{\Omega}$ (que es compacto) esta contenido en un abierto un poco mayor: $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. Para todo campo de vectores $F : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C_1 , se tiene:

$$\int_{\Omega} \text{div} F \, dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, d \text{ área}$$

Siendo ν la normal unitaria exterior a Ω .

Corolario 4. Sea $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ la normal exterior a Ω . Para toda la

función f de clase C^1 en Ω_1 y todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:

$$\int_U f_{x_i} dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial U} f v_i ds$$

Resulta de aplicar el teorema de la divergencia al campo $F = f \cdot e_i$

Corolario 4. (Integración por partes). Dadas f, g de clase C^1 en Ω_1 y dado un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:

$$\int_{\Omega} (f_{x_i} g) dx_1 \dots dx_n = - \int_{\Omega} (f g_{x_i}) dx_1 \dots dx_n + \int_{\partial \Omega} (f \cdot g \cdot v_i) ds.$$

3.16 Teorema (fórmulas de Green)

En lo siguiente Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con $\partial \Omega \in C^1$.

Definición:

- 1) si $\partial \Omega \in C^1$ entonces a lo largo de $\partial \Omega$ se define el campo vectorial normal unitario exterior $v = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n)$. La normal unitaria en $x_0 \in \partial \Omega$ Esta definido por $v(x_0) = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n) = v$
- 2) Sea $u \in C^1(\Omega)$ Entonces, $\frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot Du$ se llama derivada normal (exterior) de u

$$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_n})$$

Teorema 39. (Teorema de Gauss-Green). Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial \Omega} u v^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ver. [33] [pág. 15]

Teorema 40. (Integración por partes). Sean $u, w \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

Ver. [33] Pag. 16

$$\int_{\Omega} u_{x_i} w dx = - \int_{\Omega} u w_{x_i} dx + \int_{\partial \Omega} u w v^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 41. (Formula de GauB-Green) Sean $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dw dx = - \int_{\Omega} u(\Delta w) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} u dS,$$

$$\int_{\Omega} (u\Delta w - w\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Ver. [33] Pag. 16

CAPITULO IV

4.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En nuestro presente trabajo utilizamos resultados importantes, los espacios Banach, espacios de Hilbert, isomorfismo e isometría, espacios reflexivos, espacios separables, espacios L^p , distribuciones, Espacios de Sobolev, Inmersiones continuas y compactas, teorema de la convergencia dominada, teorema del ángulo agudo, parte positiva y negativa de una función, principio del máximo, teoremas de la divergencia y fórmulas de Green, todos estos temas vinculados al problema elíptico sobre dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que involucran el operador P-Laplaciano. Las demostraciones de teoremas y propiedades que utilizamos se encuentran en [28] y [30] y adicionalmente otros autores.

Para demostrar el resultado central consideraremos el problema auxiliar (2), y expresamos este problema en su formulación variacional. Para encontrar la solución débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$ en este problema utilizamos esencialmente, el método de Galerkin, teoremas de inmersión, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el teorema del ángulo agudo.

Luego utilizaremos el principio del máximo para encontrar la solución débil única del problema (1).

4.1 HIPOTESIS CENTRAL DE LA INVESTIGACION

Existe la solución débil y es única del problema (1) en el espacio Banach separable $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$ donde

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^\alpha + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciarán a seguir.

(M_0) $M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[$ es una función continua, $m_0 > 0$

(f_0) $f(x, u, \nabla u) = h(x, u) + g(x, \nabla u)$, donde:

i) $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua y existen funciones no negativas

$a_1 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_1 \in L^{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}}(\Omega)$, $\gamma_1 \in]0, p-1[$ tal que
 $0 < h(x, t) \leq a_1 + b_1 |t|^{\gamma_1}$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

ii) $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua tal que
 $0 < g(x, \lambda) \leq a_2 + b_2 |\lambda|^{\gamma_2}$, $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ para funciones no negativas

$a_2 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_2 \in L^{\frac{p}{p-\gamma_2}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\gamma_2 \in]0, p-1[$

(C_0) $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\frac{\beta}{p-1} < \alpha < p-1$

4.2 VARIABLES E INDICADORES DE LA INVESTIGACION

4.2.1 VARIABLE INDEPENDIENTE

El problema (1) de valor frontera (PVF) que involucra un término no local del tipo P-Kirchhoff, con la función f y la función M que cumple ciertas condiciones es la variable dependiente

4.2.2 VARIABLE DEPENDIENTE

Existencia de solución débil del problema (1) es la variable independiente.

4.3 METODOS DE LA INVESTIGACION

En este trabajo seguiremos el método deductivo, que se deriva del razonamiento lógico basados en leyes y principios que tiene por finalidad inferir a partir de premisas o hechos establecidos que son ciertas, conclusiones que también serán ciertas.

Estableceremos dos etapas:

a) Formulación de hipótesis: Nuestro trabajo se inicia con la formulación de una hipótesis, el cual es una premisa o una suposición del objeto de estudio (1) que realizamos en nuestro trabajo central.

b) Deducciones y consecuencias: De nuestras hipótesis se deducirán las consecuencias, de estas consecuencias se deducirán la solución del problema (1), mediante una demostración, utilizando el razonamiento lógico.

Este trabajo está dentro de la clasificación de investigación básica o Fundamental.

4.4 DISEÑO O ESQUEMA DE LA INVESTIGACION

Para encontrar solución de (1) consideramos el problema auxiliar(2), y expresamos este problema en su formulación variacional. Para encontrar la solución débil en el espacio de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$, para este problema, utilizamos esencialmente el método de Galerkin, teoremas de inmersión, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el teorema del ángulo agudo, luego encontramos la solución del problema central (1)

4.5 POBLACION Y MUETRA

Nuestra población se limita al espacio de las Ecuaciones diferenciales Parciales (EDP) y la muestra serán las ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas del tipo P- Kirchhoff

En donde trabajaremos es el espacio Banach separable

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

Cuya norma es

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

4.6 ACTIVIDADES DEL PROCESO INVESTIGATIVO

Para el desarrollo de esta investigación se aplicaron las siguientes fases:

4.6.1 Fase Inicial

En la fase inicial se realiza una actividad recopilación en temas asociados a nuestro trabajo en revistas especializadas, en textos y en artículos de investigación relacionados con las ecuaciones del tipo P-Kirchhoff.

4.6.2 Fase Intermedia

En esta fase intermedia se realiza las actividades exploratorias y la formulación variacional del problema planteado (1) y el problema auxiliar asociado (2), para ello se reviso el espacio de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$ y el método de Galerkin

4.6.3 Fase Final

En la parte final de este trabajo se verifica la hipótesis mediante la demostración de existencia y unicidad solución débil del problema (1), utilizando el método de Galerín y los teoremas y propiedades dadas en el marco teórico.

4.7 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACION

Se realizó la búsqueda de artículos relacionados con las EDP elípticas del tipo Kirchhoff en libros y revistas científicas, revistas indexadas y bibliotecas virtuales haciendo uso de la tecnología

El instrumento es el análisis de los documentos y artículos recopilados y de las técnicas de solución para abordar las soluciones de (1)

4.8 PROCEDIMIENTO PARA LA RECOPIACION DE DATOS

Se realizó la búsqueda de diferentes trabajos de investigación relacionados con las ecuaciones elípticas del tipo P-Kirchhoff.

4.9 TECNICAS DE PROCESAMIENTO Y ANALIS DE LOS DATOS

Para obtener la existencia y unicidad de solución del problema (1), se han analizado los datos recopilados esencialmente los métodos y técnicas de demostración utilizadas en las revistas y artículos especializados relacionados con la demostración de los problemas de valor frontera (PVF) del tipo P- Kirchhoff.

Asimismo, resultados de Análisis Funcional, resultados importantes de teoría de operadores, y de los Espacios de Sobolev.

CAPITULO V

5. RESULTADOS Y DISCUSION

La ecuación de Kirchhoff

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que apareció en 1883, extiende el modelo para las pequeñas oscilaciones de una cuerda, realizado por D'Alembert, considerando el efecto de los cambios en la longitud de las cuerdas al vibrar. Este problema resulta ser no local debido al termino.

$$\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$$

En general, los problemas no locales han atraído tremendamente la atención de los investigadores porque representan una gran variedad de situaciones físicas y biológicas, cuyo tratamiento requiere herramientas matemáticas sofisticadas.

La ecuación de Kirchhoff ha sido generalizada en décadas recientes, a una ecuación denominada del tipo P-Kirchhoff.

$$\begin{aligned} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u &= f(x, u) \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ ; $f: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $M: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas. La generalización está relacionada con el hecho de que el operador P- Laplaciano Δ_p aparece en la descripción de fenómenos físicos, en diversas ramas de la ciencia.

En este trabajo consideramos una ecuación del tipo P-Kirchhoff con un término fuente no local y una convección.

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u)$$

Nuestra ecuación contiene, un término fuente no local

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha}$$

asociado al modelo de Gierer- Meinhardt [5], que estudia el “Sistema de Sombra” asociado, por medio de una difusión grande del inhibidor. El concepto de “Sistema de Sombra” fue introducido por Reener [10] para describir el comportamiento cualitativo de los sistemas de reacción-difusión cuando uno de los coeficientes de difusión es muy grande. Este “Sistema de Sombra” esta formado por una ecuación de reacción - difusión acoplada con una ecuación diferencial ordinaria con efecto (término) no locales y contiene toda la dinámica del sistema de reacción difusión original Reener [10].

Por otro lado, a nuestro conocimiento, los términos no locales fueron inicialmente introducidas en modelo biológicos de dinámica de poblaciones [21].

En estos modelos, la presencia del término no local significa en general que el efecto de la variable depende no solo de su propia posición en el espacio, si no de su valor medio (promedio) en el dominio de definición.

Como es sabido, el termino de convección (termino que contiene al gradiente) representa el transporte o movimiento de una cantidad (como calor, masa o momento) debido al movimiento masivo de un fluido o material. Este término está abocado al fenómeno de la convección, que consiste en la transferencia de una propiedad por el movimiento del fluido o material en sí.

La presencia de este termino hace que el problema (1) sea no variacional, por lo que no es posible aplicar, al menos directamente, las técnicas variacionales como el Teorema del Paso de la Montaña. minimización directa vía el teorema de Weierstrass o el Principio de Ekeland, por lo que aplicaremos el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita. Así esta no linealidad (que contiene al gradiente) es sumamente importante en la descripción y análisis en modelos de ciencia y tecnología, por ejemplo en procesos de difusión y convección en que las partículas o energía son convertidas o transferidas dentro de sistemas físicos

En nuestro trabajo abordamos un modelo del tipo P-Kirchhoff con un término no local especial, que a nuestro conocimiento no ha sido tratado en la literatura matemática de esta línea de investigación, por lo que consideramos nuestro estudio como aporte al avance en el área de las ecuaciones diferenciales parciales.

Este trabajo de tesis está compuesto de los siguientes capítulos. En el capítulo II utilizaremos los resultados preliminares para abordar la parte central, así como la definición de solución débil y la notación a ser usada. El capítulo V es el objetivo fundamental de este trabajo y consiste en la deducción detallada de la existencia y unicidad de la solución del problema (1) como se mencionó la herramienta matemática para probar la existencia

de solución débil es el método de Galerkin, en tanto que la unicidad será probada por el método de contradicción realizando cuidadosas estimativas con apropiadas desigualdades algebraicas. La positividad será mostrada vía el principio del máximo fuerte.

5.1 Existencia y unicidad de solución para una ecuación

p-laplaciano del tipo kirchhoff con término singular y dependiente del gradiente.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} u^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, con frontera suave $1 < p < N$, $\alpha, \beta > 0$, M y f , son funciones dadas, con condiciones que se enunciarán a seguir.

i) (M_0) $M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[$ es una función continua, $m_0 > 0$

ii) (f_0) $f(x, u, \nabla u) = h(x, u) + g(x, \nabla u)$, donde

$h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua y existen funciones no negativas $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_1 \in L^{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}}(\Omega)$, $\gamma_1 \in]0, p-1[$ tal que $0 < h(x, t) \leq a_1 + b_1 |t|^{\gamma_1}$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$g : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Holder continua tal que $0 < g(x, \lambda) \leq a_2 + b_2 |\lambda|^{\gamma_2}$, $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ para funciones no negativas $a_2 \in L^{p'}(\Omega)$, $b_2 \in L^{\frac{p}{p-\gamma_2}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $\gamma_2 \in]0, p-1[$

iii) (C_0) $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\frac{\beta}{p-1} < \alpha < p-1$

Para resolver (1) aplicaremos el Método de Galerkin.

Definición: Diremos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es solución débil de (1) si

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii)

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx$$

Teorema 5.1 .- Asuma que las condiciones (M_0) , (f_0) y (C_0) se verifican. Entonces el problema (1) posee una solución débil, no trivial.

Para la demostración del teorema (5.1) dos lemas

Lema 5.1 El problema

$$(2) \left| \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = \left(\int_{\Omega} \frac{(u^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} (u^+)^{\alpha} + f(x, u, \nabla u) \text{ en } \Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Posee una solución débil $u_{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ donde $u_{\varepsilon}^+ = \max\{u_{\varepsilon}, 0\}$.

Demostración

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es separable, existe una base de Galerkin

$$\{w_1, w_2, \dots\} \text{ para } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ el espacio generado por las “m” primeros elementos de la base.

Observemos aquí, que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow V_m$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} \rightarrow \phi(\xi) = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j$$

1. ϕ es un operador lineal, en efecto sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\phi(\alpha\xi + \beta\eta) = \sum_{j=1}^m (\alpha\xi_j + \beta\eta_j)w_j = \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j w_j + \beta \sum_{j=1}^m \eta_j w_j = \alpha\phi(\xi) + \beta\phi(\eta)$$

2. Es un operador inyectivo

$$\text{sea } \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \in \text{Nuc}(\phi) \text{ entonces } \phi(\eta) = \sum_{j=1}^m \eta_j w_j = 0$$

entonces $\eta_j = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$ pues $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ es base

$$\text{asi } \eta = (0, 0, 0, \dots, 0) \text{ luego } \text{Nuc}(\phi) = \{0\}$$

por tanto ϕ es inyectiva

3. Por la misma definicin ϕ es sobreyectivo

$$\text{Asi } \phi \text{ es un isomorfismo lineal. Adem\'as } \|\phi(\xi)\|_{W_0^{1,p}}^2 = \|\phi(\xi)\|_{V_m}^2 = \sum_{j=1}^m \xi_j^2 = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2$$

por lo que ϕ es un isomorfismo isom\'etrico.

En adelante identificaremos

$$u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \quad \text{con } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{sin mayor comentario.}$$

Ahora restringiremos nuestra formulaci\'on variacional (de la soluci\'on d\'ebil) al espacio V_m . Por lo que queremos determinar

$$u_{m\varepsilon} = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$$

Restringimos nuestra soluci\'on d\'ebil del problema auxiliar (2) al espacio

$V_m \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$, luego tenemos, $u_{m\varepsilon} \in V_m$ es soluci\'on d\'ebil de (2) si:

$$i) u_{m\varepsilon} \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$ii) M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{m\varepsilon} \nabla w_j dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_{m\varepsilon}^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_{m\varepsilon}^{+\alpha} w_j dx + \int_{\Omega} f(x, u_{m\varepsilon}, \nabla u_{m\varepsilon}) w_j dx, \\ j = 1, 2, \dots, m$$

Luego

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_{m\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{m\varepsilon} \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_{m\varepsilon}^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_{m\varepsilon}^{+\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u_{m\varepsilon}, \nabla u_{m\varepsilon}) v dx, \quad \forall v \in V_m$$

En adelante, salvo mención contraria, denotaremos $u_{m\varepsilon} \equiv u_m$. Para resolver el sistema aproximado (2), aplicaremos el lema del ángulo agudo.

Definimos el campo vectorial

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \xi &\rightarrow F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), \dots, F_m(\xi)) \end{aligned}$$

Con $F_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_j dx - \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx, \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Notamos aquí que las F_i son continuas. Luego F es continua. Por el momento denotamos con $u_m = u$ luego se tiene

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega} \frac{u^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{+\alpha} w_j dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) w_j dx, \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F(\xi), \xi \rangle &= \sum_{j=1}^m \xi_j F_j(\xi) = \sum_{j=1}^m \xi_j \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_j dx - \left(\int_{\Omega} \frac{u^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{+\alpha} w_j dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) w_j dx \right] \\ &= \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j \right) dx - \left(\int_{\Omega} \frac{u^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{+\alpha} \left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j \right) dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \left(\sum_{j=1}^m \xi_j w_j \right) dx \right] \\ &= M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u dx - \left(\int_{\Omega} \frac{u^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{+\alpha} u dx - \int_{\Omega} h(x, u) u dx - \int_{\Omega} g(x, \nabla u) u dx \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Holder, la positividad de la función M, las inmersiones continuas y las condiciones de la hipótesis se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi \rangle &\geq m_0 |\nabla u|_p^p - C_\alpha \left(\int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{1-\beta} - \int_\Omega h(x, u) u dx - \int_\Omega g(x, \nabla u) u dx \\
&\geq m_0 |\nabla u|_p^p - C_\beta |u|_{\alpha+1}^{(\alpha+1)(1-\beta)} - |a_1|_{p'} |u|_p - |b_1|_{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}} |u|_p^{\gamma_1+1} - |a_2|_{p'} |u|_p \\
&\quad - \left(\int_\Omega b_2^{p'} |\nabla u|^{p'\gamma_2} dx \right)^{\frac{1}{p'}} |u|_p \\
&\geq m_0 \|u\|^p - C_p' \|u\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} - h_1 |a_1|_{p'} \|u\| - h_2 |b_1|_{\frac{p}{p-(\gamma_1+1)}} \|u\|^{\gamma_1+1} \\
&\quad - h_3 |a_2|_{p'} \|u\| - h_4 |b_2^{p'}|_{\frac{p}{p-\gamma_2}} \|u\|^{\gamma_2+1} \\
&= m_0 \|u\|^p - k_0 \|u\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} - k_1 \|u\|^{\gamma_1+1} - k_2 \|u\|^{\gamma_2+1} - k_3 \|u\|
\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado que $W^{1,p+p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $pp' = p + p'$ y la desigualdad

$$\|u\| \leq C_5 |\nabla u|_{p+p'}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Ahora, como $(\alpha+1)(1-\beta) < p$, $\gamma_1+1, \gamma_2+1 < p$ se tiene que:

Luego existen ρ y R positivos tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$, $\forall |\xi| = R$

Por el teorema del ángulo agudo, existe $\xi_0 \equiv u_m \in V_m$ tal que

$\xi_0 \in \bar{B}(0, R)$ tal que $F(\xi_0) = 0$, entonces $F_j(\xi_0) = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned}
F_j(\xi_0) &= M \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx \right) \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx - \left(\int_\Omega \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_\Omega u_m^{+\alpha} w_j dx - \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx = 0 \\
j &= 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

Esto significa $u_{m\varepsilon} = u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}
M \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx \right) \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx &= \left(\int_\Omega \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_\Omega u_m^{+\alpha} w_j dx + \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx \\
\text{para } j &= 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

por lo tanto $u_{m\varepsilon}$ es solución débil de la ecuación auxiliar (2) en V_m

$$(S.A) \left\{ \begin{array}{l} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_1 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_1 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_1 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_2 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_2 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_2 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_3 dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_3 dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_3 dx, \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_m dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_m dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_m dx, \end{array} \right.$$

Así, el sistema aproximado (S.A) posee solución $u_{m\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. El radio R puede depender de m luego buscaremos una cota para $\|u_m\|$ independiente de m .

Lema 5.2 La sucesión $(\|u_m\|)_{m \geq 1}$ es acotada

Demostración

La demostración será por contradicción. Supongamos que $(u_m)_{m \geq 1}$ no está acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Luego existe una subsucesión aun denotado (u_m) tal que $\|u_m\| \rightarrow +\infty$.

Del el sistema aproximado

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_j dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w_j dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w_j dx$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

haciendo " $w_i \equiv u_m$ ", tenemos

$$\begin{aligned}
M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx &= \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} u_m dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) u_m dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \frac{|u_m|^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} [h(x, u_m) + g(x, \nabla u_m)] u_m dx
\end{aligned}$$

Como $m_0 \leq M(t)$, $u^+ \leq |u|$ usando la desigualdad de Holder, y los teoremas de inmersión y las condiciones para las funciones h y g obtenemos

$$\begin{aligned}
m_0 \|u_m\|^p &\leq h_0 \left(\int_{\Omega} |u_m|^{\alpha+1} dx \right)^{1-\beta} + \int_{\Omega} |a_1| |u_m| dx + \int_{\Omega} |b_1| |u_m|^{\gamma_1+1} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |a_2| |u_m| dx + \int_{\Omega} |b_2| |\nabla u_m|^{\gamma_2} |u_m| dx \\
&\leq h_0 \|u_m\|_{\alpha+1}^{(\alpha+1)(1-\beta)} + \|a_1\|_{p'} \|u_m\|_p + \|b_1\|_{\frac{p}{p-(\gamma_1-1)}} \|u_m\|_p^{\gamma_1+1} + \|a_2\|_{p'} \|u_m\|_p + \|b_2\|_{\frac{p}{p-\gamma_2}} \|u_m\|_p^{\gamma_2+1}
\end{aligned}$$

Luego

$$m_0 \|u_m\|^p \leq h_0 \|u_m\|^{(\alpha+1)(1-\beta)} + h_1 \|u_m\| + h_2 \|u_m\|^{\gamma_1+1} + h_3 \|u_m\| + h_4 \|u_m\|^{\gamma_2+1}$$

Dividiendo por $\|u_m\|^p$ resulta

$$0 < m_0 \leq \frac{h_0}{\|u_m\|^{p-(\alpha+1)(1-\beta)}} + \frac{\overline{h_1}}{\|u_m\|^{p-1}} + \frac{h_2}{\|u_m\|^{p-(\gamma_1+1)}} + \frac{h_4}{\|u_m\|^{p-(\gamma_2+1)}}$$

como $\|u_m\| \rightarrow +\infty$ resulta $0 < m_0 \leq 0$

Lo que no puede ser. Así $(\|u_{m\varepsilon}\|)_{m \geq 1}$ es acotada.

Esto es, existe $k > 0$ $\|u_{m\varepsilon}\| \leq k$

$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo y ademas $W_0^{1,p}(\Omega)$ es cerrado y de Banach entonces $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, entonces por teorema de Alaoglu – Burbaki posee una subsucesion debilmente convergente que aun denotamos por $(u_m)_{m \geq 1}$, esto es $u_m \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

de la inmersión compacta de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq p^*$ existe una subsucesión de (u_m) aun denotada con (u_m) tal que

$$\left. \begin{aligned} \|u_m\|^p &\rightarrow \theta \\ u_m &\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_m &\rightarrow u_\varepsilon \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \\ u_m(x) &\rightarrow u_\varepsilon(x) \text{ c.t.p } x \in \Omega \\ \text{como } \alpha &< \alpha+1 < q \text{ (haciendo } 1 < q = p) \\ \text{tenemos } |u_m(x)| &\leq E, L^\alpha(\Omega) \\ |u_m(x)| &\leq F, L^{\alpha+1}(\Omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

Ahora, de la continuidad de M : y de (1) tenemos

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \rightarrow M(\theta) \dots\dots\dots(2)$$

Fijando $i_0 < m$, luego $V_{i_0} \subseteq V_m$; resulta para $w \in V_{i_0}$ que

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} \, dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} w \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w \, dx$$

$$\forall w \in V_{i_0} \dots\dots\dots(3)$$

Notemos que

$$|h(x, u)|_{p'}^{p'} \leq |a_1|_{p'}^{p'} + C_0 + |u|_p^p \equiv C_0 + |u|_p^p \rightarrow |h(x, u)|_{p'} \leq \widehat{C}_0 + |u|_p^{p-1} \leq \widehat{C}_0 + \overline{C}_0 |\nabla u|_p^{p-1} \dots\dots\dots(4)$$

Esto implica que $h(x, u) \in L^{p'}(\Omega)$

Como por (1) se tiene

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_m &\rightarrow u_\varepsilon \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \\ u_m(x) &\rightarrow u_\varepsilon(x) \text{ c.t.p } x \in \Omega \end{aligned}$$

$$(x, u_m(x)) \rightarrow (x, u_\varepsilon(x)) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R} \text{ c.t.p}$$

observamos como h es Hólder localmente continua, entonces h es continua

$$h(x, u_m(x)) \rightarrow h(x, u_\varepsilon) \text{ c.t.p } x \in \Omega$$

$$h(x, u_m(x))w(x) \rightarrow h(x, u_\varepsilon)w(x) \quad c.t.p \quad x \in \Omega; \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

También se tiene

$$\begin{aligned} |h(x, u_m)w| &\leq a_1 |w| + b_1 |u_m|^{\gamma_2} |w| \\ &\leq F \in L^1(\Omega) \quad , \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

Luego del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(x, u_m)w \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} h(x, u_\varepsilon)w \, dx \dots\dots\dots(5) \\ &\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

Por otro lado como

$$\begin{aligned} |g(x, \nabla u_m)|_{\frac{p}{\gamma_2}} &\leq |a_2|_{\frac{p}{\gamma_2}} + \left| b_2 \right|_{\infty}^{\frac{p}{\gamma_2}} |\nabla u_m|_p^{\gamma_2} \\ &\leq C_1 + C_2 K^{\gamma_2} \end{aligned}$$

Como $(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ es acotada en $L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega)$ y como es reflexivo, entonces existe una subsucesión de $(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ aun denotado con

$(g(x, \nabla u_m))_{m \geq 1}$ tal que $g(x, \nabla u_m) \rightharpoonup A(x)$, en $L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega)$ esto es

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m)w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x)w \, dx, \quad \forall w \in L^q(\Omega) \dots\dots\dots(6)$$

Donde $\frac{\gamma_2}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) = \left(L^{\frac{p}{\gamma_2}}(\Omega) \right)'$ $(q = \frac{p}{p-\gamma_2})$.

, La función

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / T(s) = s^\alpha \text{ es continua para } \alpha > 0, \dots\dots\dots(6.1)$$

de la convergencia (1) y la continuidad de la aplicación T $s \rightarrow s^\alpha$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, se tiene

$$u_m^\alpha(x) \rightarrow u_\varepsilon^\alpha(x) \quad \text{y} \quad u_m^{\alpha+1}(x) \rightarrow u_\varepsilon^{\alpha+1}(x) \quad \text{c. s en } \Omega.$$

Además por (1) tenemos que

$$\begin{aligned} |u_m(x)| &\leq E, \quad L^\alpha(\Omega) \\ |u_m(x)| &\leq F, \quad L^{\alpha+1}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\|E^\alpha\|_{L_1} = \int_{\Omega} |E^\alpha(x)| dx = \int_{\Omega} |E(x)|^\alpha dx = \|E\|_{L^\alpha}^\alpha < \infty \text{ pues } E \in L^\alpha(\Omega)$$

$$\|F^{\alpha+1}\|_{L_1} = \int_{\Omega} |F^{\alpha+1}(x)| dx = \int_{\Omega} |F(x)|^{\alpha+1} dx = \|F\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1} < \infty \text{ pues } F \in L^{\alpha+1}(\Omega)$$

Así tenemos que

$$|u_m|^\alpha \leq E^\alpha \in L^1(\Omega), \quad |u_m|^{\alpha+1} \leq F^{\alpha+1} \in L^1(\Omega) \quad \dots\dots\dots(7)$$

También, obviamente, se tiene para $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$u_m^\alpha(x)w(x) \rightarrow u_\varepsilon^\alpha(x)w(x) \quad \text{C.S en } \Omega \quad \text{y}$$

$$\|E^\alpha |W|\|_{L_1} = \int_{\Omega} |E^\alpha(x)| |W(x)| dx = \int_{\Omega} |E(x)|^\alpha |W(x)| dx \leq \|E\|_{L^\alpha}^\alpha \|W\|_{L^q(\Omega)} < \infty$$

Por la desigualdad de Holder y las inmersión continua de $L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

Luego tenemos por (7) $|u_m w|^\alpha \leq E^\alpha |w|$ para $E^\alpha w \in L^1(\Omega)$, así

$$|u_m^\alpha(x)w(x)| \leq E^\alpha(x)|w(x)| \in L^1(\Omega)$$

Luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} (u_m^+(x))^\alpha w(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+(x))^\alpha w(x) dx \quad \dots\dots\dots(8)$$

Por la continuidad de la aplicación T se tiene que

$$u_m^{\alpha+1}(x) \rightarrow u_\varepsilon^{\alpha+1}(x) \quad \text{c. s en } \Omega.$$

Y de (7) se tiene que $|u_m(x)|^{\alpha+1} \leq F^{\alpha+1}(x) \quad F^{\alpha+1} \in L^1(\Omega)$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \rightarrow \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

Así de (8) y (9) tenemos la siguiente convergencia

$$\left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+(x))^{\alpha} w \, dx \rightarrow \left(\int_{\Omega} \frac{(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^+(x))^{\alpha} w \, dx \dots\dots\dots(10)$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Ahora probaremos que $A(x) = g(x, \nabla u_{\varepsilon})$

Como (3) es lineal respecto a $w \in V_{i_0}$ la ecuación (3) es válida para las combinaciones lineales de los w , es decir

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_m^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} w \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) w \, dx, \quad \forall w \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$$

Por la densidad y continuidad obtenemos

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla v \, dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}(y)}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} v \, dx + \int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) v \, dx,$$

$$\forall v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(11)$$

Ahora estamos interesados en probar que

$$u_m \rightarrow u_{\varepsilon} \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(12)$$

(donde (u_m) representa una subsucesión

de la sucesión original $(u_m)_{m \geq 1} \subseteq V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, para después verificar que u es en efecto solución débil de (1), vía un pasaje al límite.

Consideremos $v = u_m - u_{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en (11) resulta

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla (u_m - u_{\varepsilon}) \, dx = \underbrace{\left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} (u_m - u_{\varepsilon}) \, dx}_{I_1} +$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} f(x, u_m, \nabla u_m) (u_m - u_{\varepsilon}) \, dx}_{I_2} \dots\dots\dots(13)$$

Por otro lado si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $|\nabla u|^{p-2} \nabla u$ es medible y

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \Big|^{p'} dx = \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{(p-1)p'} dx = \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^p dx = |\nabla u_{\varepsilon}|_p^p = \|u_{\varepsilon}\|^p < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \rightarrow p = p'(p-1)\right)$$

Luego $X = |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \in L^{p'}(\Omega)$ y como $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) = (W^{1,p}(\Omega))'$

Por otro lado tenemos de (1) tenemos

$u_m \rightharpoonup u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_m - u_{\varepsilon} \rightharpoonup 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\left\langle |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}, u_m - u_{\varepsilon} \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

Esto es

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot (\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}) dx \rightarrow 0 \dots \text{para } |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \in W^{-1,p'}(\Omega) \dots (14)$$

Veamos que el miembro de la derecha en (13) tiende a cero cuando $m \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} (u_m - u_{\varepsilon}) dx \right| \leq \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \right| \left| \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} |u_m - u_{\varepsilon}| dx \right| \leq \left| \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \right| \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha} |u_m - u_{\varepsilon}| dx \\ &\leq (I_m + \varepsilon)^{-\beta} I_m^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|u_m - u_{\varepsilon}\|_{\alpha+1} \leq \varepsilon^{-\beta} C_1 \|u_m - u_{\varepsilon}\|_{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\text{donde } I_m = \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha+1} dx = \|u_m^+\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq C_k \|\nabla u_{\varepsilon}\|_p^{\alpha+1} \leq C_k (K_0)^{\alpha+1} = K, \quad C_1 = K^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

como $\alpha < \alpha+1 < p$ $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ inmersión compacta para $1 \leq q$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha}(\Omega)$$

Entonces $u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $L^{\alpha+1}(\Omega)$

Luego $|I_1| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty \dots (15)$

$$|I_2| \leq \left| g(x, \nabla u_m) \right|_{\frac{p}{\gamma_2}} |u_m - u_\varepsilon|_p + \left| h(x, u_m) \right|_{p'} |u_m - u_\varepsilon|_p$$

$$\leq \left[\left(|a_2|_{\frac{p}{\gamma_2}} + \left| b_2 \right|_{\frac{p}{\gamma_2}} \left| \nabla u_m \right|_p^{\gamma_2} \right) + C \left(|a_1|_{p'} + |b_2|_{\infty} \left| \nabla u_m \right|_p^{p-1} \right) \right] |u_m - u_\varepsilon|_p \rightarrow 0 \dots (16)$$

Ya que de (1), $\left(\left| \nabla u_m \right|_p \right)$ está acotada y de la inmersión compacta de

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ (inmersión compacta) se tiene que}$$

$$\left| u_m - u_\varepsilon \right|_p \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

Consecuencia en (13)

$$I_1 + I_2 \rightarrow 0, \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

Luego, como

$$m_0 \leq M(\left\| \nabla u_m \right\|_p^p) \text{ entonces}$$

$$m_0 \int_{\Omega} \left| \nabla u_m \right|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx \leq M(\left\| \nabla u_m \right\|_p^p) \int_{\Omega} \left| \nabla u_m \right|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx = I_1 + I_2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

Entonces

$$\int_{\Omega} \left| \nabla u_m \right|^{p-2} \nabla u_m (\nabla u_m - \nabla u_\varepsilon) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty \dots (17)$$

Como

$\nabla u_m(x), \nabla u_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n$, entonces por la desigualdad de Tartar

se tiene que

$$C_p \left| \nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x) \right|^p \leq \left(\left| \nabla u_m(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) - \left| \nabla u_\varepsilon(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) \right) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x))$$

$$\int_{\Omega} \left| \nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x) \right|^p dx \leq \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} \left(\left| \nabla u_m(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) - \left| \nabla u_\varepsilon(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) \right) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx$$

$$= \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} \left| \nabla u_m(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx - \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} \left| \nabla u_\varepsilon(x) \right|^{p-2} \cdot \nabla u_\varepsilon(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx$$

de (14) y (17) tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_m(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_{\varepsilon}(x)) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-2} \cdot \nabla u_{\varepsilon}(x) (\nabla u_m(x) - \nabla u_{\varepsilon}(x)) dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

Luego tenemos que

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}|^p dx \leq \frac{1}{C_p} \int_{\Omega} (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m - |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}) \cdot (\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}) dx \rightarrow 0$$

Esto es

$$\|u_m - u_{\varepsilon}\|^p = \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u_{\varepsilon}|^p dx \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

Por tanto $u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$(18)

Lo que se demuestra (12).

Por otro lado tenemos

$u_m \rightarrow u_{\varepsilon}$ en $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ entonces $\nabla u_m \rightarrow \nabla u_{\varepsilon}$ en $L^p(\Omega)$ y por la continuidad de la aplicación T en (6.1) tenemos que

$$|\nabla u_m|^{p-2} \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \text{ en } \mathbb{R}$$

luego

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} |\nabla u_{\varepsilon}| \text{ en } L^{p'}(\Omega)$$

como

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \in L^{p'}(\Omega), \text{ y } v \in W_0^p(\Omega)$$

entonces

$$\int_{\Omega} \left| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \right| dx \leq \left\| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| \right\|_{p'} \|v\|_p \text{ entonces } |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \in L^1(\Omega)$$

$$|\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} |\nabla u_{\varepsilon}| v \text{ en } L^1(\Omega)$$

así

$$|\nabla u_m(x)|^{p-2} \nabla u_m(x) v(x) \rightarrow |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}(x) v(x) \text{ c.t.p en } \Omega$$

$$\left| |\nabla u_m|^{p-2} |\nabla u_m| v \right| \leq R, \quad R \in L^1(\Omega)$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (19)$$

Por otro lado de (1) y (2) tenemos que

$$\|u_m\|^p \rightarrow \theta \quad \text{y} \quad M(\|u_m\|^p) \rightarrow M(\theta) \dots (20)$$

Como $u_m \rightarrow u_\varepsilon$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces

$$\|u_m\| - \|u_\varepsilon\| \leq \|u_m - u_\varepsilon\|_{W_0^1(\Omega)}$$

entonces

$$\|u_m\| \rightarrow \|u_\varepsilon\| \quad m \rightarrow \infty \quad \text{en } \mathbb{R},$$

entonces por la continuidad de T (6.1)

$$\|u_m\|^p \rightarrow \|u_\varepsilon\|^p \dots (21)$$

Por la unicidad de limite de (20) y (21) tenemos que $\theta = \|u\|^p$

Luego de la continuidad de M y de (1) tenemos

$$M(\|u_m\|^p) \rightarrow M(\|u_\varepsilon\|^p) \dots (22)$$

Luego de (19) y (22) obtenemos que

$$M(\|u_m\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx \rightarrow M(\|u_\varepsilon\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (23)$$

Por (6) tenemos

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x) w \, dx, \quad \forall w \in L^q(\Omega)$$

y por (18) $u_m \rightarrow u_\varepsilon$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

entonces $\nabla u_m \rightarrow \nabla u_\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$, y como g es localmente Holder continua

entonces

$$g(x, \nabla u_m) \rightarrow g(x, \nabla u_\varepsilon)$$

y por (5)

$$|g(x, \nabla u_m)|_{p'} \leq R, \quad R \in L^1(\Omega)$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) v dx \rightarrow \int_{\Omega} g(x, \nabla u_\varepsilon) v dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega) \dots \dots \dots (24)$$

Lo que implica $A(x) = g(x, \nabla u_\varepsilon)$.

Recién estamos en condiciones de pasar al límite (11)

$$M\left(\|u_m\|^p\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_m^{+\alpha} v dx + \int_{\Omega} h(x, u_m) v dx + \int_{\Omega} g(x, \nabla u_m) v dx$$

$$\forall v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = W_0^{1,p}(\Omega)$$

Entonces, utilizando las convergencias (5), (10) (19) y (13), (22) y (24) y haciendo $w = v$ tenemos

$$M\left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v dx \dots \dots \dots (25)$$

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Se obtiene la existencia de $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir:

i) $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) $M\left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon^{+\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_\varepsilon^{+\alpha} v dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Esto es u_ε es solución débil del problema (2).

5.3 POSITIVIDAD DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA (2)

Sea ahora $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una solución débil de (2) y denotemos con

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) < 0\}$$

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) > 0\}$$

Definamos $u_\varepsilon^- = \max\{-u_\varepsilon, 0\}$.

Como $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-$ entonces $u_\varepsilon^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$, luego

$$\nabla u_\varepsilon^- = \begin{cases} -\nabla u_\varepsilon & \text{en } \Omega^- \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \Omega^- \end{cases}$$

Haciendo $v = -u_\varepsilon^-$ en (25) resulta

$$\begin{aligned} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx &= \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^+} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \\ &\quad + \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \left[\int_{\Omega^+} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla (-u_\varepsilon^-) dx \right] &= \left(\int_{\Omega} \frac{(u_\varepsilon^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \varepsilon \right)^{-\beta} \left[\int_{\Omega^+} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} (u_\varepsilon^+)^{\alpha} (-u_\varepsilon^-) dx \right] \\ &\quad + \left[\int_{\Omega^+} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx + \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon^-) dx \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

Como

$$f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = [h(x, u_\varepsilon) + g(x, \nabla u_\varepsilon)] \geq 0 \text{ y como para } x \in \Omega^- \text{ } -u_\varepsilon(x) > 0$$

Luego de (26) tenemos

$$-M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_{\Omega^-} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (-u_\varepsilon) dx \geq 0$$

luego

$$M \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \right) \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq 0$$

Y como que $M(s) \geq m_0 > 0$

Entonces

$$\|\nabla u_\varepsilon^-\|_p^p = \int_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon^-|^p dx \leq 0 \rightarrow \|\nabla u_\varepsilon^-\|_p = 0$$

entonces

$$\nabla u_\varepsilon^- = 0 \quad \text{c.s. en } \Omega^-$$

Luego será $\nabla u_\varepsilon^- = 0$ c.s. en Ω .

como

$$\|u_\varepsilon^-\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u_\varepsilon^-\|_p = 0 \quad \text{c.s. en } \Omega$$

Luego $u_\varepsilon^- = 0$ c. s en Ω .

Como $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^- = u_\varepsilon^+ \geq 0$ c. s en Ω (27)

Luego $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil de (2), además de la hipótesis (f_0) y (i) y el principio del máximo obtenemos $u_\varepsilon > 0$

Luego sustituyendo por $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+$ en (25) tenemos

$$i) u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$ii) M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_\varepsilon^\alpha v dx + \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) v dx$$

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots(28)$$

Por tanto u_ε es solución débil del problema (2).

5.4 PASAJE AL LIMITE: SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (1)

Demostración del teorema 5.1

Por el lema 5.1, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_\varepsilon > 0$ en Ω que es la solución débil del problema (2). Además, procediendo similarmente, como la obtención de la acotación para $(u_{m\varepsilon})$ dada en (pág. 52-53)

resulta:

$$\|u_\varepsilon\|_{1,p} \equiv \|u_\varepsilon\| \leq c \dots\dots\dots (29)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y $u_{\frac{1}{n}} \equiv u_n$, donde es solución débil del problema perturbado.

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \Delta_p u_n = \left(\int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} (u_n^+)^{\alpha} + f(x, u_n, \nabla u_n) \\ u_n > 0 \quad \quad \quad \text{en } \Omega \\ u_n = 0 \quad \quad \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Obtenida en el lema 5.1.

Por la inmersión continua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$ existe c_α tal que

$$\|u_n\|_{\alpha+1} \leq c_\alpha \|u_n\|_{1,p} \leq c_\alpha c_x \dots\dots\dots (30)$$

Observe que $c_\alpha \cdot n \cdot c_x$ depende de n .

Como $f(x, u_n, \nabla u_n) > 0$, $u_n > 0$ se tiene de (3)

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \Delta_p u_n \geq \left(\int_{\Omega} u_n^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} u_\varepsilon^\alpha \dots\dots\dots (31)$$

Pero de (30), para $0 < \varepsilon < 1$

$$0 < \int_{\Omega} u_m^{\alpha+1} dx + \varepsilon \leq (c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + \varepsilon < (c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + 1$$

Lo que implica

$$\left(\int_{\Omega} u_m^{\alpha+1} dx + \varepsilon \right)^{-\beta} > \left[(c_\alpha c_x)^{\alpha+1} + 1 \right]^{-\beta} =: K > 0 \dots\dots\dots (32)$$

Luego de (31) y (32).

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \Delta_p u_m \geq K u_m^\alpha \dots\dots\dots (33)$$

Observe aquí que cualquier $K' > 0$ tal que $K' \leq K$ satisficera (33).

Con la finalidad de usar un criterio de comparación (para poder analizar el termino no local sin dificultad) hallaremos una solución $\underline{v}$ del problema auxiliar.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right) \Delta_p v = K v^{\alpha} & \text{en } \Omega \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (34)$$

Vale la pena observar que este problema admite solución $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $v > 0$ en Ω para $\alpha > 1$, que puede ser obtenida, por ejemplo, minimizando el funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (que es de clase C^1)

$$J(v) = \frac{1}{p} \widehat{M} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right) - \frac{K}{\alpha+1} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx$$

$$\text{Donde } \widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$$

Para construir la subsolución $\underline{v}$ de (34), proponemos $\underline{v} = t\varphi_1$

Para algún $t > 0$ y φ_1 es la primera autofunción del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p z = \lambda |z|^{p-2} z & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Sabemos que

ver [30]

- i) $\varphi_1 > 0$ en Ω
- ii) $\varphi_1 \in C^{1,r}(\overline{\Omega})$
- iii) φ_1 puede normalizarse $\|\nabla \varphi_1\|_p = 1$.

Sea también λ_1 el correspondiente autovalor.

Para determinar t , de la condición de ser subsolución $\underline{v}$ se tiene:

$$-M \left(t^p \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p dx \right) \Delta_p (t\varphi_1) \leq K (t\varphi_1)^{\alpha}$$

Luego

$$M(t^p \lambda_1) t^{p-1} \lambda_1 \varphi_1^{p-1} \leq K t^\alpha \varphi_1^\alpha$$

$$\rightarrow m_1 \lambda_1 \varphi_1^{p-1-\alpha} t^{p-1-\alpha} \leq K$$

Esto es

$$0 < t \leq \left(\frac{K}{m_1 \lambda_1 \varphi_1^{p-1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p-1-\alpha}}$$

Así para t en este intervalo $\underline{v} = t\varphi_1$ es subsolución del problema (34), esto es

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^p dx \right) \Delta_p \underline{v} \leq K \underline{v}^\alpha \dots\dots\dots (35)$$

Por otro lado, de (31) y (32):

$$-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) \Delta_p u_m \geq K u_m^\alpha \dots\dots\dots (36)$$

Restando (35) y (36), usando luego $w = (\underline{v} - u_m)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^p dx \right) |\nabla \underline{v}|^{p-2} \nabla \underline{v} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right) |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \right] \cdot \nabla w dx \\ & \leq K \int_{\Omega} (\underline{v}^\alpha - u_m^\alpha) w dx \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

Supongamos, por contradicción, que $\Omega^+ = \{x \in \Omega : \underline{v}(x) > u_m(x)\} \neq \emptyset$

De (37) y la monotonía del operador $-M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u$ resulta

$$\begin{aligned} c_p \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|_p^p & \leq K \int_{\Omega^+} (\underline{v}^\alpha - u_m^\alpha) (\underline{v} - u_m)^+ dx \leq K \int_{\Omega^+} ((\underline{v} - u_m)^+)^{\alpha+1} dx \leq K c_\alpha \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|_p^{\alpha+1} \\ \Rightarrow (c_p - K c_\alpha) \left\| \nabla (\underline{v} - u_m)^+ \right\|^{p-(\alpha+1)} & \leq 0 \end{aligned}$$

Luego, tomando K suficientemente pequeño, obtenemos $(\underline{v} - u_m)^+ = 0$ y así

$\underline{v} \leq u_m$ en Ω^+ , lo que es una contradicción, por tanto $\Omega^+ = \emptyset$ y así

$$0 < t \lambda d_\Omega(x) < t \varphi_1(x) < \underline{v}(x) \leq u_m(x), \quad c.t.p \ x \in \Omega \dots\dots\dots (38)$$

$$\text{donde } d_{\Omega}(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

Observe que haciendo $I_n = \int_{\Omega} u_n^{\alpha+1}$, tenemos por (38)

$$(u_n(x))^{\alpha+1} \geq c_0 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} I_n = \int_{\Omega} \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx \geq \frac{c_0 |\Omega|}{\alpha+1}$$

Luego

$$0 < \left(\frac{1}{\alpha+1} I_m + \frac{1}{m} \right)^{-\beta} \leq \left(\frac{c_0 |\Omega|}{\alpha+1} \right)^{-\beta} \equiv K_0$$

Visto estas estimaciones preliminares, vayamos a la convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

De principio, por (29) y de la reflexividad de $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtenemos, una subsucesión de (u_n) que seguiremos denotando con (u_n) , tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \dots\dots\dots (39)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^* \dots\dots\dots (40)$$

$$u_n \rightarrow u(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \dots\dots\dots (41)$$

Además de (38) se tiene

$$u(x) \geq v(x) > 0, \text{ c.t.p. } x \in \Omega \dots\dots\dots (42) \text{ y de (40)}$$

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^{\alpha+1}(\Omega) \quad (\text{pues } \alpha+1 < p < p^*) \dots\dots\dots (43)$$

En consecuencia

$$I_n = \int_{\Omega} u_n^{\alpha+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} u^{\alpha+1} = I \dots\dots\dots (44)$$

También de (38)

$$I_n \geq c_0 > 0 \Rightarrow I \geq c_0 > 0. \dots\dots\dots (45)$$

De (44) y (45), observando que por el teorema de convergencia dominada

$$\int_{\Omega} u_n^{\alpha} \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Obtenemos

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}I_n + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_n^{\alpha} \varphi dx \rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}I\right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (46)$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\int_{\Omega} h(x, u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x, u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (47)$$

Por otro lado, de la definición de solución débil en (2) haciendo $\varphi = u_n - u$

$$\begin{aligned} & M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &= \left(\frac{1}{\alpha+1}I_n + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u_n^{\alpha} (u_n - u) dx + \int_{\Omega} h(x, u_n) (u_n - u) dx + \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) dx \\ &\leq K_0 \left| u_n^{\alpha} \right|_{\alpha+1} \|u_n - u\|_{\alpha} + \left| h(x, u_n) \right|_{\frac{p}{\gamma_1}} \|u_n - u\|_s + \left| g(x, u_n) \right|_{\frac{p}{\gamma_2}} \|u_n - u\|_q \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{p} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{\gamma_2}{p} = 1, \quad 1 < s, \quad q < p^*.$$

Luego

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0, \quad \text{Si } n \rightarrow \infty$$

Aplicando la propiedad del operador $-\Delta_p$, de ser un operador del tipo

(s_+) . Ver [34] resulta

$$u_m \rightarrow u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Procediendo similarmente a la obtención del límite (23), obtenemos

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \dots (48)$$

$$\int_{\Omega} g(x, \nabla u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} g(x, \nabla u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \dots (49)$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (3), usando las convergencias (46), (47),

(48) y (49) obtenemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisface

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \left(\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx \right)^{-\beta} \int_{\Omega} u^{\alpha} \varphi dx + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \varphi dx$$

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Esto es u es solución débil del problema (1)

5.5 UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Teorema 2.- Asume que se verifican (M_0) y (f_0) y $2 \leq p < +\infty$.

Además, supongo que

(M_1) $M : [0, +\infty[\rightarrow [m_0, +\infty[$ es creciente

(f_1) (i) $\exists b_3 \geq 0$ talque $(h(x, s) - h(x, t))(s - t) \leq b_3 |s - t|^p \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$
c.t.p $x \in \Omega$

(ii) $\exists b_4 \geq 0$ talque

$|g(x, \xi) - g(x, \eta)| \leq b_4 |\xi - \eta|^{p-1}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \quad \text{c.t.p } x \in \Omega$

Entonces el problema

$$(4) \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u = f(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Admite una única solución débil, si $m_0 > \left[\frac{b_3}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} + \frac{b_3}{\lambda_1} \right]$

Donde λ_1 es el primer autovalor del operador $-\Delta_p$

Demostración. – procediendo de manera similar, como en la demostración del teorema (1), obtenemos la existencia de la solución.

Para probar el resultado de unicidad requerimos de la siguiente afirmación.

Afirmación: El operador $T : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p}(\Omega)$

definido por:

$$\langle Tu, v \rangle = M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

es monótono.

En efecto, sean $L : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por

$$L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ y}$$

$$\phi(u) = \frac{1}{p} \tilde{M}_1(L(u)), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

donde $\tilde{M}(t) = \int_0^t M(s) ds, \quad \forall t \geq 0$

Luego, obtenemos $\langle L'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx$ y

$$\langle \phi'(u), v \rangle = M(L(u)) \langle L'(u), v \rangle = M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle Tu, v \rangle$$

En consecuencia $\phi' = T$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$

Luego, bastará analizar las propiedades de ϕ' para determinar las propiedades de T .

Se tiene:

a) L es estrictamente convexo.

En efecto de la desigualdad

$$\langle |\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta, \xi - \eta \rangle \geq c_p |\xi - \eta|^p, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m \quad p \geq 2$$

Resulta

$$\langle L'(u) - L'(v), u - v \rangle = p \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx$$

$$\geq pc_p \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^p dx > 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \neq v$$

Luego $\langle L'(u) - L'(v), u - v \rangle > 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \neq v$

En consecuencia, por proposición 25.10 [36], L es estrictamente convexo.

b) ϕ es estrictamente convexo.

En efecto, como M es creciente, $\tilde{M}$ es convexo en $[0, +\infty[$.

Luego, para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y $u \neq v$ y $s, t \in]0, 1[$, con $s + t = 1$

$$\text{resulta } \tilde{M}(L(su + tv)) < \tilde{M}(sL(u) + tL(v)) \leq s\tilde{M}(L(u)) + t\tilde{M}(L(v))$$

y así $\phi = \frac{1}{p} \tilde{M}$ es estrictamente convexo.

En consecuencia, de a) y b) aplicando nuevamente la proposición

25.10 [36] resulta que ϕ' es estrictamente monótono, y por tanto T lo es.

Retomando a la prueba de unicidad, definamos:

$$S: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \quad \text{dado} \quad \text{por}$$

$$\langle Su, v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

De la condición (f_1) resulta que S está bien definido.

Así podemos reescribir el problema (3), como $(T - S)u = 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Para demostrar la unicidad, bastará probar que $T - S: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ es inyectiva.

Sean u_1 y $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dos soluciones de (3) tal que

$$(T - S)(u_1) = (T - S)(u_2). \text{ Luego}$$

$$\langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle Su_1 - Su_2, u_1 - u_2 \rangle \quad (4.1)$$

Aplicando Lema 3 de [35], las hipótesis (M_1) y (f_1) , (4.1) y la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned} m_0 \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx &\leq \langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle Su_1 - Su_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\leq \int_{\Omega} (f(x, v_1, \nabla u_1) - f(x, v_2, \nabla u_2))(u_1 - u_2) dx \\ &\leq \int_{\Omega} h(x, u_1) - h(x, v_2) \cdot (u_1 - u_2) dx + \int_{\Omega} |g(x, \nabla u_1) - g(x, \nabla v_2)| (u_1 - u_2) dx \\ &\leq b_3 \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^p dx + b_4 \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{p-1} |u_1 - u_2| dx \\ &\leq b_3 \frac{1}{\lambda_1} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p + b_4 \left[\frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^p dx \right] \\ &\leq \left(\frac{b_3}{\lambda_1} + \frac{b_4}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} \right) |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p \end{aligned}$$

Luego

$$\left\{ m_0 - \left[\frac{b_3}{\lambda_1} + \frac{b_4}{\lambda_1 p} + \frac{b_4(p-1)}{p} \right] \right\} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_p^p \leq 0 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

La hipótesis el termino entre llaves es positiva, y así resulta $|\nabla u_1 - \nabla u_2|_p = 0$

Lo que implica $u_1 = u_2$

CONCLUSIONES

Del proceso de solución del problema podemos extraer las siguientes conclusiones.

1.- Se demostró la Existencia del problema (1), para ello se consideró una ecuación auxiliar (2) el cual expresó en su forma variacional para encontrar la solución débil utilizando el método de Galerkin, que en términos rápidos consiste en aproximarse a la solución del problema a través de espacios de dimensión finita.

2.- Se demostró la unicidad de la solución del problema auxiliar (2) y como consecuencia la unidad de solución del problema (1)

3.- El teorema del ángulo agudo, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la desigualdad de Tartar y las propiedades del Análisis Funcional fueron los pilares para encontrar la solución débil de (1)

4.- La presente investigación nos permitió obtener las siguientes conclusiones

- La solución del problema planteado (1) está en el universo de los espacios $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega)$ y es positiva
 - para encontrar la solución del problema (1) se consideró una base, luego se obtuvo espacios de dimensión finita a través de los cuales se aproximó a la solución
- 5.- Considero que la metodología que se utilizó en la resolución de existencia y unicidad puede utilizarse en futuras investigaciones similares al problema (1) y que involucren el operador P-Laplaciano

REFERENCIAS BIBLIOGRAFIA

- [1] Adams, R. , Fourier, J. ; sobolev space. Elsevier. second edition (2003)
- [2] CO. Alves, F.J.S.A. Correa and T.F Ma, 'Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type', Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.
- [3] CO. Alves and F.J.S.A. Correa, 'On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator', Comm. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001), 43-56
- [4] Burger, Raimud. Ecuaciones Diferenciales Parciales. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Concepción 2021
- [5] Benboubker, M.; Azroul, E.; Barbara, A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growth. Electron. J. Differ. Equ. 2011,
- [6] Brezis H. Analyse fonctionnelle, Theorie et Applications. Collection Mathematiques Appliquées Pour la Maitrise. Masson (1987)
- [7] E. Cabanillas L. §, Luis Z. Huaranga M. A nonlocal $p(x)$ & $q(x)$ elliptic transmission problem with dependence on the gradient. International Journal of Applied Mathematics. Volume 34 No. 1 2021, 93-108
- [8] F. J. S. A. Corrêa, R.G. Nascimento, On the Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic Equation with a p Kirchhoff-Type Term, Int. J. Math. Sc. (2008) Article ID 364085 doi:10.1155/20
- [9] F. J.S.A. Correa, On an Elliptic Equation Involving a Kirchhoff Term and a Singular Perturbation *The Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon S* Volume 14, Number 1 (2007), 15-24.
- [10] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, On an Elliptic equation of p -Kirchhoff type via variational methods, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006) 263”
- [11] F.J.S.A. Correa & S.D.B. Menezes, Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method, Electronic Journal of Differential Equations, (2004), 1-10.
- [12] F.J.S.A. Correa and G. M. Figueiredo, 'On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration method', Bound. Value Probl. (to appear)
- [13] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhauser Advanced Texts, 2000.
- [14] M. Chipot & B. Lovat, On the asymptotic behavior of some nonlocal problems, Positivity, 3(1999), 65-81.
- [15] J. Chabrowski and J. Yang, 'Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponents', Adv. Differential Equations 2 (1997), 231-25

- [16] Dumitru Motreanu, Viorica v. Motreanu and Nikolaos S. Papageorgiou.
Multiple constant sign and nodal solutions for nonlinear Neumann eigenvalue problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X (2011), 729-755
- [17] Furter J., and Grinfeld M., Local vs. nonlocal interactions in population dynamics, J. Math. Biol., 27 (1989), 65–80.
- [18] D.G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, Lecture Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, (1982).
- [19] Fan, X.; Zhao, D. A class of De Giorgi type and Hölder continuity. Nonlinear Anal. 1999, 36, 295–318.
- [20] Gatica Gabriel Introducción al análisis funcional: Teoría y aplicaciones. Editorial reverté. España (2014)
- [21] Gatica, Massiel. Espacio de funciones: Una introducción a los espacios de Sobolev. Tesis (2011).
- [22] Ge S. , Yuan R., Zhang X. , Global existence, blow-up and dynamical behavior in a nonlocal parabolic problem with variational structure , Nonlinear Anal. Real World App. 76 (2024) 104007
- [23] [26] . Ho, K.; Sim, I. A-priori bounds and existence for solutions of weighted elliptic equations with a convection term. Adv. Nonlinear Anal. 2017, 6, 427–445.
- [24] N.I. Kavallaris, T. Suzuki, On the dynamics of a non-local parabolic equation arising from the Gierer–Meinhardt system, Nonlinearity 30 (2017) 1734–1761, <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6544/aa64b2>
- [25] Keener J 1978 Activators and inhibitors in pattern formation Stud. Appl. Math. 59 1–23
- [26] Kreyszig, Erwin. Introductory functional analysis with applications. Copyright © 1978, by John Wiley & Sons. Inc.
- [27] Kirchhoff; Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883
- [28] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, Dunod, Paris (1969).
- [29] [12] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Instituto de Matematica, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (1978)
- [30] P. Lindqvist, On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0$, Proc. Amer. Math. Soc. Volume 109, Number 1, 157-164, May 1990.
- [31] C. Liu , J. Wang and Q. Gao , Existence of nontrivial solutions for p-Kirchhoff type equations, Bound. Val. Prob. (2013) 2013-279
- [32] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. Espacos de Sobolev, Iniciacao aos problemas elipticos noa Homogeneos. Rio de Janeiro RJ 1999.
- [33] Motreanu, D. Quasilinear Dirichlet problems with competing operators and convection. Open Math. 2020, 18, 1510–1517
- [34] Ni W-M 2011 The Mathematics of Diffusion (CBMS-NSF Series) (Philadelphia: SIAM

