

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Influencia de las ecuaciones diferenciales en
el análisis de estructuras bajo acciones
dinámicas**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática**

Autor:

Mg. Gallardo Mendoza, Juan Carlos
Código ORCID: 0000-0001-8850-7356

Asesor:

Dr. Cortez Gutierrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de Investigación

**Matemática aplicada a las ciencias, ingeniería y
humanidades, en general**

Nuevo Chimbote - PERÚ
2026



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CERTIFICACIÓN DEL ASESOR

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la tesis titulada: ***"Influencia de las ecuaciones diferenciales en el análisis de estructuras bajo acciones dinámicas"***; elaborado por el Mg. Juan Carlos Gallardo Mendoza, para obtener el grado de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado.

Nuevo Chimbote, julio de 2026

Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
VOCAL
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

AVAL DE CONFORMIDAD DEL JURADO

Tesis Titulada: ***"Influencia de las ecuaciones diferenciales en el análisis de estructuras bajo acciones dinámicas"***; elaborado por el **Mg. Juan Carlos Gallardo Mendoza**,

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

Dr. Teodoro Moore Flores
PRESIDENTE

CODIGO 0000-0002-1755-3459

DNI N° 32763522

Dr. Pedro Gustavo Reyes Carrera
SECRETARIO

CODIGO ORCID: 0000-0003-4854-2952

DNI N° 32861402

Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
VOCAL

CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734

DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los diez días del mes de julio del año 2026, siendo las 11:00 horas, en el aula P-02 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 309-2026-EPG-UNS de fecha 20.04.2026, conformado por los docentes: Dr. Teodoro Moore Flores (Presidente), Dr. Pedro Gustavo Reyes Carrera (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis intitulada: **"INFLUENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES DINÁMICAS"**, presentado por el tesista Juan Carlos Gallardo Mendoza, egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 607-2026-EPG-UNS de fecha 07 de julio de 2026.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de Diecinueve.

Siendo las 12:30 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Teodoro Moore Flores
Presidente


Dr. Pedro Gustavo Reyes Carrera
Secretario


Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
Vocal / Asesor

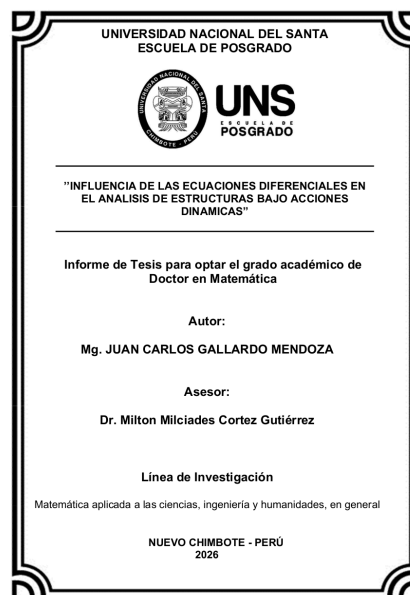


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: JUAN CARLOS GALLARDO MENDOZA
Título del ejercicio: DOCTORADO 2026
Título de la entrega: INFLUENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ANALI...
Nombre del archivo: INFORME_FINAL_-_DOCTORADO_-_GALLARDO.docx
Tamaño del archivo: 14.71M
Total páginas: 131
Total de palabras: 20,959
Total de caracteres: 114,333
Fecha de entrega: 20-mar-2026 03:55p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2908445670



INFLUENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES DINAMICAS

INFORME DE ORIGINALIDAD

4%

INDICE DE SIMILITUD

4%

FUENTES DE INTERNET

0%

PUBLICACIONES

1%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

www.coursehero.com

Fuente de Internet

<1 %

2

qdoc.tips

Fuente de Internet

<1 %

3

issuu.com

Fuente de Internet

<1 %

4

repositorio.uns.edu.pe

Fuente de Internet

<1 %

5

ocw.upm.es

Fuente de Internet

<1 %

6

ri-ng.uaq.mx

Fuente de Internet

<1 %

7

dokumen.pub

Fuente de Internet

<1 %

8

repositorio.unal.edu.co

Fuente de Internet

<1 %

9

es.scribd.com

Fuente de Internet

<1 %

10

m.moam.info

Fuente de Internet

<1 %

doczz.com.br

DEDICATORIA

A todos los profesionales del Perú por su dedicación y esfuerzo para capacitarse y estar siempre a la vanguardia de la ciencia y la tecnología en las escuelas de postgrado a nivel nacional

AGRADECIMIENTO

La presente es la culminación de una investigación realizada con mucho esfuerzo para obtener los resultados esperados, para lo cual agradezco primeramente a Dios, por iluminar mi camino y guiar mis pasos.

A mi esposa Consuelo por acompañarme y estar siempre presente en las buenas y en las malas hasta hacer realidad esta anhelada tesis

Al Dr. Milton M. Cortez Gutiérrez, por haber confiado en mi persona, por los sabios consejos impartidos durante la revisión de esta investigación y sus importantes contribuciones en la asesoría durante el desarrollo del presente trabajo de investigación

A las autoridades de la Universidad Nacional del Santa y a la autoridades de la Escuela de Posgrado de la UNS, por haberme dado la oportunidad de seguir estudios de doctorado en sus aulas

INDICE

CERTIFICACIÓN DEL ASESOR	ii
ACTA DE APROBACIÓN DEL JURADO EVALUADOR	iii
RECIBO DE TURNITIN	vii
DEDICATORIA	xi
AGRADECIMIENTO	xii
INDICE GENERAL	xiii
INDICE DE TABLAS	xvi
INDICE DE FIGURAS	xvi
RESUMEN	xviii
Abstract	ix
Introducción	xx
CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	23
1.1 Descripción y formulación del problema	23
1.1.1 Contextualización del problema	23
1.1.2 Descripción del problema:	23
1.1.3 Formulación del problema	25
1.2 Objetivos de la Investigación	26
1.3 Hipótesis de la Investigación	26
1.4 Variables e indicadores de la Investigación	27
1.5 Delimitación del estudio	27
1.6 Justificación e importancia de la investigación	29
1.6.1 Justificación	29
1.6.2 Importancia	29
CAPÍTULO II: MARCO TEORICO	30
2.1 Antecedentes de la Investigación	30
2.2 Marco conceptual de la investigación	32
2.2.1 Bases epistemológicas	33
2.2.2 Bases psicológicas.	33
2.2.3 Las herramientas de aplicación	34
2.2.4 Modelo matemático	37

2.2.5	Principio de D'Alembert.	40
2.2.6	Vibraciones libres amortiguadas	42
2.2.7	Vibraciones libres no amortiguadas	42
2.3	Marco conceptual según Norma sismorresistente E030	42
2.3.1	Zonificación	42
2.3.2	Perfiles del suelo:	44
2.3.3	Parámetros de sitio	47
2.3.4	Factor de amplificación sísmica	47
2.3.5	Categoría de las edificaciones y factor de uso (U)	48
2.3.6	Sistemas estructurales y coeficiente básico de reducción de fuerzas sísmicas(R_o)	50
2.3.7	Regularidad estructural	51
2.3.8	Factores de irregularidad	51
2.3.9	Coeficiente de reducción de las fuerzas sísmicas (R)	54
2.3.10	Consideraciones generales para el análisis estructural	54
2.3.11	Modelos para el análisis	55
2.3.12	Estimación del peso (P)	56
2.3.13	Procedimientos de análisis sísmico	56
2.3.14	Análisis estático	56
2.3.14.1	Generalidades	56
2.3.14.2	Fuerza cortante en la base	57
2.3.14.3	Distribución de la fuerza sísmica en altura	57
2.3.14.4	Periodo fundamental de vibración	58
2.3.14.5	Desplazamientos laterales relativos admisibles	59
2.3.14.6	Cargas dinámicas aplicadas a las estructuras	59
2.3.15	Sistema de un grado de libertad	61
2.3.16	Sistema de dos grados de libertad	63
2.3.17	Sistema de tres grados de libertad	64
2.3.18	Sistema de varios grados de libertad	65

2.3.19	Definición de análisis estático	65
2.3.20	Definición de análisis dinámico	68
2.3.21	Códigos y normas	72
2.3.22	Definición de sismología	73
2.3.23	Definición de efectos sísmicos	73
2.4	Marco conceptual de ecuaciones diferenciales	75
2.4.1	Definición de ecuación diferencial	75
2.4.2	Historia de ecuaciones diferenciales	76
2.4.3	Clasificación de las ecuaciones diferenciales	78
2.4.4	Aplicación del principio de D'Alembert	78
2.4.5	Ecuaciones del movimiento dinámico	79
2.4.6	Vibraciones libres sin amortiguamiento	81
2.4.7	Forma general de la ED ordinarias, lineales	82
2.4.8	Solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico para vibraciones libres sin amortiguamiento	83
CAPÍTULO III: METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN		86
3.1	Método de Investigación.	86
3.2	Tipo de Investigación.	87
3.3	Diseño de Investigación.	87
3.4	Nivel de Investigación.	88
3.5	Población y muestra	88
3.5.1	Población	88
3.5.2	Muestra	88
3.6	Operacionalización de las variables	88
3.7	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	89
3.8	Técnicas de análisis de resultados.	90
CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN		91

4.1 Introducción	91
4.2 Análisis de datos	91
4.3 Interpretación de datos	93
4.4 Interpretación de resultados	115
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	124
5.1 Conclusiones	124
5.2 Recomendaciones	130
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Factores de zona “Z”	43
Tabla 2: Clasificación de los perfiles de suelo	46
Tabla 3: Factores de suelo “S”	47
Tabla 4: Periodos T_p y T_L	47
Tabla 5: Categoría de edificaciones y factor “U”	49
Tabla 6: Categoría y sistema estructural de las edificaciones	50
Tabla 7: Sistemas estructurales	50
Tabla 8 Irregularidades estructurales en altura	52
Tabla 9: Irregularidades estructurales en planta	53
Tabla 10: Categoría y regularidad de las edificaciones	58
Tabla 11: Limite para la distorsión de entrepiso	58
Tabla 12: Definición de variables e indicadores	88
Tabla 13: Datos del modelo a analizar	93
Tabla 14: Resultados de los pesos por metros cuadrados de carga	94
Tabla 15: Calculo de los parámetros sísmicos	96
Tabla 16: Resultados de frecuencias y periodos de vibración	104
Tabla 17: Comparación de las derivas de ambos métodos (estático y dinámico)	123

INDICE DE FIGURAS

Figura N° 1: Presentación SAP 2000 V 2016	34
Figura N° 2: Ejemplo de un modelamiento de una estructura con SAP 2000	35
Figura N° 3: Presentación ATABS versión 2015	35

Figura N° 4: Modelamiento de la estructura con el ETABS v 2015	36
Figura N° 5: Hoja de EXCEL aplicado a ingeniería Civil que utilizaremos	36
Figura N° 6: Modelo estructural de 3 pisos con 4 ejes horizontales y e verticales	37
Figura N° 7: Modelo estructural del plano en planta que tomaremos como ejemplo	37
Figura N° 8: Modelo sísmico de 3 pisos en elevación	38
Figura N° 9: Modelo de edificio con vibraciones laterales debido a un sismo	38
Figura N° 10: Modelo dinámico de una edificación de n pisos	39
Figura N° 11: Modelamiento de un edificio de tres pisos con sus fuerzas	
Distribuidas y despeamientos laterales U	41
Figura N° 12: Mapa del Perú dividida en 4 zonas sísmicas	43
Figura N° 13: Carga periódica originado por la vibración de un equipo mecánico	59
Figura N° 14: Carga de impacto	60
Figura N° 15: Carga rodante	60
Figura N° 16: Estructura de un piso que representa a 1 grado de libertad	62
Figura N° 17: Estructura de 2 pisos que representa 2 grados de libertad.	62
Figura N° 18: Estructura de 3 pisos que representa 3 grados de libertad	64
Figura N° 19: Distribución de las fuerzas sísmicas basal V_b en los niveles 1...i...n	67
Figura N° 20: Distribución de los modos de vibración, frecuencias y periodos	70
Figura N° 21: Nivel de destrucción por efecto sísmico	74
Figura N° 22: Falla de San Andrés.	74
Figura N° 23: Jean-Baptista le Rond D'Alembert	79
Figura N° 24: Modelo físico de masa M, constante k y amortiguador c	80
Figura N° 25: Modelo de un sistema de 3 grados de libertad (3 niveles)	85
Figura N° 26: Grafica de las vibraciones libres no amortiguadas sinusoidales	85
Figura N° 27: Edificio de 3 niveles compuesto por una estructura aporticada.	92
Figura N° 28: Plano en planta del modelo a analizar	92
Figura N° 29: Elevación frontal del modelo a analizar	92
Figura N° 30: Resultados de los 3 modos de vibración	106
Figura N° 31: Resultados de la distribución de fuerzas y desplazamientos relativos	117

RESUMEN

La presente investigación analiza la **influencia de las ecuaciones diferenciales** en el comportamiento dinámico de estructuras, centrándose en cómo la solución de sistemas de ecuaciones de segundo orden permite predecir la respuesta sísmica y posibles fallas estructurales. La metodología empleada consistió en el modelamiento de una estructura de tres niveles mediante el cálculo de **autovalores y autovectores**, obteniendo tres modos de vibración con periodos que oscilan entre $T_1 = 0.433$ s y $T_3 = 0.118$ s. Los resultados revelaron que, bajo acciones dinámicas, los desplazamientos relativos (**derivas inelásticas**) en el primer y segundo nivel alcanzaron valores de **0.009** y **0.012** respectivamente, superando el límite normativo de **0.007**. Se concluye que la resolución matemática precisa de las ecuaciones diferenciales es crítica para la seguridad estructural, ya que permitió identificar una vulnerabilidad por falta de rigidez lateral, prediciendo fallas por deformación excesiva antes de la fase de construcción.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, análisis dinámico, modos de vibración, derivas inelásticas, rigidez estructural.

ABSTRACT

This research analyzes the **influence of differential equations** on the dynamic behavior of structures, focusing on how the solution of second-order equation systems allows for the prediction of seismic response and potential structural failures. The methodology involved modeling a three-story structure through the calculation of **eigenvalues and eigenvectors**, obtaining three vibration modes with periods ranging from $T_1 = 0.433$ s to $T_3 = 0.118$ s. The results revealed that, under dynamic actions, the relative displacements (**inelastic drifts**) in the first and second levels reached values of **0.009** and **0.012** respectively, exceeding the regulatory limit of **0.007**. It is concluded that the precise mathematical resolution of differential equations is critical for structural safety, as it allowed for the identification of vulnerability due to lack of lateral stiffness, predicting failures caused by excessive deformation before the construction phase.

Keywords: Differential equations, dynamic analysis, vibration modes, inelastic drifts, structural stiffness.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de Investigación titulado **“INFLUENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES DINÁMICAS”**, analiza cómo las ecuaciones diferenciales, mediante modelos matemáticos, describen el comportamiento (oscilaciones, vibraciones, daños) de las estructuras de edificaciones de concreto armado sometidas a cargas variables, tales como sismos o viento. Estas ecuaciones son fundamentales para el diseño sismorresistente contemplados en la norma Peruana E030, el cual evalúa la respuesta bajo terremotos para determinar su seguridad y desempeño estructural

El diseño y análisis de estructuras han experimentado una evolución drástica en las últimas décadas. Tradicionalmente, la ingeniería civil se centraba en el análisis estático, en el cual las cargas se consideran invariables en el tiempo. Sin embargo, la realidad física de las estructuras modernas, caracterizadas por una mayor esbeltez y complejidad, exige una comprensión profunda de las acciones dinámicas. Fenómenos como los sismos, las ráfagas de viento, el impacto de oleajes o las vibraciones inducidas por maquinaria generan fuerzas que varían instantáneamente, obligando a los ingenieros a abandonar los modelos deterministas simples en favor de un enfoque dinámico.

En este contexto, las ecuaciones diferenciales se presentan no solo como una herramienta de cálculo, sino como el lenguaje fundamental que describe la naturaleza del movimiento. La capacidad de una estructura para disipar energía, su inercia y su rigidez se entrelazan en sistemas de ecuaciones que gobiernan su comportamiento ante perturbaciones externas. El análisis de estas ecuaciones permite predecir la respuesta estructural, evitando fallos catastróficos derivados de fenómenos como la resonancia o la fatiga de materiales.

El problema central de la dinámica estructural reside en la resolución de la ecuación de equilibrio dinámico. Para un sistema de un grado de libertad (SDOF), wste se define por cada nivel de la estructura y se expresa mediante una ecuación diferencial de segundo orden:

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + C \frac{du(t)}{dt} + K u(t) - F(t) = 0 \quad \dots(1.0)$$

Donde cada término representa una fuerza física: inercia, amortiguamiento y restauración elástica. No obstante, en estructuras reales de múltiples grados de libertad (MDOF), la complejidad aumenta exponencialmente, requiriendo el uso de sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas y métodos numéricos de integración para obtener soluciones precisas en el dominio del tiempo o de la frecuencia (que en esta investigación no tocaremos) .

La presente investigación se justifica en la necesidad de cerrar la brecha entre la teoría matemática abstracta y la aplicación práctica en la ingeniería. A pesar de que los softwares de simulación modernos resuelven estas ecuaciones de forma automatizada, la comprensión de la influencia de las ecuaciones diferenciales es crítica para que el proyectista interprete correctamente los resultados, ajuste los parámetros de diseño y garantice la seguridad estructural bajo condiciones críticas. A través de este estudio, se analizará cómo las variaciones en los parámetros de las ecuaciones diferenciales afectan la respuesta de edificios y puentes, evaluando la sensibilidad de las estructuras ante diferentes tipos de excitación dinámica y proponiendo criterios que optimicen el desempeño estructural frente a eventos de alta intensidad.

En el **Capítulo I**, se identifica y se realiza la descripción del problema de investigación, buscando antecedentes nacionales e internacionales, en cuanto a aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en la ingeniería. A través de esta sección, se compila información de proyectos similares que ayuden a dar luces de diversos estudios sísmico estáticos y dinámicos que ayuden a predecir graves estados de fallas estructurales,

posteriormente formular el problema a través de preguntas, que relaciona las variables involucradas en la investigación, a saber, el cálculo de las vibraciones laterales máximas

Además, se hace una exposición para justificar y resaltar la importancia del trabajo de la investigación, donde se identifica el principal problema que se pretende resolver y se establecen las limitaciones de la investigación.

finalmente, se trazan los objetivos del proyecto de investigación

En el **Capítulo II**, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, en el cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

En el **Capítulo III**, se trata del Marco Metodológico, la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, se establecen los métodos y tipos de investigación, con la finalidad de trazar el camino por donde se conducirá la investigación para alcanzar los objetivos.

por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas.

Se realizará, además el diseño de la investigación para determinar y organizar las estrategias y procedimientos que permitirán la obtención de datos, su procesamiento, análisis e interpretación con el objeto de dar respuesta al problema planteado.

En el **Capítulo IV**, se realiza el análisis de los datos a utilizar en el cálculo, se interpreta los datos luego del desarrollo de los resultados se desarrolla la interpretación de los resultados y discusión del trabajo de investigación.

Finalmente, el **Capítulo V**, se logra obtener las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior, además se brinda algunas sugerencias del trabajo de investigación para dar tratamiento al problema tratado .

se hace una relación detallada de las fuentes bibliográficas tanto textuales, como virtuales, consultadas para llevar a cabo el trabajo de investigación, en sus diferentes fases.

Las fuentes consultadas se encuentran en el campo de los procesos de análisis sísmico, de la zona a intervenir, así como en el campo de las metodologías aplicadas a los proyectos de investigación y los informes de tesis, asociados al campo de investigación que nos ocupa.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 DESCRPCION Y FORMULACION DEL PROBLEMA

1.1.1 Contextualización del problema

El presente trabajo de Investigación se fundamenta básicamente en la aplicación de la solución de las ecuaciones diferenciales en el análisis de estructuras de concreto armado que están sometidas a cargas de gravedad y cargas sísmicas, las cuales originan diferente comportamiento vibratorio que pueden ser modelados a través del análisis sísmico estático y dinámico que solo puede predecirse resolviendo las ecuaciones diferenciales de su movimiento

1.1.2 Descripción del problema

El avance de la tecnología y aplicaciones modernas a la ciencia requieren herramientas matemáticas como las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones faciliten el entendimiento del comportamiento de las estructuras. Es en este ámbito surgen las principales dificultades, debido a que la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis sísmico solo origina soluciones aproximadas debido a la complejidad de las cargas a la que está sometido las estructuras hasta cierto punto de forma impredecibles. Esta naturaleza variable origina originando vibraciones y desplazamientos excesivos impredecibles en las estructuras ocasionando fallas estructurales en las edificaciones lo que puede ocasionar su colapso y generar desastres en la población.

El diseño estructural es una ciencia aplicada al servicio de la ingeniería. Actualmente, las cuales no sería posible sin el análisis de las ecuaciones diferenciales, ésta define los parámetros y análisis necesarios de emplear para

cuantificar con precisión las cargas de trabajo aplicadas sobre sistemas estructurales continuos.

Además de la magnitud y distribución de los esfuerzos y deformaciones generados en los elementos que configuran estos sistemas, como respuesta a las sollicitaciones de estas cargas. Esto se logra a partir de conocer las distintas aplicaciones de las estructuras a través de las ecuaciones diferenciales. Luego, estos resultados se contrastan con los criterios de diseño sismorresistente recomendados por las normas peruanas E030, para determinar la confiabilidad del diseño. Asimismo, es considerado un arte, pues desde sus inicios, a finales del siglo XIX y hasta la actualidad, se sigue experimentando con nuevas técnicas y formas constructivas para lograr la optimización del producto final. Calidad que abarca, por lo general, una reducción en los costos y el tiempo empleado en el proceso constructivo.

La confiabilidad dependerá del uso o aplicación de métodos y herramientas eficaces, que consideren tanto los parámetros involucrados en el análisis del diseño estructural. A fin de lograr un aporte al respecto, la ciencia ha ido desarrollando progresivamente, desde hace varias décadas, el Método de los Elementos Finitos (MEF) como una alternativa para el análisis de sistemas estructurales continuos. Luego, el MEF ha logrado consolidarse en diversos campos de la ingeniería por medio de su aplicación en algoritmos lógicos para la programación de numerosos *softwares* especializados: como el Matlab, SAP 2000, son algunos de estos. El diseño estructural es uno de ellos, ya que el MEF logra complementar su análisis con el uso de las ecuaciones diferenciales gobernantes de la mecánica de sólidos deformables.

En cuanto al planteamiento del trabajo de investigación se considera la ecuación general del movimiento dinámico que consta de la siguiente ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K = F(x) \quad \dots(1.1)$$

$$M \frac{d^2 y}{dx^2} + C \frac{d}{dx} + K - F(x) = 0 \quad \dots\dots(1.2)$$

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + C \frac{d}{dt} + K(t) - F(t) = 0 \quad \dots(1.3)$$

Donde: M es la matriz de masas, C es el coeficiente de amortiguamiento, K es la matriz de rigideces de las columnas, F es la fuerza externa y $u(t)$ son los desplazamientos en función del tiempo

1.1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Dado a que los sistemas dinámicos cuyas variables experimentan variaciones en el tiempo debido a influencias externas de cargas dinámicas que actúan sobre el sistema originando vibraciones y desplazamientos impredecibles en las estructuras trayendo como consecuencias fallas estructurales y desastres históricos y que con la ayuda de las soluciones de las ecuaciones diferenciales del movimiento dinámico es que me planteo el siguiente problema:

1.1.3.1 Problema general

¿De qué manera el rigor analítico de la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento permite optimizar el análisis de estructuras bajo acciones dinámicas y la predicción de colapsos estructurales?

1.1.3.2 Problemas específicos

- a) ¿En qué medida la resolución exacta de las ecuaciones diferenciales influye en la precisión del cálculo de los desplazamientos horizontales en estructuras sometidas a cargas dinámicas?
- b) ¿Cómo influye la resolución de las ecuaciones diferenciales del movimiento dinámico en el análisis estático y dinámico de las estructuras frente a acciones dinámicas para calcular los modos de vibración y predecir fallas estructurales futuras?

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN:

1.2.1 Objetivo General

-)] Evaluar la influencia de las ***soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales*** en el modelamiento del comportamiento estructural ante ***acciones dinámicas*** con el fin de establecer criterios predictivos de fallas estructurales futuras

1.2.2 Objetivos Específicos

-)] Determinar la influencia de la **solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento** en la determinación **de los desplazamientos horizontales laterales (derivas)** en estructuras frente a acciones dinámicas y predecir fallas estructurales futuras
-)] Desarrollar un modelo de análisis dinámico basado en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales para identificar los modos naturales de vibración y mitigar riesgos de resonancia o fatiga estructural y predecir fallas estructurales futuras

1.3 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 hipótesis General

La aplicación de la **solución de las ecuaciones diferenciales** del movimiento dinámico permite determinar con precisión la **respuesta estructural**, influyendo directamente en la optimización del análisis sísmico y en la capacidad de anticipar mecanismos de colapso o fallas futuras ante eventos dinámicos.

1.3.2 hipótesis Específicos

-) La solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento dinámico permite una determinación precisa de los desplazamientos horizontales en estructuras frente a acciones dinámicas y predecir fallas estructurales futuras.
-) La solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento dinámico permite realizar el análisis estático y dinámico de las estructuras frente a acciones dinámicas para calcular los modos de vibración y predecir fallas estructurales futuras

1.4 VARIABLES E INDICADORES DE LA INVESTIGACIÓN

Variable Independiente	: Solución de ecuaciones diferenciales (Morfología de la solución)
Variable Dependiente	: Análisis de respuesta estructural (Desplazamientos, modos de vibración, fallas).

1.5 DELIMITACIÓN DEL ESTUDIO

-) La presente investigación se delimita al análisis de sistemas estructurales bajo el modelo de **vibraciones libres no amortiguadas**. Esta simplificación analítica implica establecer el coeficiente de amortiguamiento (C) y la fuerza externa (F) como nulos ($C=0$; $F=0$).
Dado a que, para determinar los **modos de vibración** y las **frecuencias naturales** de una estructura, no se necesita la fuerza externa ni el amortiguamiento. Estas son propiedades "de fábrica" de la estructura que dependen solo de su masa (M) y su rigidez (K)

Esta delimitación permite centrar el estudio en las propiedades dinámicas intrínsecas de la estructura, tales como frecuencias naturales y modos de vibración, los cuales constituyen la base matemática fundamental para la predicción de desplazamientos horizontales y posibles fallas estructurales ante eventos dinámicos.

-) Si bien es cierto haremos un análisis general de las soluciones de la ecuación diferencial del movimiento dinámico indicado en la ecuación (1), nos concentramos solo en el caso NO amortiguado ($C=0$) y no forzado ($F=0$) Entonces, la ecuación diferencial del movimiento dinámico indicado en la ecuación (1), queda de la siguiente manera:

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + K(t) = 0 \quad \dots(1.4)$$

-) Se dispone de limitada información sobre trabajos de investigación anteriores y de una escasa bibliografía sobre el tema, para el desarrollo del proyecto.
-) A pesar de que, existe un centro de investigación como el CISMID (Centro Peruano Japonés de Investigaciones Sísmicas y Mitigación de Desastres) en la Universidad Nacional de Ingeniería UNI Lima-Perú, donde se efectúan simulaciones de sollicitaciones sísmicas a determinada escala, resulta demasiado costoso por los siguientes motivos:
-) **Costos de Infraestructura y Energía:** Operar simuladores sísmicos requiere un consumo energético masivo y mantenimiento especializado de sistemas hidráulicos y electrónicos
 -) **Materiales Destructivos:** Los ensayos estructurales son, por naturaleza, destructivos. Una vez que una probeta o modelo a escala falla para medir su resistencia, el material (concreto, acero, sensores) se pierde y debe ser repuesto para el siguiente ensayo.
 -) **Mano de Obra Especializada:** Requiere un equipo multidisciplinario de doctores en ingeniería, técnicos de laboratorio y especialistas en adquisición de datos, lo que eleva el presupuesto operativo

1.6 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

1.6.1 Justificación. La investigación se justifica por las siguientes razones:

-) Esta problemática planteada nos demuestra la necesidad de replantear el modelo matemático que traducido al modelo dinámico nos permitirá conocer el comportamiento de las edificaciones y verificar sus máximos desplazamientos laterales debido a fuerzas horizontales sísmicas máxima permitidas en el reglamento peruano de ingeniería sismorresistente E030.
-) La solución de las ecuaciones diferenciales planteadas nos permitirá limitar el movimiento máximo de oscilación de una edificación a fin de darle movimiento vibratorio a la estructura y así predecir cualquier falla estructural y garantizar que el proyecto de ingeniería sea un éxito
-) Esta es precisamente la razón por la cual esta investigación en **Ecuaciones Diferenciales** es vital. El análisis matemático permite predecir el comportamiento sísmico y las fallas estructurales mediante software, ahorrando los millones de soles que costarían los ensayos físicos repetitivos

1.6.2 Importancia. Esta investigación es muy importante por:

-) La solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento vibratorio que traducidas al modelo dinámico, aplicados a la ingeniería Civil, nos permitirá predecir los grados de libertad del edificio y evitar el exceso de rigidez que garantizará que la estructura tenga cierto modo de vibración y oscile libremente sin afectar a otro edificio vecino según su máximo desplazamiento y predecir cualquier falla estructural y garantizar que el proyecto de ingeniería resulte la más segura y con el menor costo posible.
-) Los resultados y conclusiones del presente trabajo de investigación servirán como un aporte teórico para otras investigaciones.
-) La investigación es importante porque permitirá motivar a los investigadores en la aplicación de programas de ingeniería y comparar con el modelo matemático a través del desarrollo de las ecuaciones diferenciales que al resolverlas se obtienen los desplazamientos laterales debido a solicitaciones sísmicas de acuerdo al reglamento sismorresistente

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1.1 A nivel nacional

-) En la investigación *“Mejoramiento de la I.E. nivel secundario Ramón Castilla y Marquesado del barrio de Santa Ana, distrito y provincia de Huancavelica”* en Perú, presentado por Bendezú Boza Badi Bizet y Chávez Ávila Xennia, los autores realizan un análisis dinámico de la estructura de cuatro pisos mediante el uso del programa ETABS sin plantear y resolver las ecuaciones diferenciales en forma explícita. En dicho estudio se verificaron los desplazamientos laterales de la edificación en cada nivel, teniendo en cuenta los límites establecidos según el tipo y material de la edificación de acuerdo al Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE), tanto transversal como longitudinal, en las que se puede observar que los resultados se encuentran dentro del rango de desplazamientos máximos permisibles establecidos por el Reglamento Nacional de Edificaciones
-) En la investigación *“Análisis sísmico-estático de una edificación según normas E-030 2006 y E-030 2014”* realizada en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas UPC por los alumnos; Orlando Herrera Magno, Paul Huamancayo Cuba y Jean Carlo Paulino Fierro, bajo el asesoramiento del PhD Genner Villarreal Castro el año 2014, se realizó el análisis estático con ayuda del Software SAP2000 sin resolver las ecuaciones diferenciales y se concluye que, con las dimensiones establecidas, se comprobó que la estructura era regular con la norma E0.30 – 2006.
- Se verificó que no cumplía con las derivas permisibles y era necesaria una innovación en el diseño.
- Se escogieron columnas de secciones “L”, “T” y cuadradas debido a que optimizan el área y por lo tanto el volumen de concreto.

Para la innovación 2006, se verificó que cumplía con las derivas permisibles con el análisis estático de la norma E0.30 – 2006.

Para la innovación 2006, se verificó que no cumplía con las derivas permisibles con el análisis estático de la norma E0.30 – 2014.

Se diseñó unas nuevas secciones de columnas “L”, “T” y cuadradas, verificando que cumplía con las derivas permisibles para la norma E0.30 – 2014.

En la comparación de normas, se pudo verificar que la E0.30 – 2014 es más conservadora porque usa factores de irregularidad más altos que la otra norma, así como parámetros para el análisis estático, con el consiguiente cálculo de la cortante basal, siendo el de la E0.30 – 2014 más alto para una misma carga sísmica.

En el análisis de costo, se pudo verificar que la estructura diseñada para la norma E0.30 – 2014 es más cara, por el mismo hecho de ser más conservadora y aumentar las fuerzas de sismo. Sin embargo, será preferible incurrir en más gastos y asegurar la estructura ante un evento catastrófico.

2.1.2 A nivel internacional

-) El departamento de ingeniería Civil de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina publicó una investigación titulada “*análisis de estructuras bajo acciones sísmicas*”, en el cual define, estudia y analiza las cargas dinámicas, pero no evalúa y aplica los efectos a predecir situaciones de posibles desastres
-) El Dr. Ing. Roberto Aguiar Falconi director del centro de investigaciones científicas de la Escuela Politécnica del Ejército en Quito-Ecuador en su investigación “*Análisis sísmico de edificios*” realiza el análisis sísmico en base diversos métodos con la aplicación de diferentes Software sin embargo no miden los efectos y sus aplicaciones a sistemas estructurales
-) La universidad politécnica de Madrid en su investigación “*Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia*” utiliza la transformada de Fourier llevando a planteamientos teóricos abstractos para obtener distintas

respuestas, sin embargo, no obtiene los desplazamientos de una estructura sometida a una acción dinámica para posteriormente obtener leyes de esfuerzos y poder dimensionar la estructura

- J) La facultad de Ingeniería de la Universidad nacional Autónoma de México, presento: *“Identificación de modos cercanos de vibración de una estructura cuasi-axisimétrica”*: estudio complementario de Gutiérrez. Wing E., Velez-Castan G., Szwedowicz-Wasik D., Bedolla-Hernández J., Cortes-García C. 2013 en. Se presentó un procedimiento para la estimación de los parámetros modales de modos cercanos de vibración. Este procedimiento hace posible la estimación simultánea de los parámetros de dos modos cercanos, por lo que no requiere que cada resonancia esté dominada por un solo modo, como es el caso para los métodos convencionales. El procedimiento se basa en la suposición de que en la región de resonancia que abarca un par de modos cercanos, la estructura puede modelarse como un sistema de dos grados de libertad. Utilizando mediciones de su respuesta vibratoria en esta región es posible establecer un problema estándar de valores y vectores característicos, cuya solución son las frecuencias naturales complejas y las formas modales de los dos modos cercanos

2.2 MARCO CONCEPTUAL DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se presentan las bases teóricas que sustentan la investigación sobre la influencia de las ecuaciones diferenciales como herramienta útil en el análisis sísmico de edificaciones destinado a predecir los efectos de un eventual movimiento sísmico en nuestra capital

Por este motivo, el presente trabajo se relaciona con varias teorías que le dan forma y se relacionan con el proyecto planteado. Sobre este particular, Arias (1999), afirma que las bases teóricas son: *“Un conjunto de conceptos y proposiciones que constituyen un punto de vista o enfoque determinado, dirigido a explicar el fenómeno o problema planteado”*

Las siguientes teorías se consideran adecuadas para fundamentar tal instrumentalización y sustentar la línea de investigación:

2.2.1 BASES EPISTEMOLÓGICAS

La epistemología es la doctrina de los fundamentos y métodos científicos por lo que se relaciona con la metodología, el análisis epistemológico da como resultado el conocimiento científico lo que nos lleva a una teoría científica. La relación que hay entre la epistemología y la metodología es que la primera es la ciencia que se ocupa del conocimiento y la segunda se dedica a estudiar la forma o métodos que alcanza o se obtiene el conocimiento.

En la actualidad hay dos corrientes la de Popper y Piaget, el primero sostiene que el conocimiento científico posee un carácter eminentemente teórico derivado de la observación mientras que el segundo afirma es de naturaleza metodológica y práctica.

Para el fundamento epistemológico, la naturaleza de esta investigación determino que la base fundamental se adscriba al enfoque positivista o su expresión actual o el neopositivismo. Esto no constituye simplemente una elección superficial, sino que determina asumir una serie de consecuencias a lo largo de la investigación

2.2.2 BASES PSICOLÓGICAS

Son aportes psicológicos relacionados con el tema de investigación como: Gagné, Gardner, Piaget, Ausubel, Vygotsky y otros.

El fundamento psicológico constituye un sistema en el cual los paradigmas cognitivo, ecológico y humanista resultan determinantes, tales como el aprendizaje, el conocimiento, concentración mental, etc.

2.2.3 LAS HERRAMIENTAS DE APLICACION

Dado la gran variedad de aplicaciones de Software aplicadas a Ingeniería Civil, dedicadas a facilitar al investigador los engorrosos cálculos que simulan el modelo matemático ante el modelo de solicitaciones sísmicas. Algunas de ellas

son sumamente amplias y completas, pero su solución representa la interpretación física matemática del evento con una alta confiabilidad

Existe un pequeño grupo de Softwares aplicativo muy sencillas de instalar, configurar y utilizar, que ayudaron al investigador y ayudara al lector de esta tesis Las Herramientas más conocidas son los siguientes:

2.2.3.1 El SAP2000



Fig. 1: Presentación del programa SAP 2000 versión 2016

El Software “Integrated for Structural Analysis & Design SAP 2000”, es un programa desarrollado por la empresa CSI, Computer and Structures, Inc. En Berkeley, California, EEUU. Se presenta en varias versiones (Standard, Plus y Advanced). Desde hace más de 30 años ha estado en continuo desarrollo, para brindarle al ingeniero una herramienta confiable, sofisticada y fácil de usar sobre la base de una poderosa e intuitiva interfaz gráfica con procedimiento de modelaje, análisis y diseño estructural a la vanguardia a nivel mundial. Sirve para realizar diversos análisis estáticos y dinámicos de forma lineal y no lineal a través de funciones espectrales y tiempo-historia.

SAP 2000 determina a través de elementos finitos la respuesta en términos de fuerzas y deformadas en los elementos de área y sólidos, presentando una salida gráfica y por tablas, haciendo la herramienta predilecta para ingenieros estructurales dedicados a la investigación, desarrollo de proyectos y construcción.

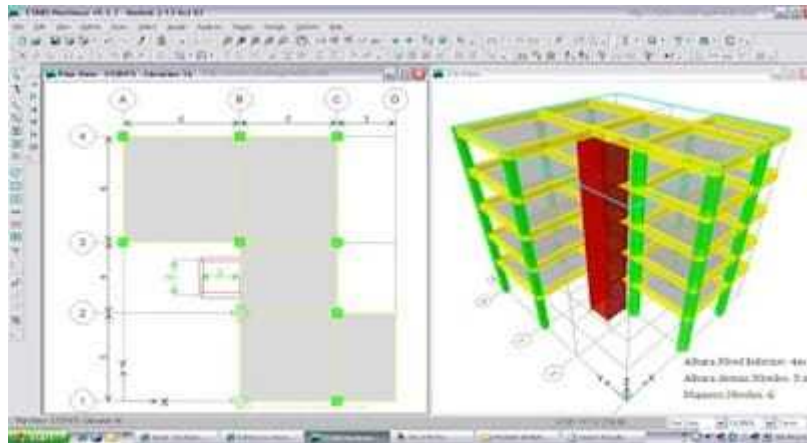


Fig. 2: Ejemplo de un modelamiento de una estructura con el SAP 2000

2.2.3.2 El ETABS

El Software; Extended Tree dimensional Analysis of Building Systems ETABS (Análisis Tridimensional Extendido de Edificaciones) es un programa de análisis y diseño con un propósito especial, sofisticado y fácil de usar, desarrollado específicamente para sistemas de edificaciones.



Fig. 3: Presentación del programa ETABS versión 2015

El ETABS posee una poderosa e intuitiva interfaz gráfica con procedimientos de modelaje, análisis y diseño sin igual, todos integrados usando una base de datos común. Aunque fácil y sencillo para estructuras simples.

ETABS también puede manejar los más grandes y complejos modelos de edificios, incluyendo un amplio rango de comportamientos no lineales, haciéndolo la herramienta predilecta para ingenieros estructurales en la industria de la construcción.

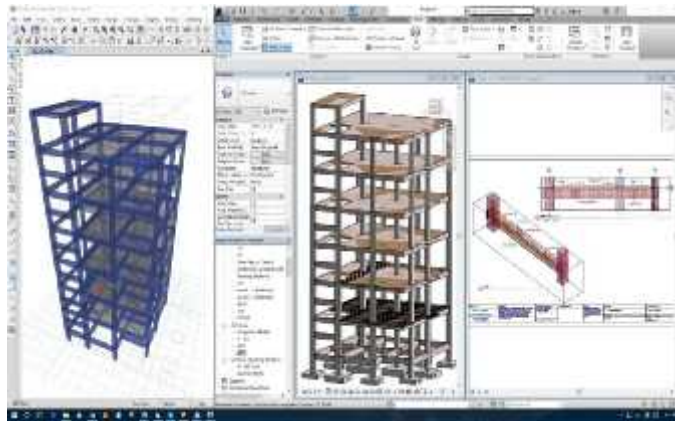


Fig. 4: Modelamiento de la estructura con el ETABS v 2015

2.2.3.3 HOJA DE CALCULO EXCEL

Esta es la hoja de cálculo más grande y completa que utilizaremos para realizar el análisis y procesamientos de los datos, dado a su facilidad de colocar la información en forma ordenada y el mismo software tiene sus propios comandos que usamos para el desarrollo de la investigación



Fig. 5: Hoja de cálculo EXCEL aplicado a ingeniería civil que utilizaremos para los cálculos

2.2.4 MODELO MATEMATICO

El modelo matemático para plantear y resolver las ecuaciones diferenciales para aplicarla al análisis de estructuras ante solicitaciones sísmicas se desarrolló en función del tipo de estructuras, en este caso se tomó un modelo estructural de edificaciones de concreto armado, de tres pisos:

En esta investigación tomaremos como ejemplo el siguiente modelo estructural:

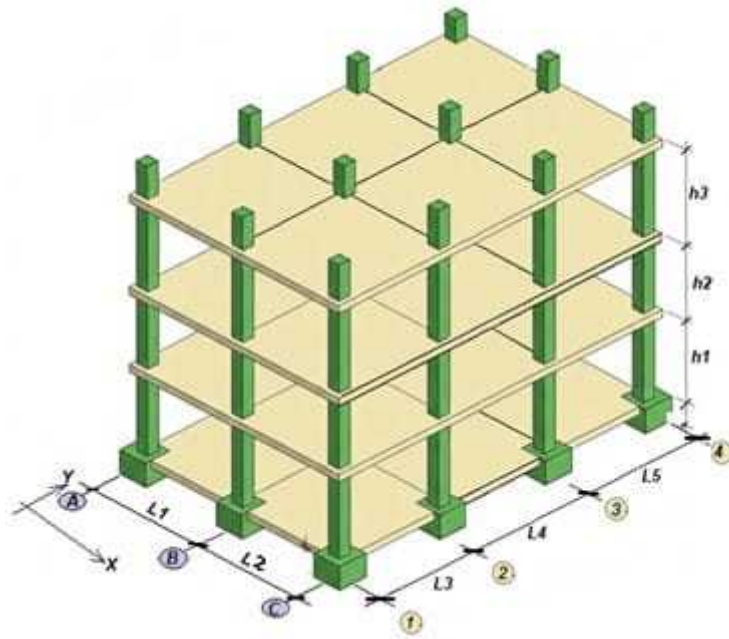


Fig. 6: Modelo estructural de 3 pisos con 4 ejes horizontales y 3 ejes verticales que usaremos como modelo para desarrollar el ejemplo aplicativo

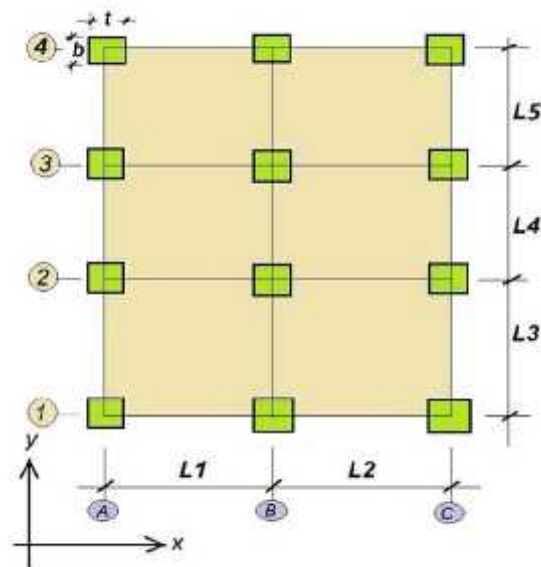


Fig.7: Modelo estructural del plano en planta que tomaremos como ejemplo.

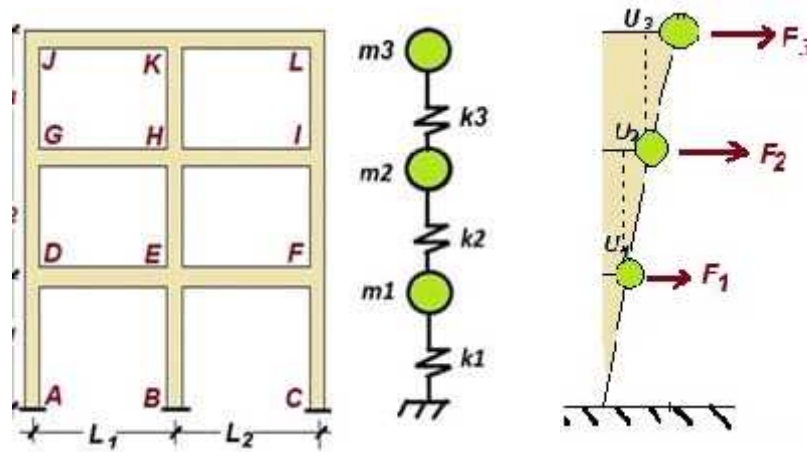


Fig. 8. Modelo sísmico del edificio de 3 pisos en elevación, sometido a fuerzas cortantes, donde se muestran los desplazamientos laterales U , debido a vibraciones sísmicas, las cuales deben ser resueltas con la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico

El sistema de ecuaciones como respuesta dinámica de las estructuras se conocen con el nombre de ecuaciones del movimiento dinámico (ecuación 1.1) En el modelo siguiente se muestra el efecto de una aceleración horizontal $a(t)$ de origen sísmico mostrando un modo de vibración lateral.



Fig. 9. Modelo de edificio con vibraciones laterales debido a un sismo

2.2.4.1 Comportamiento ante la Aceleración Sísmica

Cuando el suelo experimenta una aceleración horizontal $a(t)$, el edificio no se mueve rígidamente con la base debido a su flexibilidad. Se generan fuerzas de inercia en cada nivel que producen desplazamientos relativos.

2.2.4.2 Configuración del Modelo Dinámico

En este modelo, cada piso se comporta como un grado de libertad. Los componentes clave son:

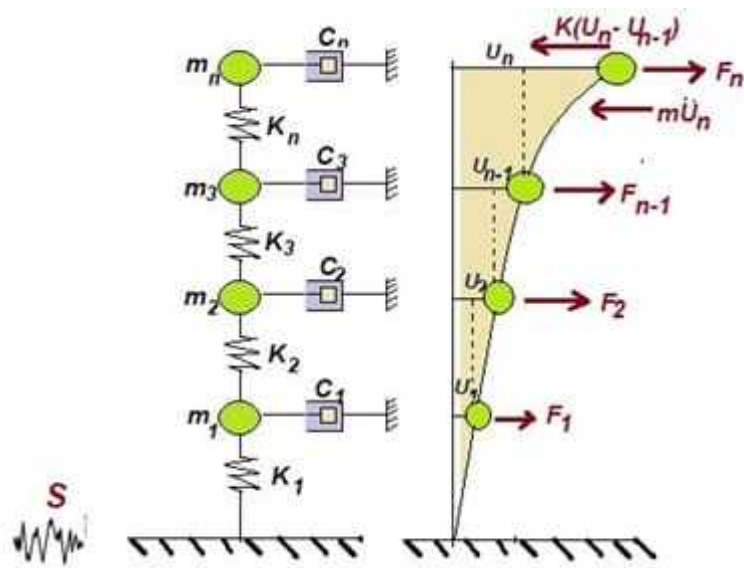


Fig. 10. Modelo dinámico general de una edificación de "n" pisos

-) **Masas (m_1, m_2, m_3):** Representadas por círculos rellenos que concentran todo el peso del nivel.
-) **Rigidez (k_1, k_2, k_3):** Representan la resistencia de las columnas y muros al desplazamiento lateral.
-) **Amortiguadores (C_1, C_2, C_3):** Dispositivos (o la fricción interna de los materiales) que disipan la energía del movimiento
-) **Desplazamientos (u_1, u_2, u_3):** Desplazamientos horizontales
-) **Fuerzas cortantes (F_1, F_2, F_3):** Fuerzas horizontales cortantes distribuidas de la Fuerza basal debido al sismo

2.2.5 Principio de D' Alembert

De acuerdo al principio de D' Alembert, en un sistema de referencia no inercial con el origen en la posición inicial del edificio, como en la *figura 11*, se obtiene:

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots(2.1.5)$$

Donde:

$$F_i(t) : \text{Fuerza de inercia en el piso } n$$

$$F_e(t) : \text{Fuerza elástica en el piso } n$$

$$F_a(t) : \text{Fuerza de aceleración en el piso } n$$

Dado que estas ecuaciones son en cada nivel de la edificación en cada una de las masas lo cual se dice en cada Grado de libertad (GL) realizamos un ordenamiento matricial y se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = 0 \quad \dots(2.1.5.1)$$

Donde cada fuerza se puede expresar en función del vector desplazamiento U

$$F_i(t) = -M[\ddot{U}(t) + \{1\}a(t)]$$

$$F_e(t) = K(t)$$

$$F_a(t) = C\dot{U}(t)$$

$U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), \dots, u_n(t)]$,es el vector desplazamiento respecto de la base del edificio con esfuerzos cortantes
 $\{1\} =$ es el vector unitario que convierte a la aceleración $a(t)$ en matriz columna

$r =$ es el piso o nivel r ésimo cualquiera y n es el piso último de la edificación

Reemplazando y ordenando la ecuación, queda:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + K(t) = -M\{1\}a(t) \quad \dots(2.1.5.2)$$

Donde:

M : Matriz de masas en cada nivel de la edificación: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$

n : Número de pisos

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

C : Matriz de amortiguamiento

K : Matriz de rigideces de las columnas de la edificación de n pisos

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

$F(t)$ =Vector columna de las fuerzas horizontales

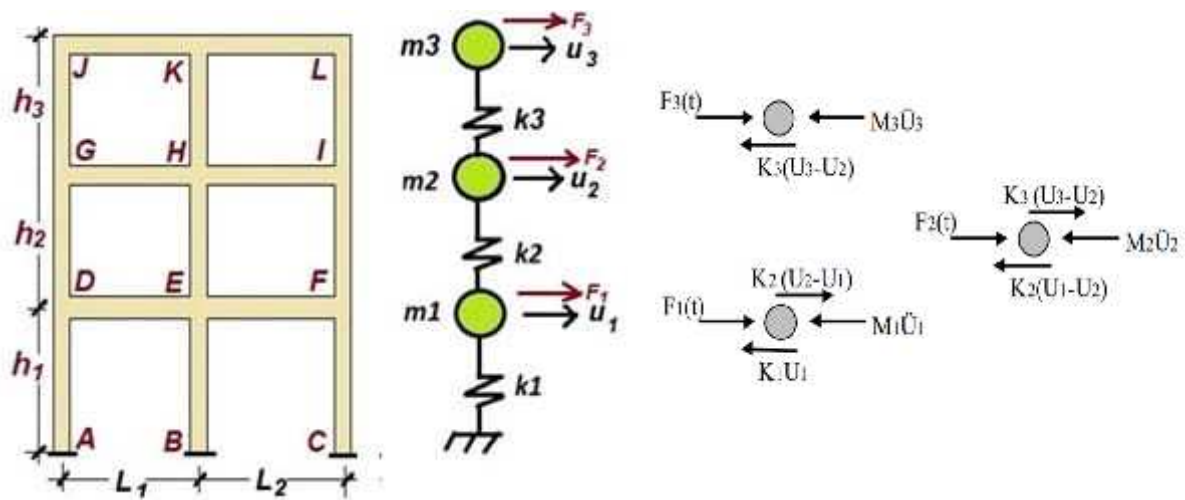


Fig. 11: modelamiento de un edificio de tres pisos con sus fuerzas distribuidas y desplazamientos laterales U

Si $U = x$, como vector desplazamiento, entonces la ecuación diferencial ordinaria lineal y de segundo orden que corresponde es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad \dots (2.1.5.3)$$

2.2.6 Vibraciones libres amortiguadas. Estas vibraciones se caracterizan por no considerar las fuerzas externas debido a que se mide luego de aplicarse dicha fuerza por lo se considera solo la respuesta del movimiento, el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo dinámico es:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + K = 0 \quad \dots(2.1.6)$$

2.2.7 Vibraciones libres no amortiguadas, Estas vibraciones se consideran libres de fuerzas externas ya solo se considera su respuesta dinámica y su efecto en el tiempo, o sea, $F(t)=0$, $C=0$ y además, se desprecia el factor de amortiguamiento C , debido a que son valores muy pequeños. el sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria para el modelo dinámico que utilicé para esta investigación es:

$$M\ddot{U} + K = 0 \quad \dots(2.1.7)$$

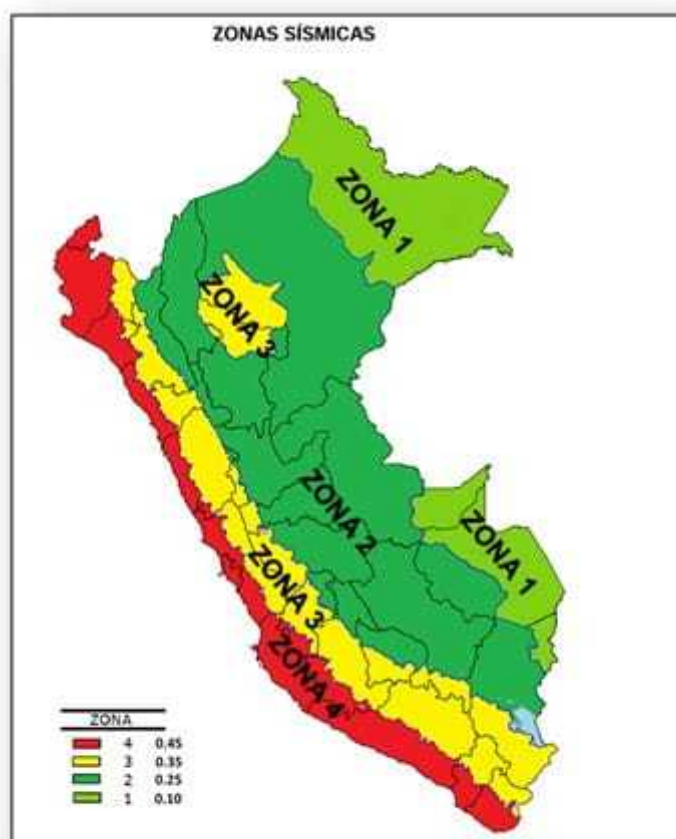
Lo que es lo mismo: $M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + K(t) = 0 \quad \dots(2.1.7a)$

2.3 MARCO CONCEPTUAL SEGÚN NORMA E030

2.3.1 ZONIFICACION

El territorio nacional se considera dividido en cuatro zonas, como se muestra en la Figura N° 1. La zonificación propuesta se basa en la distribución espacial de la sismicidad observada, las características generales de los movimientos sísmicos y la atenuación de éstos con la distancia epicentral, así como en la información geotectónica. El Anexo N° 1 de la norma peruana E030, contiene el listado de las provincias y distritos que corresponden a cada zona.

Figura N° 12: Mapa del Perú dividida en 4 zonas sísmicas



Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 8), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

A cada zona se asigna un factor Z según se indica en la Tabla N° 1. Este factor se interpreta como la aceleración máxima horizontal en suelo rígido con una probabilidad de 10 % de ser excedida en 50 años. El factor Z se expresa como una fracción de la aceleración de la gravedad.

Tabla N° 1 FACTORES DE ZONA "Z"	
ZONA	Z
4	0,45
3	0,35
2	0,25
1	0,10

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 9), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.2 PERFILES DE SUELO

Para los efectos de esta Norma, los perfiles de suelo se clasifican tomando en cuenta la velocidad promedio de propagación de las ondas de corte ($\bar{V}_s$), o alternativamente, para suelos granulares, el promedio ponderado de los

$\bar{N}_{60}$ obtenidos mediante un ensayo de penetración estándar (SPT), o el promedio ponderado de la resistencia al corte en condición no drenada ($\bar{S}_u$) para suelos cohesivos. Estas propiedades deben determinarse para los

30 m superiores del perfil de suelo medidos desde el nivel del fondo de cimentación, como se indica en el numeral 2.3.2. de la norma Peruana E.030

Para los suelos predominantemente granulares, se calcula $\bar{N}_{60}$ considerando solamente los espesores de cada uno de los estratos granulares. Para los suelos predominantemente cohesivos, la resistencia al corte en condición no drenada $\bar{S}_u$ se calcula como el promedio ponderado

de los valores correspondientes a cada estrato cohesivo.

Este método también es aplicable si se encuentran suelos heterogéneos (cohesivos y granulares). En tal caso, si a partir de $\bar{N}_{60}$ para los estratos con suelos granulares y de $\bar{S}_u$ para los estratos con suelos cohesivos se obtienen clasificaciones de sitio distintas, se toma la que corresponde al tipo de perfil más flexible.

Los tipos de perfiles de suelos son cinco:

a. **Perfil Tipo S₀: Roca Dura**

A este tipo corresponden las rocas sanas con velocidad de propagación de ondas de corte $\bar{V}_s$ mayor que 1500 m/s. Las mediciones deberán corresponder al sitio del proyecto o a perfiles de la misma roca en la

misma formación con igual o mayor intemperismo o fracturas. Cuando se conoce que la roca dura es continua hasta una profundidad de 30 m, las mediciones de la velocidad de las ondas de corte superficiales pueden ser usadas para estimar el valor de $\bar{V}_s$.

b. Perfil Tipo S₁: Roca o Suelos Muy Rígidos

A este tipo corresponden las rocas con diferentes grados de fracturación, de macizos homogéneos y los suelos muy rígidos con velocidades de propagación de onda de corte $\bar{V}_s$, entre 500 m/s y 150 m/s, incluyéndose los casos en los que se cimienta sobre:

- Roca fracturada, con una resistencia a la compresión no confinada q_{tu} mayor o igual que 500 kPa (5 kg/cm²).
- Arena muy densa o grava arenosa densa, con $\bar{N}_{60}$ mayor que 50.
- Arcilla muy compacta (de espesor menor que 20 m), con una resistencia al corte en condición no drenada $\bar{s}_{tu}$ mayor que 100 kPa (1 kg/cm²) y con un incremento gradual de las propiedades mecánicas con la profundidad.

c. Perfil Tipo S₂: Suelos Intermedios

A este tipo corresponden los suelos medianamente rígidos, con velocidades de propagación de onda de corte $\bar{V}_s$, entre 180 m/s y 500 m/s, incluyéndose los casos en los que se cimienta sobre:

- Arena densa, gruesa a media, o grava arenosa medianamente densa, con valores del SPT $\bar{N}_{60}$, entre 15 y 50.
- Suelo cohesivo compacto, con una resistencia al corte en condiciones no drenada $\bar{s}_{tu}$, entre 50 kPa (0,5 kg/cm²) y 100 kPa (1 kg/cm²) y con un incremento gradual de las propiedades mecánicas con la profundidad.

d. Perfil Tipo S₃: Suelos Blandos

Corresponden a este tipo los suelos flexibles con velocidades de propagación de onda de corte $\bar{V}_s$, menor o igual a 180 m/s, incluyéndose los casos en los que se cimienta sobre:

- Arena media a fina, o grava arenosa, con valores del SPT $\bar{N}_{60}$ menor que 15.
- Suelo cohesivo blando, con una resistencia al corte en condición no drenada $\bar{S}_u$, entre 25 kPa (0,25 kg/cm²) y 50 kPa (0,5 kg/cm²) y con un incremento gradual de las propiedades mecánicas con la profundidad.
- Cualquier perfil que no correspondan al tipo S₄ y que tenga más de 3 m de suelo con las siguientes características: índice de plasticidad P_I mayor que 20, contenido de humedad ω mayor que 40%, resistencia al corte en condición no drenada $\bar{S}_u$ menor que 25 kPa.

e. Perfil Tipo S₄: Condiciones Excepcionales

A este tipo corresponden los suelos excepcionalmente flexibles y los sitios donde las condiciones geológicas y/o topográficas son particularmente desfavorables, en los cuales se requiere efectuar un estudio específico para el sitio. Sólo será necesario considerar un perfil tipo S₄ cuando el Estudio de Mecánica de Suelos (EMS) así lo determine.

La Tabla N° 2 resume valores típicos para los distintos tipos de perfiles de suelo:

Tabla N° 2 CLASIFICACIÓN DE LOS PERFILES DE SUELO			
Perfil	$\bar{V}_s$	$\bar{N}_{60}$	$\bar{S}_u$
S ₀	> 1500 m/s	-	-
S ₁	500 m/s a 1500 m/s	> 50	>100 kPa
S ₂	180 m/s a 500 m/s	15 a 50	50 kPa a 100 kPa
S ₃	< 180 m/s	< 15	25 kPa a 50 kPa
S ₄	Clasificación basada en el EMS		

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 11), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.3 Parámetros de sitio (S , T_P y T_L)

Deberá considerarse el tipo de perfil que mejor describa las condiciones locales, utilizándose los correspondientes valores del factor de amplificación del suelo S y de los períodos T_P y T_L dados en las Tablas N° 3 y N° 4.

Tabla N° 3 FACTOR DE SUELO "S"				
SUELO ZONA	S_0	S_1	S_2	S_3
Z_4	0,80	1,00	1,05	1,10
Z_3	0,80	1,00	1,15	1,20
Z_2	0,80	1,00	1,20	1,40
Z_1	0,80	1,00	1,60	2,00

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 12), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

Tabla N° 4 PERÍODOS "T_P" Y "T_L"				
	Perfil de suelo			
	S_0	S_1	S_2	S_3
T_P (s)	0,3	0,4	0,6	1,0
T_L (s)	3,0	2,5	2,0	1,6

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 13), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.4 Factor de Amplificación Sísmica (C)

De acuerdo a las características de sitio, se define el factor de amplificación sísmica (C) por las siguientes expresiones:

$T < T_P$	$C = 2,5$
$T_P < T < T_L$	$C = 2,5 \cdot \left(\frac{T_P}{T} \right)$
$T > T_L$	$C = 2,5 \cdot \left(\frac{T_P \cdot T_L}{T^2} \right)$

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 13), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

T es el período de acuerdo al numeral 4.5.4, concordado con el numeral 4.6.1. de la norma E.030

Este coeficiente se interpreta como el factor de amplificación de la aceleración estructural respecto de la aceleración en el suelo.

2.3.5 Categoría de las Edificaciones y Factor de Uso (U)

Cada estructura debe ser clasificada de acuerdo con las categorías indicadas en la Tabla N° 5. El factor de uso o importancia (U), definido en la Tabla N° 5 se usará según la clasificación que se haga. Para edificios con aislamiento sísmico en la base se podrá considerar $U = 1$.

Tabla N° 5 CATEGORÍA DE LAS EDIFICACIONES Y FACTOR “U”		
CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN	FACTOR U
A Edificaciones Esenciales	A1: Establecimientos de salud del Sector Salud (públicos y privados) del segundo y tercer nivel, según lo normado por el Ministerio de Salud.	Ver nota 1
	A2: Edificaciones esenciales cuya función no debería interrumpirse inmediatamente después de que ocurra un sismo severo tales como: - Establecimientos de salud no comprendidos en la categoría A1. - Puertos, aeropuertos, locales municipales, centrales de comunicaciones. Estaciones de bomberos, cuarteles de las fuerzas armadas y policía. - Instalaciones de generación y transformación de electricidad, reservorios y plantas de tratamiento de agua. Todas aquellas edificaciones que puedan servir de refugio después de un desastre, tales como instituciones educativas, institutos superiores tecnológicos y universidades. Se incluyen edificaciones cuyo colapso puede representar un riesgo adicional, tales como grandes hornos, fábricas y depósitos de materiales inflamables o tóxicos. Edificios que almacenen archivos e información esencial del estado	1,5

B Edificaciones Importantes	Edificaciones donde se reúnen gran cantidad de personas tales como cines, teatros, estadios, coliseos, centros comerciales, terminales de pasajeros, establecimientos penitenciarios, o que guardan patrimonios valiosos como museos y bibliotecas. También se considerarán depósitos de granos y otros almacenes importantes para el abastecimiento.	1,3
C Edificaciones Comunes	Edificaciones comunes tales como: viviendas, oficinas, hoteles, restaurantes, depósitos e instalaciones industriales cuya falla no acarree peligros adicionales de incendios o fugas de contaminantes.	1,0
D Edificaciones Temporales	Construcciones provisionales para depósitos, casetas y otras similares.	Ver nota 2

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 14), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

Tabla N° 6 CATEGORÍA Y SISTEMA ESTRUCTURAL DE LAS EDIFICACIONES		
Categoría de la Edificación	Zona	Sistema Estructural
A1	4 y 3	Aislamiento Sísmico con cualquier sistema estructural.
	2 y 1	Estructuras de acero tipo SCBF, OCBF y EBF. Estructuras de concreto: Sistema Dual, Muros de Concreto Armado. Albanilería Armada o Confinada.
A2 (*)	4, 3 y 2	Estructuras de acero tipo SCBF, OCBF y EBF. Estructuras de concreto: Sistema Dual, Muros de Concreto Armado. Albanilería Armada o Confinada.
	1	Cualquier sistema.
B	4, 3 y 2	Estructuras de acero tipo SMF, IMF, SCBF, OCBF y EBF. Estructuras de concreto: Pórticos, Sistema Dual, Muros de Concreto Armado. Albanilería Armada o Confinada. Estructuras de madera
	1	Cualquier sistema.
C	4, 3, 2 y 1	Cualquier sistema.

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 17), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.6 Sistemas Estructurales y coeficiente Básico de Reducción de Fuerzas sísmicas (R_0)

Los sistemas estructurales se clasifican según los materiales usados y el sistema de estructuración sismorresistente en cada dirección de análisis tal como indica en la tabla N°7

Cuando en la dirección de análisis, la edificación presente más de un sistema estructural, se tomará el menor coeficiente R_0 que corresponda

Tabla N° 7 SISTEMAS ESTRUCTURALES	
Sistema Estructural	Coeficiente Básico de Reducción R_0 (*)
Acero:	
Pórticos Especiales Resistentes a Momentos (SMF)	8
Pórticos Intermedios Resistentes a Momentos (IMF)	7
Pórticos Ordinarios Resistentes a Momentos (OMF)	6
Pórticos Especiales Concéntricamente Arriostrados (SCBF)	8
Pórticos Ordinarios Concéntricamente Arriostrados (OCBF)	6
Pórticos Excéntricamente Arriostrados (EBF)	8
Concreto Armado:	
Pórticos	8
Dual	7
De muros estructurales	6
Muros de ductilidad limitada	4
Albañilería Armada o Confinada.	3
Madera (Por esfuerzos admisibles)	7

(*) Estos coeficientes se aplicarán únicamente a estructuras en las que los elementos verticales y horizontales permitan la disipación de la energía manteniendo la estabilidad de la estructura. No se aplican a estructuras tipo péndulo invertido.

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 17), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.7 Regularidad Estructural

Las estructuras deben ser clasificadas como regulares o irregulares para los fines siguientes:

-) Cumplir las restricciones de la Tabla N° 10.
-) Establecer los procedimientos de análisis.
-) Determinar el coeficiente R de reducción de fuerzas sísmicas.

Estructuras Regulares son las que, en su configuración resistente a cargas laterales, no presentan las irregularidades indicadas en las Tablas N° 8 y N° 9.

En estos casos, el factor I_a o I_p será igual a 1,0.

Estructuras Irregulares son aquellas que presentan una o más de las irregularidades indicadas en las Tablas N° 8 y N° 9.

2.3.8 Factores de Irregularidad (I_a , I_p)

El factor I_a se determinará como el menor de los valores de la Tabla N° 8 correspondiente a las irregularidades estructurales existentes en altura en las dos direcciones de análisis. El factor I_p se determinará como el menor de los valores de la Tabla N° 9 correspondiente a las irregularidades estructurales existentes en planta en las dos direcciones de análisis.

Si al aplicar las Tablas N° 8 y 9 se obtuvieran valores distintos de los factores I_a o I_p para las dos direcciones de análisis, se deberá tomar para cada factor el menor valor entre los obtenidos para las dos direcciones.

Tabla N° 8 IRREGULARIDADES ESTRUCTURALES EN ALTURA	Factor de Irregularidad I_a
Irregularidad de Rigidez – Piso Blando Existe irregularidad de rigidez cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, la distorsión de entrepiso (deriva) es mayor que 1,4 veces el correspondiente valor en el entrepiso inmediato superior, o es mayor que 1,25 veces el promedio de las distorsiones de entrepiso en los tres niveles superiores adyacentes. La distorsión de entrepiso se calculará como el promedio de las distorsiones en los extremos del entrepiso. Irregularidades de Resistencia – Piso Débil Existe irregularidad de resistencia cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, la resistencia de un entrepiso frente a fuerzas cortantes es inferior a 80 % de la resistencia del entrepiso inmediato superior.	0,75
Irregularidad Extrema de Rigidez (Ver Tabla N° 10) Se considera que existe irregularidad extrema en la rigidez cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, la distorsión de entrepiso (deriva) es mayor que 1,6 veces el correspondiente valor del entrepiso inmediato superior, o es mayor que 1,4 veces el promedio de las distorsiones de entrepiso en los tres niveles superiores adyacentes. La distorsión de entrepiso se calculará como el promedio de las distorsiones en los extremos del entrepiso. Irregularidad Extrema de Resistencia (Ver Tabla N° 10) Existe irregularidad extrema de resistencia cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, la resistencia de un entrepiso frente a fuerzas cortantes es inferior a 65 % de la resistencia del entrepiso inmediato superior.	0,50
Irregularidad de Masa o Peso Se tiene irregularidad de masa (o peso) cuando el peso de un piso, determinado según el numeral 4.3, es mayor que 1,5 veces el peso de un piso adyacente. Este criterio no se aplica en azoteas ni en sótanos.	0,90
Irregularidad Geométrica Vertical La configuración es irregular cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, la dimensión en planta de la estructura resistente a cargas laterales es mayor que 1,3 veces la correspondiente dimensión en un piso adyacente. Este criterio no se aplica en azoteas ni en sótanos.	0,90

Discontinuidad en los Sistemas Resistentes Se califica a la estructura como irregular cuando en cualquier elemento que resista más de 10 % de la fuerza cortante se tiene un desalineamiento vertical, tanto por un cambio de orientación, como por un desplazamiento del eje de magnitud mayor que 25 % de la correspondiente dimensión del elemento.	0,80
Discontinuidad extrema de los Sistemas Resistentes (Ver Tabla N° 10) Existe discontinuidad extrema cuando la fuerza cortante que resisten los elementos discontinuos según se describen en el ítem anterior, supere el 25 % de la fuerza cortante total	0,60

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 19), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

Tabla N° 9 IRREGULARIDADES ESTRUCTURALES EN PLANTA	Factor de Irregularidad I_p
Irregularidad Torsional Existe irregularidad torsional cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, el máximo desplazamiento relativo de entrepiso en un extremo del edificio, calculado incluyendo excentricidad accidental ($\Delta_{máx}$), es mayor que 1,2 veces el desplazamiento relativo del centro de masas del mismo entrepiso para la misma condición de carga (Δ_C). Este criterio sólo se aplica en edificios con diafragmas rígidos y sólo si el máximo desplazamiento relativo de entrepiso es mayor que 50 % del desplazamiento permisible indicado en la Tabla N° 11.	0,75
Irregularidad Torsional Extrema (Ver Tabla N° 10) Existe irregularidad torsional extrema cuando, en cualquiera de las direcciones de análisis, el máximo desplazamiento relativo de entrepiso en un extremo del edificio, calculado incluyendo excentricidad accidental ($\Delta_{máx}$), es mayor que 1,5 veces el desplazamiento relativo del centro de masas del mismo entrepiso para la misma condición de carga (Δ_C). Este criterio sólo se aplica en edificios con diafragmas rígidos y sólo si el máximo desplazamiento relativo de entrepiso es mayor que 50 % del desplazamiento permisible indicado en la Tabla N° 11.	0,60

Esquinas Entrantes La estructura se califica como irregular cuando tiene esquinas entrantes cuyas dimensiones en ambas direcciones son mayores que 20 % de la correspondiente dimensión total en planta.	0,90
Discontinuidad del Diafragma La estructura se califica como irregular cuando los diafragmas tienen discontinuidades abruptas o variaciones importantes en rigidez, incluyendo aberturas mayores que 50 % del área bruta del diafragma. También existe irregularidad cuando, en cualquiera de los pisos y para cualquiera de las direcciones de análisis, se tiene alguna sección transversal del diafragma con un área neta resistente menor que 25 % del área de la sección transversal total de la misma dirección calculada con las dimensiones totales de la planta.	0,85
Sistemas no Paralelos Se considera que existe irregularidad cuando en cualquiera de las direcciones de análisis los elementos resistentes a fuerzas laterales no son paralelos. No se aplica si los ejes de los pórticos o muros forman ángulos menores que 30° ni cuando los elementos no paralelos resisten menos que 10 % de la fuerza cortante del piso.	0,90

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 20), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.9 Coeficiente de Reducción de las Fuerzas Sísmicas, R

El coeficiente de reducción de las fuerzas sísmicas se determinará como el producto del coeficiente R_0 determinado a partir de la Tabla N° 7 y de los factores I_a , I_p obtenidos de las Tablas N° 8 y N° 9 de la norma E030

$$R = R_0 \cdot I_a \cdot I_p$$

2.3.10 Consideraciones Generales para el Análisis Estructural

Para estructuras regulares, el análisis podrá hacerse considerando que el total de la fuerza sísmica actúa independientemente en dos direcciones ortogonales predominantes. Para estructuras irregulares deberá suponerse que la acción sísmica ocurre en la dirección que resulte más desfavorable para el diseño.

Las solicitaciones sísmicas verticales se considerarán en el diseño de los elementos verticales, en elementos horizontales de gran luz, en elementos post o pretensados y en los voladizos o salientes de un edificio. Se considera que la fuerza sísmica vertical actúa en los elementos simultáneamente con la fuerza sísmica horizontal y en el sentido más desfavorable para el análisis.

2.3.11 Modelos para el Análisis

El modelo para el análisis deberá considerar una distribución espacial de masas y rigideces que sean adecuadas para calcular los aspectos más significativos del comportamiento dinámico de la estructura.

Para propósito de esta Norma las estructuras de concreto armado y albañilería podrán ser analizadas considerando las inercias de las secciones brutas, ignorando la fisuración y el refuerzo.

Para edificios en los que se pueda razonablemente suponer que los sistemas de piso funcionan como diafragmas rígidos, se podrá usar un modelo con masas concentradas y tres grados de libertad por diafragma, asociados a dos componentes ortogonales de traslación horizontal y una rotación. En tal caso, las deformaciones de los elementos deberán compatibilizarse mediante la condición de diafragma rígido y la distribución en planta de las fuerzas horizontales deberá hacerse en función a las rigideces de los elementos resistentes.

Deberá verificarse que los diafragmas tengan la rigidez y resistencia, suficientes para asegurar la distribución antes mencionada, en caso contrario, deberá tomarse en cuenta su flexibilidad para la distribución de las fuerzas sísmicas.

El modelo estructural deberá incluir la tabiquería que no esté debidamente aislada.

Para los pisos que no constituyan diafragmas rígidos, los elementos resistentes serán diseñados para las fuerzas horizontales que directamente les corresponde.

En los edificios cuyos elementos estructurales predominantes sean muros, se deberá considerar un modelo que tome en cuenta la interacción entre muros en direcciones perpendiculares (muros en H, muros en T y muros en L).

2.3.12 Estimación del Peso (P)

El peso (P), se calculará adicionando a la carga permanente y total de la edificación un porcentaje de la carga viva o sobrecarga que se determinará de la siguiente manera:

- a. En edificaciones de las categorías A y B, se tomará el 50 % de la carga viva.
- b. En edificaciones de la categoría C, se tomará el 25 % de la carga viva.
- c. En depósitos, el 80 % del peso total que es posible almacenar.
- d. En azoteas y techos en general se tomará el 25 % de la carga viva.
- e. En estructuras de tanques, silos y estructuras similares se considerará el 100 % de la carga que puede contener.

2.3.13 Procedimientos de Análisis Sísmico

Deberá utilizarse uno de los procedimientos siguientes:

- Análisis estático o de fuerzas estáticas equivalentes
- Análisis dinámico modal espectral

El análisis se hará considerando un modelo de comportamiento lineal y elástico con las solicitaciones sísmicas reducidas.

2.3.14 ANÁLISIS ESTÁTICO o de Fuerzas Estáticas Equivalentes

2.3.14.1 Generalidades

Este método representa las solicitaciones sísmicas mediante un conjunto de fuerzas actuando en el centro de masas de cada nivel de la edificación.

Podrán analizarse mediante este procedimiento todas las estructuras regulares o irregulares ubicadas en la zona sísmica 1, las estructuras clasificadas como regulares según el numeral 3.5 de la norma E030 de no más de 30 m de altura y las estructuras de muros portantes de concreto armado y albañilería armada o confinada de no más de 15 m de altura, aun cuando sean irregulares.

2.3.14.2 Fuerza Cortante en la Base

La fuerza cortante total en la base de la estructura, correspondiente a la dirección considerada, se determinará por la siguiente expresión:

$$V = \frac{Z \cdot U \cdot C \cdot S}{R} \cdot P \quad \dots(2.3.14.2)$$

El valor de C/R no deberá considerarse menor que:

$$\frac{C}{R} \geq 0,125$$

2.3.14.3 Distribución de la Fuerza Sísmica en Altura

Las fuerzas sísmicas horizontales en cualquier nivel i , correspondientes a la dirección considerada, se calcularán mediante:

$$F_i = \alpha_i \cdot V \quad \alpha_i = \frac{P_i(h_i)^k}{\sum_{j=1}^n P_j(h_j)^k}$$

Donde n es el número de pisos del edificio, k es un exponente relacionado con el período fundamental de vibración de la estructura (T), en la dirección considerada, que se calcula de acuerdo a:

- Para T menor o igual a 0,5 segundos: $k = 1,0$.
- Para T mayor que 0,5 segundos: $k = (0,75 + 0,5 T) \leq 2,0$.

2.3.14.4 Período Fundamental de Vibración

El período fundamental de vibración para cada dirección se estimará con la siguiente expresión:

$$T = \frac{h_n}{C_T}$$

Donde:

$C_T = 35$ Para edificios cuyos elementos resistentes en la dirección considerada sean únicamente:

- a) Pórticos de concreto armado sin muros de corte.
- b) Pórticos dúctiles de acero con uniones resistentes a momentos, sin arriostramiento.

$C_T = 45$ Para edificios cuyos elementos resistentes en la dirección considerada sean:

- a) Pórticos de concreto armado con muros en las cajas de ascensores y escaleras.
- b) Pórticos de acero arriostrados.

$C_T = 60$ Para edificios de albañilería y para todos los edificios de concreto armado duales, de muros estructurales, y muros de ductilidad limitada.

Tabla N° 10 CATEGORÍA Y REGULARIDAD DE LAS EDIFICACIONES		
Categoría de la Edificación	Zona	Restricciones
A1 y A2	4, 3 y 2	No se permiten irregularidades
	1	No se permiten irregularidades extremas
B	4, 3 y 2	No se permiten irregularidades extremas
	1	Sin restricciones
C	4 y 3	No se permiten irregularidades extremas
	2	No se permiten irregularidades extremas excepto en edificios de hasta 2 pisos u 8 m de altura total
	1	Sin restricciones

Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 21), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.14.5 Desplazamientos Laterales Relativos Admisibles

El máximo desplazamiento relativo de entrepiso, calculado según el numeral 5.1 de la norma E030, no deberá exceder la fracción de la altura de entrepiso (distorsión) que se indica en la Tabla N° 11.

Tabla N° 11 LÍMITES PARA LA DISTORSIÓN DEL ENTREPISO	
Material Predominante	(ζ_i / h_{ei})
Concreto Armado	0,007
Acero	0,010
Albañilería	0,005
Madera	0,010
Edificios de concreto armado con muros de ductilidad limitada	0,005

Nota: Los límites de la distorsión (deriva) para estructuras de uso industrial serán establecidos por el proyectista, pero en ningún caso excederán el doble de los valores de esta Tabla.

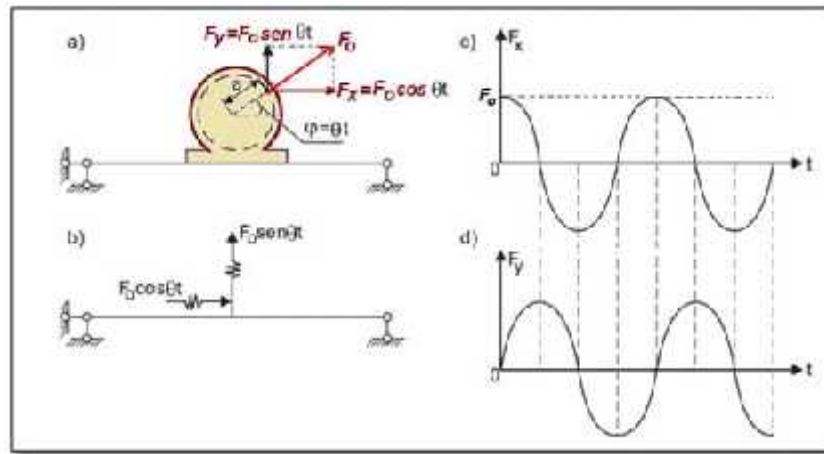
Nota: Fuente: Norma técnica E.030 Diseño sismorresistente (p. 29), por el Ministerio de Vivienda y Construcción 2018. SENCICO

2.3.14.6 CARGAS DINAMICAS APLICADAS A LAS ESTRUCTURAS

2.3.14.6.1 CARGAS DINÁMICAS. Son las cargas que actúan directamente sobre Las estructuras tales que en un intervalo de tiempo muy pequeño van variando y vamos a denotar como $P(t)$ o $f(t)$. como consecuencia de estas cargas generan aceleraciones y aparecen fuerzas adicionales como las fuerzas de inercia aplicadas a las masas logrando aparecer vibraciones.

2.3.14.6.2 CARGA PERIODICA. Esta carga aparece debido a la presencia del movimiento de maquinarias las cuales se repiten cada cierto periodo de tiempo T , generalmente este tipo de carga está en función del seno o coseno, es decir, es sinusoidal y se conoce como Carga vibracional o armónica

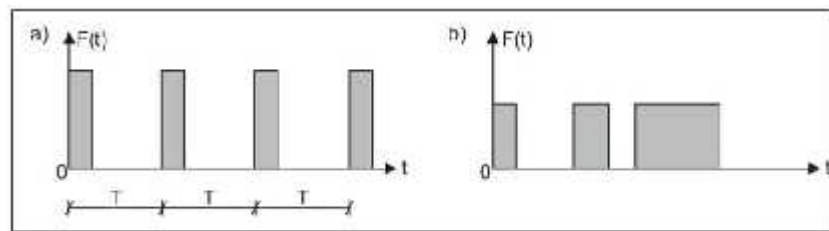
Fig. 13: : Carga periódica originado por la vibración de un equipo mecánico y sus efectos sinusoidales



Nota. Carga periódica, tomado de Curso breve de Dinámica Estructural (p.5), por G. Villarreal, 1era edición 2016, editorial Norte S.R.L

2.3.14.6.3 CARGA DE IMPACTO. Esta carga es debido a una carga insospechada y súbita que originan una variación en la presión en la edificación. Esta carga se genera como consecuencia de una carga que impacta sobre la estructura la cual puede generar vibraciones adicionales sobre las estructuras dependiendo de la propiedades elásticas o inelásticas de dicha estructura pudiendo ser periódicas y no periódicas.

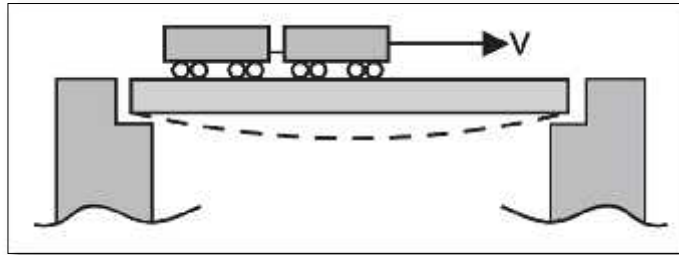
Fig. 14: : Carga de impacto a) Periódico, b) No periódico



Nota. Carga de impacto, tomado de Curso breve de Dinámica Estructural (p.5), por G. Villarreal, 1era edición 2016, editorial Norte S.R.L

2.3.14.6.4 CARGA RODANTE. Esta carga es la que cambia de ubicación constantemente debido a un móvil que se mueve a través de la edificación o fuera de ella provocando vibraciones adicionales sobre la estructura, como, por ejemplo, el paso de un bus por un puente, un tren que pasa muy cercano, etc.

Fig. 15: Carga rodante



Nota. Carga Rodante, tomado de Curso breve de Dinámica Estructural (p.6), por G. Villarreal, 1era edición 2016, editorial Norte S.R.L.

2.3.14.6.5 CARGA DE VIENTO. Esta carga son presiones de viento que actúa sobre edificios altos y de grandes luces, estas varían con la altura y el tiempo y bajo ciertas condiciones puede ser muy importante.

2.3.14.6.6 CARGA SISMICA. La carga sísmica representa las fuerzas horizontales y verticales que un sismo ejerce sobre una estructura debido a la aceleración del suelo, calculadas en función del riesgo sísmico, el tipo de suelo, la masa de la edificación y su periodo natural de vibración. Se determina usando normas técnicas para asegurar que la estructura disipe la energía, a menudo mediante el análisis de cortante basal.

2.3.15 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD (1GDL)

En una edificación de un piso, asumimos que la losa del techo es un **diafragma rígido** (no se deforma en su propio plano) y que toda la masa de la estructura se concentra a ese nivel.

Se llama de "1 grado de libertad" porque solo necesitamos **una coordenada** (usualmente el desplazamiento horizontal (u) para describir completamente la posición de la masa en cualquier instante de tiempo

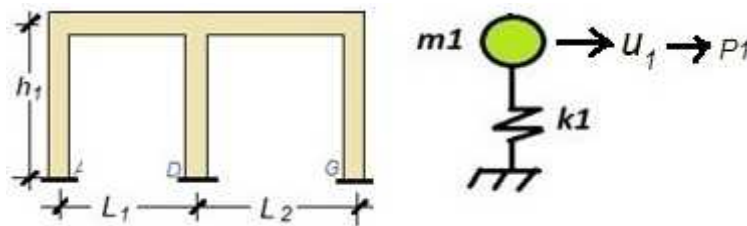
Componentes del modelo:

-) **Masa (m):** Representa el peso de la losa, vigas y una parte de las columnas.
-) **Rigidez (k):** Representa la resistencia de las columnas y muros de concreto armado a deformarse lateralmente.
-) **Amortiguamiento (c):** Representa la capacidad de la estructura para disipar energía (fricción interna, microfisuras en el concreto, etc.).
-) **Fuerza externa (P):** Fuerza externa actuando durante el movimiento

El comportamiento dinámico se rige por la **Segunda Ley de Newton**. Para una estructura sometida a una fuerza externa $P(t)$, la ecuación diferencial lineal de segundo orden está indicado en la ecuación (1.0):

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + C \frac{du(t)}{dt} + K u(t) - F(t) = 0 \quad \dots(2.3.15)$$

Fig. 16: : Estructura de 1 piso que representa 1 grado de libertad, se muestra la masa (m), la rigidez (k), el desplazamiento (u) y la fuerza externa (P)

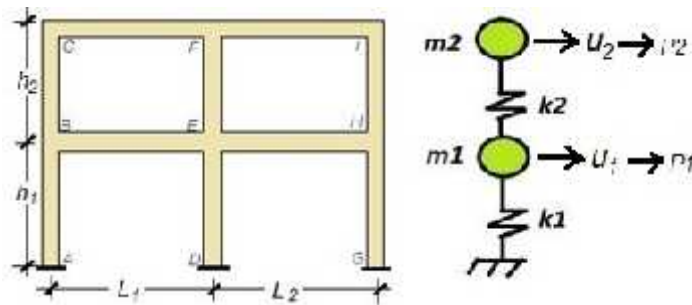


Fuente: Elaboración propia

2.3.16 SISTEMA DE 2 GRADOS DE LIBERTAD (2GDL)

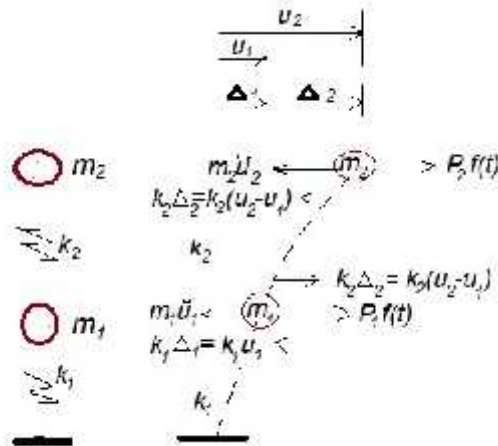
Se observa el sistema simplificado de 2 GDL, en el que se considere las fuerzas inerciales $F_i = m \cdot a$ y las fuerzas actuantes P_i en cada nivel

Fig. 17: : Estructura de 2 pisos que representa 2 grados de libertad, se muestra las masas (m), las rigideces (k), los desplazamientos (u) y las fuerzas externas (P) por cada nivel



Fuente: Elaboración propia

Aplicando el equilibrio dinámico en el primer y segundo piso:



$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) = P_1 \quad \dots (2.3.16.1)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) = P_2 \quad \dots (2.3.16.2)$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = P_1 \quad \dots (2.3.16.3)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = P_2 \quad \dots (2.3.16.4)$$

Ordenando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \quad \dots(2.3.16.5)$$

Esta ecuación matricial es la ecuación diferencial del movimiento dinámico y representa, para este caso, dos ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales que al resolverlas se calculan los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ para 2 niveles que están sometidos a fuerzas externas dinámicas $p_1(t)$ y $p_2(t)$. este sistema de ecuaciones deben resolverse simultáneamente para calcular los desplazamientos u_1 y u_2

Donde:

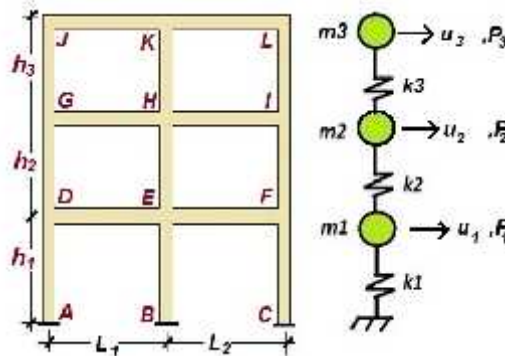
$$m = \text{Matriz de masas: } m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$k = \text{Matriz de rigidez: } k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$p = \text{Vector de carga: } p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

2.3.17 SISTEMA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD (3GDL)

Fig. 18: : Estructura de 3 pisos que representa 3 grados de libertad



Fuente: Elaboración propia

Al realizar el equilibrio por cada nivel, considerando el caso de vibraciones libres no amortiguadas, ya que el efecto sísmico y desplazamientos se mide después de la aplicación de las fuerzas externas tomaremos $p=0$, obtenemos las tres ecuaciones del equilibrio del sistema libre no amortiguadas y no forzadas:

Originando la ecuación matricial del movimiento dinámico para vibraciones libres no amortiguadas y no forzadas siguiente:

$$m_1 \ddot{a}_1 + (k_1 + k_2)u_1(t) - k_2 u_2(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{a}_2 - k_2 u_1(t) + (k_2 + k_3)u_2(t) - k_3 u_3(t) = 0$$

$$m_3 \ddot{a}_3 - k_3 u_2(t) + k_3 u_3(t) = 0$$

que, en formulación matricial, sería:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{a}_2 \\ \ddot{a}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M\ddot{u} + K u = 0 \quad \dots(2.3.17)$$

2.3.18 SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

La ecuación general del movimiento dinámico total para una edificación de n pisos quedara definido por:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + K U = P(t) \quad \dots\dots(2.3.18)$$

2.3.19 DEFINICIÓN DE ANÁLISIS ESTÁTICO

El análisis estático más usado es:

2.3.19.1 Método de las fuerzas laterales equivalentes. En este método la acción del sismo es reemplazada por una distribución de fuerzas laterales cuya magnitud depende de las características de la estructura, las características del suelo y la ubicación en términos de sismicidad.

El método de las fuerzas laterales equivalentes se deriva del método del modal espectral en el que un modo de vibración particular es predominante en comparación con los demás. Este es el caso de los edificios ordinarios (distribución de la rigidez y de la masa normal en la altura del edificio). El sistema se modela con precisión mediante un sistema de un grado de libertad. Normalmente, el primer modo a flexión se considera como un modo de vibración primario que es posible simplificar en mayor grado a una simple línea.

Las fuerzas estáticas equivalentes se calculan de la manera que se indica en la **figura 19**. Entonces es posible efectuar un análisis estático clásico bajo la acción de estas fuerzas estáticas equivalentes.

El único requisito previo de este método consiste en el período de vibración fundamental T de la estructura. Es necesario calcularlo con el fin de hallar el valor del coeficiente sísmico C_s apropiado, necesario para calcular el corte basal V_b . Alternativamente, en el caso de que no se disponga de un valor preciso del período T , es posible calcular aproximadamente el valor del período fundamental y luego los parámetros sísmicos para llegar al cortante basal V_b mediante la utilización de una de las fórmulas recomendadas.

$$V_b = C_s \cdot \Sigma W_i \dots \dots (2.3.19)$$

V_b = Fuerza cortante basal en el piso

C_s = Coeficiente sísmico = $ZUCS/R$. (Ver **2.3.14.2**)

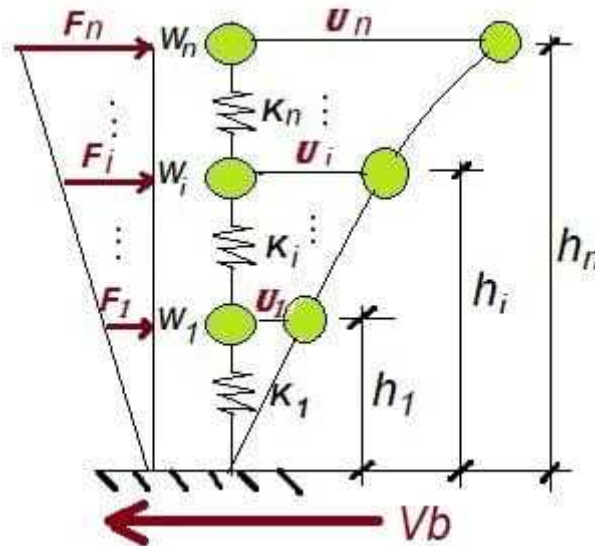
ΣW_i = Suma de los pesos de cada nivel

El método de las fuerzas laterales equivalentes es un método aproximado que resulta adecuado para ciertos tipos de estructuras y para el proyecto preliminar de otras. Puede haber casos en los que este método no sea prudente debido a la posibilidad de que la contribución de los modos de vibración más elevados sea significativa. En estos casos es aconsejable un análisis del espectro de respuesta dinámico completo para la etapa final del proyecto

Para el análisis estático en edificaciones se efectúan primero el cálculo del metrado de cargas que es una técnica con la cual se estiman las cargas actuantes (cargas muertas o permanentes y cargas vivas o sobrecargas) sobre los distintos elementos estructurales que componen el edificio. Este proceso es aproximado ya que por lo general se desprecian los efectos hiperestáticos producidos por los momentos flectores, salvo que estos sean muy importantes. En la Norma Peruana de Cargas E.020 se especifica las cargas estáticas mínimas que se deben adoptar para el diseño estructural.

Este tipo de análisis se realizará para cargas Permanentes o Muertas y Sobrecargas o Cargas Vivas.

Fig. 19: Distribución de la fuerza sísmica basal V_b en los niveles $1, \dots, i, n$



Fuente: Elaboración propia

Donde:

$$F_i = V_b \times \frac{W_i h_i}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k} \quad \dots(2.2.20.1)$$

F_i = Fuerza lateral repartida por piso

V_b = Corte basal en el piso suelo representando la fuerza sísmica

W_i = carga en el piso i

h_i = altura en el piso i

u_i = Desplazamientos en el piso i

2.3.19.2 Análisis por Cargas Permanentes o Muertas:

Este análisis se realizará en base a las cargas que actúan permanentemente en la estructura en análisis tales como: Peso propio de vigas, columnas, losas, tabiquería, acabados, coberturas, etc.

Estas cargas serán repartidas a cada uno de los elementos que componen la estructura, los pesos de los materiales necesarios para la estimación de cargas muertas se encuentran registrados en la Norma de Cargas E.020.

2.3.19.3 Análisis por Sobre cargas o Cargas Vivas:

Este análisis se realizará en base a las sobrecargas estipuladas en Normas Peruanas de estructuras referidas a Cargas E.020.

2.3.20 DEFINICIÓN DE ANÁLISIS DINÁMICO

Existen dos tipos de análisis dinámico:

- Análisis modal (elástico)
 - En el tiempo
 - Espectral
- Análisis dinámico inelástico

2.3.20.1 Análisis modal elástico. En este caso la respuesta de la estructura se determina considerando los modos de vibración de la estructura.

Si se trata de un **análisis en el tiempo**, la respuesta en el tiempo de cada modo se determina por separado y luego se superponen para encontrar la respuesta de la estructura.

Si se trata de un **análisis espectral**, se determinan los máximos por modo de las cantidades de interés y luego se superponen usando alguna regla de combinación apropiada.

2.3.20.2 Análisis dinámico inelástico. En este caso es necesario calcular la respuesta de la estructura a un determinado sismo para cada instante de tiempo y repetir el procedimiento para varios sismos representativos del nivel de riesgo sísmico de interés y se comparan con el calculado en el desarrollo de la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico para verificar los máximos valores de desplazamientos (derivadas) permitidos por la norma peruana E030

Mientras más riguroso sea el análisis se puede obtener un diseño más ajustado, sin embargo, existe una complejidad y un costo asociados. La selección del método de análisis dependerá de la importancia de la estructura, la configuración estructural y otras características de la estructura que hagan más o menos ventajoso usar uno de los métodos de análisis por sobre otro.

Se presentarán en más detalle el método de las fuerzas laterales equivalentes y el análisis modal espectral, por ser los más comunes en los códigos de diseño sísmico modernos

En este tipo de análisis dinámico se buscan las respuestas máximas de ciertos parámetros (aceleraciones, desplazamientos, esfuerzos, etc.) que se producen en una estructura bajo cargas dinámicas o variables con el tiempo. Eso en general requiere el **uso de ecuaciones diferenciales**. Algunos aspectos frecuentes del análisis dinámico incluyen:

-) Análisis modal
-) Determinación de frecuencias propias y periodos de vibración
-) Determinación de fenómenos de resonancia

El análisis dinámico de las edificaciones se realizó mediante procedimientos de superposición espectral, según lo estipulado en la Norma de Diseño Sismorresistente E.030.

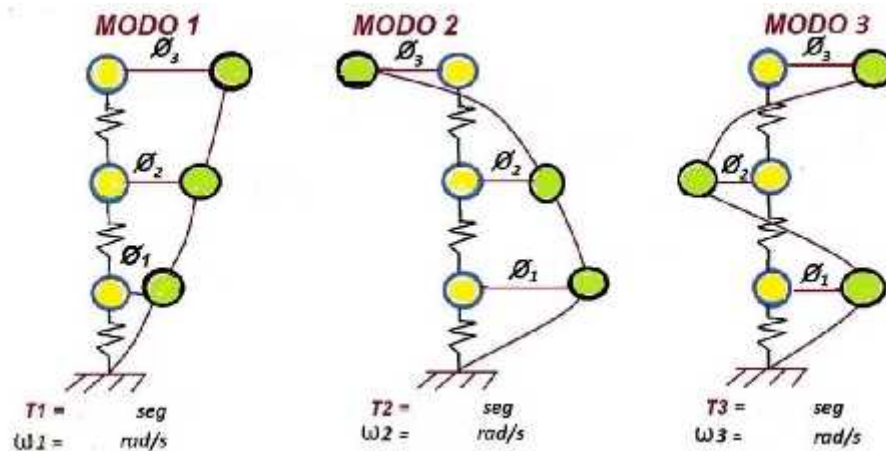
Actualmente la Norma de Diseño Sismorresistente E.030, exige analizar cada dirección con el 100% del sismo actuando en forma independiente: sin embargo,

otros reglamentos contemplan la posibilidad que el sismo actúe en forma simultánea en ambas direcciones: 100% en X y 30% en Y, y viceversa.

Un sismo puede atacar en el sentido N-S o S-N y también O-E o E-O, ya que las aceleraciones son positivas y negativas. De esta manera, para efectos de diseño, debe trabajarse con las envolventes de esfuerzos en condición de rotura. Al estructurar se buscará que la ubicación de columnas y vigas tengan la mayor rigidez posible, de modo que el sismo al atacar, éstas puedan soportar dichas fuerzas sin alterar la estructura.

Para la determinación de los esfuerzos internos de la estructura en un análisis por sismo se podrá emplear el Método de Discretización de masas.

Fig. 20: Distribución de los modos de vibración, frecuencias y periodos



Fuente: Elaboración propia

El método de cálculo modal espectral es el procedimiento típico de las normas modernas para la construcción sísmica. Su objetivo consiste en calcular directamente los efectos máximos del sismo en los diversos elementos de la estructura.

El método general consiste en el cálculo de los diversos modos de vibración de la estructura y de la magnitud de respuesta máxima en cada modo, tomando como referencia un espectro de diseño. Luego, se hace uso de una regla para combinar las respuestas de los diferentes modos. Debido a esta razón, este método también se denomina el método de la superposición modal.

Normalmente, la regla de combinación consistirá en la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diversas respuestas modales. Esta regla de combinación debe aplicarse a todas las cantidades calculadas, es decir, momentos flectores, esfuerzos cortantes, esfuerzos normales y desplazamientos. Como consecuencia de ello, los esfuerzos resultantes no representan un conjunto equilibrado.

2.3.20.3 Método de discretización de masas

Son modelos físicos que permiten comprender de manera simple del comportamiento de las estructuras de una edificación ante solicitaciones sísmicas

Debido a la dificultad para resolver estos problemas estructurales considerados como medios continuos, es decir, al tener que dar la respuesta de un sistema estructural cualesquiera en una infinidad de puntos, se convierte en un problema complejo o complicado. Este problema aparentemente imposible de resolver se facilita solo si calculamos la respuesta en unos cuantos puntos a través de la Discretización de las masas concentradas y demás acciones de puntos determinados.

El número de concentraciones de masas depende de la exactitud deseada en la solución del problema.

Este método de masas concentradas consiste en asumir que la masas se encuentra concentrada en puntos discretos en la que definimos solo desplazamientos, traslaciones, de tal manera que el modelo se asemeje de la mejor manera a la estructura real.

Las cargas dinámicas serán determinadas en base a un análisis dinámico según la ecuación diferencial matemática que gobierna la respuesta dinámica la cual se conoce con el nombre de ecuación de movimiento y se expresa de la siguiente manera:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + K u(t) = m_x u_g(t) + m_y u_g(t) + m_z u_g(t) \dots (2.3.20)$$

Resultando la ecuación general del movimiento dinámico ya conocida:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + K U(t) = F(t) \dots\dots\dots(2.3.20.a)$$

Donde:

K : Matriz de rigidez de la Estructura.

C : Matriz de amortiguamiento de la Estructura.

M : Matriz de masas de la Estructura.

$u_x(t)$, $u_y(t)$, $u_z(t)$: son las aceleraciones, velocidades y desplazamientos asociado a cada grado de libertad.

m_x , m_y , m_z : son las masas en cada dirección.

u_{gx} , u_{gy} , u_{gz} : son las aceleraciones del terreno en cada dirección.

Uno de los métodos usados y de más fácil aplicación para obtener la solución de la ecuación diferencial de movimientos es el método de Superposición Modal para lo cual se hará uso del espectro de respuesta el cual se encuentra descrito en la Norma Peruana para el Diseño Sismorresistente E.030.

2.3.21 CÓDIGOS Y NORMAS:

El proceso de estimación de las cargas, así como el análisis y diseño de las estructuras está basado en los siguientes códigos:

2.3.21.1 Cargas

- Norma Técnica E-020.
- Norma de Diseño Sismorresistente E-030.
- Norma de Concreto Armado E-060

Se entiende que todas aquellas normas a las que los códigos hacen referencia forman parte integrante de los mismos en tanto sean aplicable a los materiales, cargas y procedimientos usados en el presente proyecto.

2.3.21.2 Diseños

- Norma Técnica E-020, Cargas.
- Norma Técnica E-030, Diseño Sismorresistente.
- Norma Técnica E-050, Suelos y Cimentaciones.
- Norma Técnica E-060, Concreto Armado.
- Norma Técnica E-070, Albañilería.
- Norma de Construcciones en Concreto Armado ACI 318-05

2.3.22 DEFINICIÓN DE SISMOLOGÍA

La palabra sismología es de origen griego “*seísmos*” que significa “*sismo*” y “*logos*” que expresa “*tratado*”, en consecuencia, es la ciencia que trata sobre los terremotos.

Como tal, la sismología es una rama de la geofísica que se encarga de estudiar los sismos, terremotos o temblores y la propagación de las ondas mecánicas (sísmicas) que se generan en el interior de la tierra y en la superficie terrestre.

Un sismo, por su parte, es un movimiento brusco y repentino del terreno que se produce por la acción de fuerzas en el seno del globo terráqueo

Se considera que la sismología forma parte de la geofísica (la disciplina que analiza las cuestiones físicas de nuestro planeta). El objeto de estudio de la sismología, por lo tanto, son estudiar y determinar la localización del hipocentro y el epicentro de las ondas sísmicas que provocan los sismos

2.3.23 DEFINICIÓN DE EFECTOS SÍSMICOS

Un terremoto (del latín *terra* ‘tierra’, y *motus* ‘movimiento’), también llamado seísmo o sismo (del griego σεισμός [*seismós*]), temblor o temblor de tierra, es un fenómeno de sacudida brusca y pasajera de la corteza terrestre producida por la liberación de energía acumulada en forma de ondas sísmicas. Los más comunes se producen por la ruptura de fallas geológicas. También pueden ocurrir por otras causas como, por ejemplo, fricción en el borde de placas tectónicas, procesos volcánicos o incluso

pueden ser producidas por el hombre al realizar pruebas de detonaciones nucleares subterráneas.

El punto de origen de un terremoto se denomina hipocentro. El epicentro es el punto de la superficie terrestre directamente sobre el hipocentro. Dependiendo de su intensidad y origen, un terremoto puede causar desplazamientos de la corteza terrestre, corrimientos de tierras, maremotos (o también llamados tsunamis) o la actividad volcánica. Para medir la energía liberada por un terremoto se emplean diversas escalas, entre ellas, la escala de Richter es la más conocida y utilizada en los medios de comunicación.



Fig. 21: Nivel de destrucción por efecto sísmico

2.3.23.1 Causas de los sismos

La causa de los terremotos se encuentra en la liberación de energía de la corteza terrestre acumulada a consecuencia de actividades volcánicas y tectónicas, que se originan principalmente en los bordes de la placa.



Fig. 22. Falla de San Andrés. La posibilidad de un terremoto en California (Estados Unidos) es una de las más altas del mundo. Tanto es así que ya se le llama "The Big One" al futuro sismo.

Aunque las actividades tectónicas y volcánicas son las causas principales por las que se generan los terremotos hay otros factores que pueden originarlos:

-) Acumulación de sedimentos por desprendimientos de rocas en las laderas de las montañas.
-) hundimiento de cavernas.
-) Modificaciones del régimen fluvial.
-) Variaciones bruscas de la presión atmosférica por ciclones.

Estos fenómenos generan eventos de baja magnitud, que generalmente caen en el rango de **microsismos**: temblores detectables sólo por sismógrafos.

2.4 MARCO CONPTUAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

2.4.1 DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una **ecuación diferencial** es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. Representan matemáticamente la física del movimiento y las deformaciones en el tiempo para sistemas como estructuras, como, por ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 5x - y - 2 = 0 \quad \dots(2.4.1)$$

Según el Dr. M. Cortez G., en su texto; “Ecuaciones diferenciales” una ecuación diferencial es una ecuación que incluye una variable dependiente y sus derivadas, con respecto a una o más variables dependientes.

2.4.2 HISTORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en los trabajos de cálculo de Newton y Leibniz. En 1671, el Capítulo 2 de su trabajo "*Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum*",¹ Isaac Newton hizo una lista de tres clases de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y \quad \dots(2.4.2.a)$$

Resolvió estas ecuaciones y otras usando series infinitas y discutió la no unicidad de las soluciones.

Luego, Jacob Bernoulli propuso la ecuación diferencial que lleva su nombre, “*ecuación de Bernoulli*” en 1695. Esta es una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \dots(2.24.b)$$

Para que luego, en los siguientes años, Leibniz obtuvo sus soluciones mediante simplificaciones.

Históricamente, el problema de una cuerda vibrante tal como la de un instrumento musical, fue estudiado por Jean le Rond d’Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, y Joseph-Louis Lagrange. En 1746, d’Alembert descubrió la ecuación de onda unidimensional, y en días siguientes Euler

Las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron desarrolladas en la década de 1750 por Euler y Lagrange en relación con sus estudios del problema de la tautócrona. Este es el problema de determinar una curva en la cual una partícula con peso caerá en un punto fijo en cierta cantidad fija de tiempo, independiente del punto de partida.

Lagrange resolvió este problema en 1755 y envió la solución a Euler. Ambos desarrollaron el método de Lagrange y lo aplicaron a la mecánica, lo que los condujo a la mecánica Lagrangiana.

En 1822 Fourier publicó su trabajo de transferencia de calor en *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor),⁹ en la que basó su razonamiento en la ley del enfriamiento de Newton, esto es, que la transferencia de calor entre dos moléculas adyacentes es proporcional a diferencias extremadamente pequeñas de sus temperaturas

En este libro Fourier expone la ecuación del calor para la difusión conductiva del calor. Esta ecuación en derivadas parciales es actualmente objeto de estudio en la física matemática.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas, que amplían tanto la teoría de las ecuaciones diferenciales como la teoría de la probabilidad, fueron introducidas con un tratamiento riguroso por Kiyoshi Itô y Ruslan Stratonovich durante los años 1940 y 1950.

En las aplicaciones, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio y la ecuación define la relación entre ellas. Como estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en muchas disciplinas, incluyendo la ingeniería, física, economía, y biología.

En matemáticas puras, solo las ecuaciones diferenciales más simples se pueden resolver mediante fórmulas explícitas, si la solución exacta no puede hallarse, esta puede obtenerse numéricamente, mediante una aproximación usando

computadoras. La teoría de sistemas dinámicos hace énfasis en el análisis cualitativo de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, mientras que muchos métodos numéricos han sido desarrollados para determinar soluciones con cierto grado de exactitud.

2.4.3 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES:

Se clasifican en:

- a) **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.)**, son aquellas que contienen derivadas con respecto a una variable independiente.

Ejemplo de EDO:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 8x - 2 = 0 \quad \dots(2.4.3a)$$

- b) **Ecuaciones diferenciales Parciales: (E.D.P.)**, son aquellas que contienen derivadas con respecto a dos o más variables independientes, de tal modo que las derivadas que se encuentran en ella son parciales

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial t} + 4x - 2 = 0 \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \dots(2.4.3b)$$

2.4.4 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT:

Enunciado por Jean D'Alembert en su obra maestra "*Tratado de la mecánica*" de 1743, establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y las fuerzas de inercia forman un sistema de fuerzas en equilibrio (igual a cero) para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

A este sistema en equilibrio se le denominó Ecuación del equilibrio dinámico.

La gran idea: D'Alembert demostró que las leyes de la estática podían aplicarse a cuerpos en movimiento introduciendo el concepto de fuerzas de inercia.

El término $M\ddot{U}$ (masa por aceleración) representa precisamente esa fuerza de inercia que d'Alembert conceptualizó para convertir un problema dinámico en uno de "equilibrio dinámico"

Resolvió la ecuación de la onda unidimensional (que describe cómo vibra una cuerda de violín), la cual es la base matemática para entender los **modos de vibración** de los elementos estructurales.

Su solución (la "solución de D'Alembert") permite descomponer el movimiento en ondas que viajan en direcciones opuestas, un concepto fundamental para el análisis sísmico y de estructuras bajo acciones dinámicas.



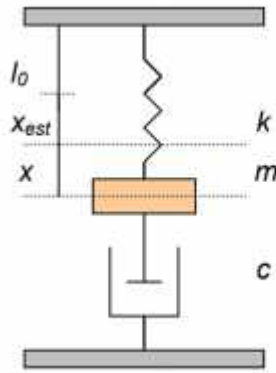
Fig. 23 Jean-Baptiste le Rond **d'Alembert** (1717–1783) fue una de las mentes más brillantes de la Ilustración francesa. Fue una polímata que dejó una huella imborrable como matemático, físico y filósofo.

2.4.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DINÁMICO

Se estudia, a las estructuras más simples, se busca analizar las vibraciones de las estructuras cuando se les aplica una fuerza lateral en la parte superior o debido a un movimiento horizontal de la base del terreno de cimentación debido a un movimiento sísmico para ello se utilizó la solución de la ecuación del movimiento dinámico, formado por una ecuación diferencial de segundo orden y lineal.

Aquí se efectúa un análisis de los datos obtenidos aplicando el principio de D'Alembert para plantear la ecuación general del movimiento dinámico para su posterior interpretación.

Supongamos que el sistema de la figura, que puede representar a un elemento estructural columna, está formado por una masa principal “ m ”, un elemento recuperador elástico de constante “ K ” y un dispositivo amortiguador de constante “ c ”



Notación:

K : constante de rigidez elástica

m : masa principal

c : coeficiente de amortiguación

F : resultante de las fuerzas exteriores

l_0 : longitud inicial del muelle

x_{est} : deformación en equilibrio estático

x : desplazamiento

Fig. 24 Modelo físico de masa m , constante k y amortiguador c

Donde:

Fuerza de inercia : $-mx''$

Fuerza elástica : $-k(x+x_{est})$

Fuerza amortiguadora : $-cx'$

Fuerza de gravedad : mg

Fuerza exterior : F

La ecuación es: $mx'' + cx' + k(x + x_{est}) = mg + F$

Pero, según ley de Hooke: $mg = kx_{est}$

Reemplazando, queda la ecuación diferencial general del movimiento dinámico:

$$mx'' + cx' + kx = F \quad \dots(2.4.5 \text{ a})$$

Para un sistema de varios grados de libertad(3pisos), esta ecuación diferencial se convierte en un sistema de ecuaciones por lo que se resuelve como ecuación matricial de la forma;

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + K U(t) = F(t) \quad \dots(2.4.5 \text{ b})$$

Donde:

M	: Matriz de masas de la Estructura.
K	: Matriz de rigidez de la Estructura.
C	: Matriz de amortiguamiento de la Estructura
$F(t)$	: Fuerza externa que origina el movimiento en el tiempo

Condiciones: $m>0$, $c>0$, $k>0$

-) La masa principal de una edificación solo tiene movimiento horizontal sin rozamiento
-) El resorte tiene una masa despreciable con respecto a la masa principal de la estructura y su fuerza recuperadora elástica según la ley de Hooke, es proporcional a la deformación (x), es decir: $F_e = -kx$
-) El amortiguador tiene su masa móvil y es despreciable frente a la masa principal de la estructura y su fuerza amortiguadora (también recuperadora) es opuesta a la velocidad (x') y es proporcional a ella, es decir: $F_a = -cx'$
-) El sistema se considera que se desarrolla en el vacío

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden. Sin embargo, para esta investigación solo tomaremos el caso de vibraciones libres no amortiguadas, por las razones ya expuestas, para el cual la ecuación diferencial del movimiento dinámico queda simplificada de la forma ya indicada:

$$M\ddot{U}(t) + K U(t) = 0 \quad \dots(2.4.5 \text{ c})$$

Ahora analizaremos cada una de las clases de las vibraciones:

2.4.6 VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO ($F(t)=0$, $C=0$)

Estas vibraciones libres ($F(t)=0$) no amortiguadas ($C=0$) se producen cuando no existen fuerzas disipadoras, ya que una vez que se inician, estas oscilaciones se mantienen en forma indefinida dependiendo de la fuerza

recuperadora $F(x) = -Kx$ resultando la siguiente ecuación diferencial del movimiento:

Partiendo de: $M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + K(t) = F(t)$, resulta:

$$M\ddot{U}(t) + K(t) = 0, \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$mx'' + kx = 0 \quad \text{..(2.4.6)}$$

$$U(t)=x, \quad \ddot{U}(t) = x''$$

2.4.7 Forma general de la solución de ED ordinarias, lineales

Sea las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, homogéneas con coeficientes constantes de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad \text{..... (2.4.7 a)}$$

Donde; $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes

Para su solución se considera el Polinomio Característico siguiente:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad \text{.....(2.4.7 b)}$$

Como el polinomio característico $P(r)=0$ es de grado n , entonces sus raíces son:

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n = 0,$$

las cuales pueden ser: Raíces reales y distintas, raíces reales de multiplicidad o raíces complejas y conjugadas

Si las raíces del polinomio característico $P(r)=0$ son complejas y conjugadas de la forma:

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad r_2 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad r_3 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad r_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad \text{.....(2.4.7 c)}$$

Y si además contiene raíces reales y distintas, entonces la solución general de la ecuación diferencial tiene la siguiente forma;

$$y_g = c_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + c_3 e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x + c_4 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x + c_5 e^{r_5 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad \text{(2.4.7 d)}$$

2.4.8 Solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico para vibraciones libres sin amortiguamiento

Sea la ecuación diferencial lineal del movimiento: $mx'' + kx = 0$

Según la definición anterior, la ecuación característica es:

$$P(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \rightarrow, \quad mr^2 + k = 0 \rightarrow r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Al resolverla resulta raíces imaginarias y conjugadas: $r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$ (2.4.8 a)

Las raíces imaginarias conjugadas son de la forma: $r = \alpha \pm \beta$

Comparando con la raíz, resulta: $\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = w_n$ (2.4. b)

Entonces la solución general será:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \quad \text{.....(2.4.8 c)}$$

Reemplazando los valores: $\alpha = 0, \quad \beta = w_n$, queda:

$$x(t) = c_1 \cos w_n t + c_2 \sin w_n t \quad \text{.....(2.4.8 d)}$$

Demostración:

Sea: $x(t) = c_1 \cos (w_n t) + c_2 \sin (w_n t)$

$$x'(t) = -c_1 w_n \sin (w_n t) + c_2 w_n \cos (w_n t)$$

$$x''(t) = -c_1 w_n^2 \cos (w_n t) - c_2 w_n^2 \sin (w_n t)$$

$$x''(t) = -w_n^2 (c_1 \cos (w_n t) + c_2 \sin (w_n t)) = -w_n^2 x(t)$$

$$x''(t) + w_n^2 x(t) = 0$$

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow m x'' + k x = 0, \quad \text{Es lo que queríamos demostrar}$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2

Aplicamos condiciones de frontera:

Para $t = 0$: $x = x_0$: desplazamiento inicial conocido y

$x' = v_0$: Velocidad inicial conocida

Reemplazando en la ecuación obtenida resulta:

$$x_0 = c_1, \quad x'(t) = v_0 = c_2 w_n \rightarrow c_2 = \frac{v_0}{w_n}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{w_n} \sin(w_n t) + x_0 \cos(w_n t) \quad \dots(2.4.8 e)$$

También la solución general de la ecuación del movimiento armónico se puede expresar de la forma: $x = a e^{i(\beta + \varphi)}$

Reemplazando los valores de $\alpha = 0$ y $\beta = w_n$ resulta

$$x = a \cos(w_n t + \varphi) \quad \dots(2.4.8 f)$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\frac{r}{s} \right) \text{ y } T = \frac{2\pi}{w_n} (s) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} (s) \quad \dots(2.4.8 g)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a &: \text{amplitud} & (A) \\ w_n &: \text{frecuencia angular} & \text{rad/s} \\ \varphi &: \text{fase inicial} & \text{rad} \\ a, \varphi &: \text{constantes} & \text{dependen de } t_0 \\ T &= P & \text{periodo} & \text{seg} \end{aligned}$$

Determinación de las constantes:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(w_n t + \varphi) \\ x' &= -a w_n \sin(w_n t + \varphi) \end{aligned}$$

Condiciones iniciales con: $t=0$

$$\begin{aligned} x &= x_0 = a \cos \varphi \rightarrow a \cos \varphi = x_0 \\ x'_0 &= -a w_n \sin \varphi \rightarrow a \sin \varphi = \frac{x'_0}{w_n} \end{aligned}$$

Dividiendo

$$\tan \varphi = x'_0 w_n / x_0$$

$$a = \frac{x_0}{\cos \varphi} \text{ y } \sin \varphi = \frac{x'_0}{w_n a} \rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x'_0}{w_n} \right)^2}$$

Considerando un sistema de 3 grados de libertad (3 niveles), la ecuación se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales por lo tanto sería una ecuación matricial de la forma: $M\ddot{U}(t) + K U(t) = 0$,

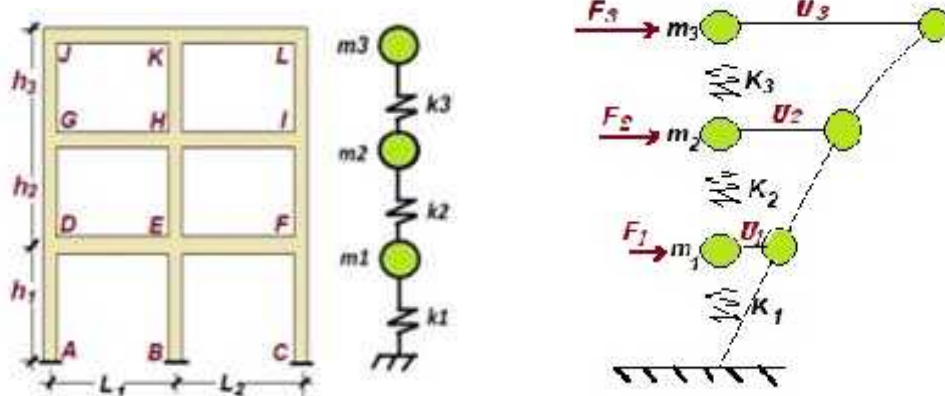


Fig. 25 Modelo de un sistema de 3 grados de libertad (3 niveles)

Graficando las vibraciones dinámicas:

Posición $x(t)$:

$$x(t) = a \quad (w_n t + \varphi)$$

Velocidad $V(t)$:

$$x'(t) = a w_n c_1 \quad (w_n t + \varphi)$$

Aceleración $a(t)$:

$$x''(t) = -a w_n^2 s_1 \quad (w_n t + \varphi)$$

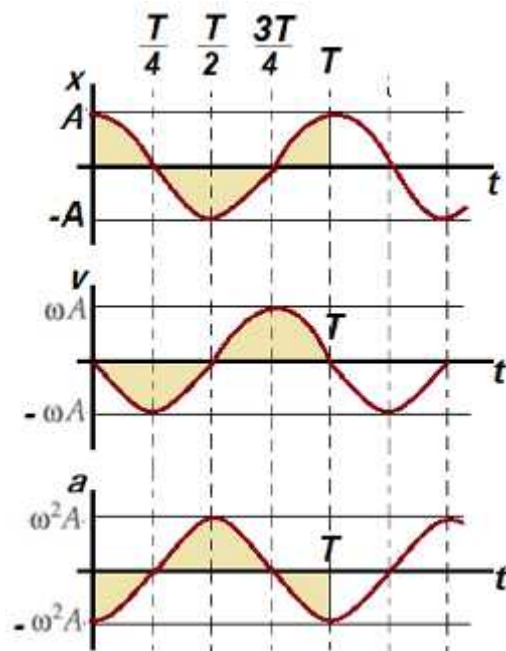


Fig. 26 grafica de las vibraciones libres dinámicas no amortiguadas sinusoidales

CAPÍTULO III

METODOLÓGIA DE LA INVESTIGACION

En este capítulo se desarrolla la metodología a utilizar, las técnicas e instrumentos de la investigación, el procedimiento para la recolección de datos y las técnicas de procesamiento y análisis de datos.

3.1. MÉTODOS DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación sigue un enfoque cuantitativo y aplica el método deductivo. El estudio parte del planteamiento de la ecuación diferencial del movimiento cuya solución permite resolver problemas aplicados a las edificaciones que son estructuras sometidas a acciones sísmicas y se toman las conclusiones a través de un procedimiento de análisis y cálculo matemático, es decir, usaremos las herramientas matemáticas del desarrollo de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, de segundo orden y el Análisis matricial y así contrastar la hipótesis planteada.

Por su avance temporal, es una investigación transversal

También usaremos el método de “modelamiento matemático y simulación computacional”

3.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Por su finalidad es del **tipo básica** porque contribuye a la ampliación del conocimientos y teorías relacionados con el tema y es **aplicada** por que el conocimiento se aplica a situaciones reales en provecho de la sociedad.

Básica - Teórica con aplicación computacional

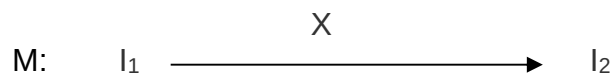
3.3 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para demostrar la hipótesis de la investigación se ha elegido un método de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y de segundo orden de modo que su solución nos lleve a establecer una relación entre la variable independiente (Ecuaciones diferenciales) con la variable dependiente (Análisis de respuesta estructural)

Como consecuencia la operacionalización de sus variables que se derivan a su vez de los objetivos e hipótesis, en este proyecto, los procedimientos que se seguirán para validar la hipótesis planteada en la realidad y responder a las preguntas de la presente investigación, y nos permitirá saber a dónde estamos dirigiendo nuestra investigación, se empleará el diseño Cuasi experimental ya que se realizó simulaciones controladas con programas en Excel

Gráficamente el diseño se presenta como sigue.

Esquema:



Donde:

M : Muestra

I₁, : Información obtenida de la muestra

X: Solución de las ecuaciones diferenciales planteadas

→ : Aplicación de la metodología a aplicar

I₂, : Información final obtenida de la muestra

3.4 NIVEL DE INVESTIGACION

El nivel usado fue el **Explicativo y Predictivo**; Se trata de explicar la influencia de las ecuaciones en el análisis estructural y predecir con anticipación el posible colapso o daño de la estructura.

3.5 POBLACIÓN Y MUESTRA

3.5.1 Población: Se tomó como población solo a los edificios de concreto armado de la ciudad de Lima.

3.5.2 Muestra: Para el análisis estructural se tomó como muestra a un edificio de 3 pisos como modelo representativo del distrito de San Juan de Miraflores y se simuló como un árbol de tres niveles

3.6 OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES:

Tabla N°12: definición de variables e indicadores

Variables	Definición	Indicadores
Independiente: <i>Solución de las ecuaciones diferenciales</i>	Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial	Solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal para los casos: } Vibraciones libres amortiguadas y no amortiguadas } Vibraciones forzadas amortiguadas y no amortiguadas

Dependiente: <i>Análisis de respuesta estructural</i>	Es la respuesta de una estructura sometida a acciones dinámicas en general y en particular a terremotos, dependiendo fundamentalmente de las características de la estructura y de la excitación como el intervalo de frecuencias, amplitud, duración e historia temporal (Bazán y Meli, 1992)	Para sistemas de más de un grado de libertad sometidas a una acción dinámica.)Desplazamientos)Frecuencias)Periodos de vibración)Modos de vibración
--	--	--

3.7 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCION DE DATOS

Toda la información y datos de esta investigación fue tomado de algunos textos publicados de diferentes autores, de revistas especializadas relacionados a las ecuaciones diferenciales y al análisis dinámico y sísmico y del Reglamento de ingeniería Sismorresistente E-030 del Perú.

Para la variable independiente (Las ecuaciones diferenciales) se ha revisado publicaciones de diferentes autores y se ha seguido el procedimiento de solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal y de segundo orden.

Para la variable dependiente (Análisis de respuesta estructural) se utilizó básicamente la Norma E-030 Diseño Sismorresistente del Reglamento Nacional de Edificaciones del Perú valido con Decreto Supremo N 011-2006-vivienda, vigente, el cual se acondiciono en base a publicaciones similares.

La validación de los instrumentos se hizo a través del análisis y aprobación de la Norma E030 de diseño sismorresistente el cual se utilizó usando la solución de una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden el cual se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales y llega a una ecuación matricial dependiendo de los modos de vibración dando como solución con bastante aproximación dentro de los límites permitidos por la Norma.

Los datos numéricos relacionados a las dimensiones de los elementos estructurales como columnas, vigas, losas, se tomó de una edificación representativa de tres pisos

ubicado en el distrito de San Juan de Miraflores de Lima-Perú, del cual se tomó los parámetros sísmicos de la zona según NP E030

3.8 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el análisis de los resultados en base a los datos obtenidos de las medidas de la edificación, y de diferentes publicaciones de la variable independiente se utilizó la técnica de análisis de resolución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico, que resulta ser una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden, propuesto por el principio de D'Alembert y las leyes de movimiento de Newton por el cual se analiza para diferentes niveles y modos de vibración con ciertas consideraciones tales como vibraciones libres con y sin amortiguamiento y para vibraciones forzadas con y sin amortiguamiento.

Para el análisis de los resultados de la variable dependiente ((Análisis de estructuras bajo acciones dinámicas), se utiliza la norma E.030 de RNE vigente de tal manera que pueda verificarse los máximos desplazamientos horizontales debido a los diferentes modos de vibración de las estructuras sometidas a cargas dinámicas.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos en base a los datos recopilados y a los procedimientos de cálculos que para esta investigación se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y de segundo orden.

De la solución de estas ecuaciones diferenciales, se analiza su aplicación en las estructuras que están sometidas a cargas dinámicas. Aquí se demuestra la gran aplicación que tiene en la forma de vibrar las estructuras y se analiza el desplazamiento de los niveles de vibración de las edificaciones

4.2 ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis se fundamenta en la resolución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico simplificada:

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + K(t) = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

Se tomaron las mediciones de masas(M) por niveles a través del metrado de cargas y rigideces(K) en las columnas.

Del análisis estático y el análisis dinámico (basado en ecuaciones diferenciales) arrojan valores convergentes; además, ambos confirman la vulnerabilidad de los niveles estudiados. Esto valida la **Hipótesis General**: la solución de las ecuaciones diferenciales permite determinar con precisión la respuesta estructural para anticipar fallas, lo cual se muestra a continuación.

Para este modelo aplicativo utilizaremos el edificio de 3 pisos indicado en la figura 27, 28 y 29 adjunta

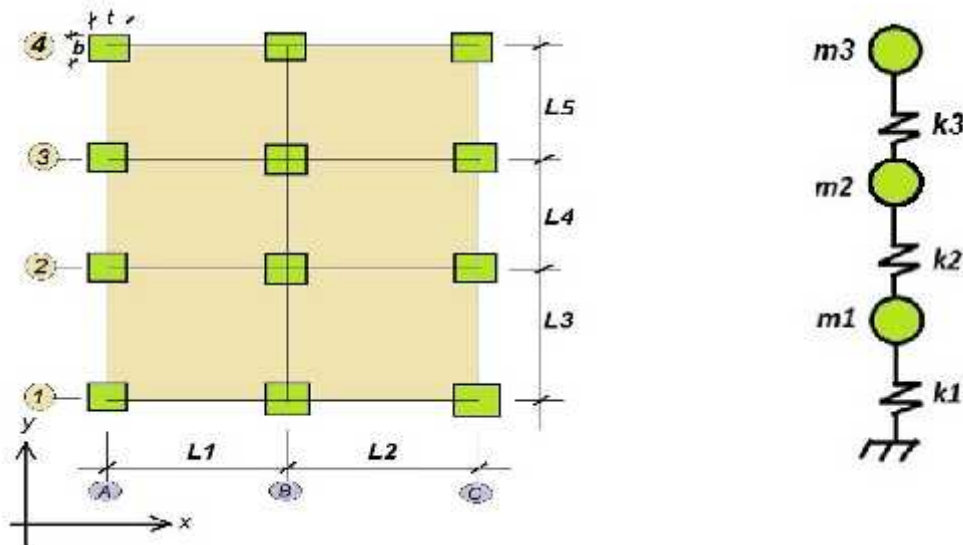


Fig. 27: Edificio de 3 niveles compuesto por una estructura aporticada de vigas, losas aligeradas y 12 columnas de concreto armado convertido a un sistema equivalente con modelamiento sísmico de masas m y rigideces k , simulando un sismo en el eje x . la cual resolveremos utilizando las soluciones de una ecuación diferencial del movimiento dinámico para el caso de vibraciones libres no amortiguadas: $mx'' + kx = 0$

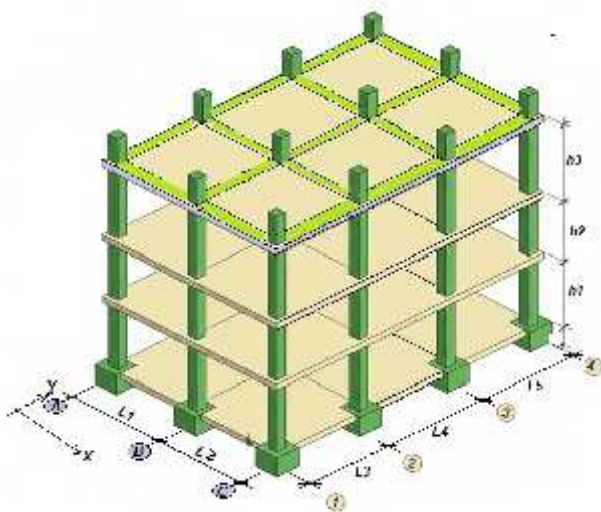


Fig. 28: Plano en planta

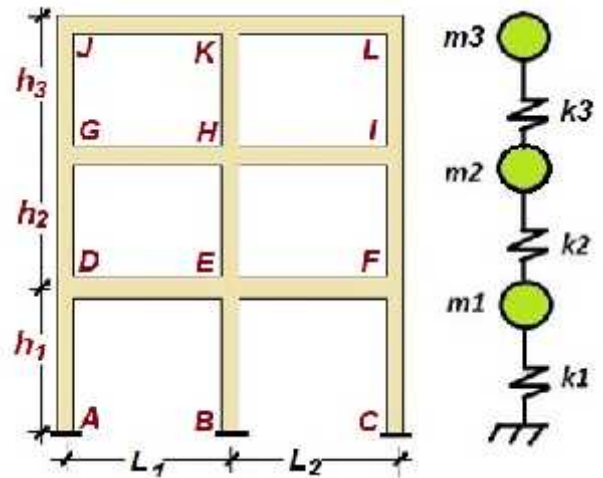


Fig. 29: Elevación frontal

4.3: PARTE I: ANALISIS SISMICO ESTATICO

4.3 INTERPRETACIÓN DE DATOS

Efectuar el análisis sísmico estático y calcular:

- a)** El metrado de cargas
- b)** El peso total de la edificación por cada nivel
- c)** Los parámetros sísmicos Z, U, C, S, R
- d)** El cortante basal en ton y las fuerzas repartidas por niveles
- e)** Las rigideces, utilizando el método de Wilbur en el eje x
- f)** Los desplazamientos laterales y los desplazamientos relativos (Derivas inelásticas)

Tabla 13: Datos del modelo a analizar

Alturas 3 niveles (m)			Longitud eje x(m)		Longitud eje y (m)			f'c
h1	h2	h3	L1	L2	L3	L4	L5	kg/cm2
3.00	2.90	2.80	3.80	4.00 m	4.20	4.50	4.80	280

EJE X			
Niveles	Columnas	vigas VS1	
PISOS	bxt	bxh	
1, 2 y 3	40x50 cm	30x40 cm	

EJE Y			
Niveles	Columnas	viga VA	
PISOS	bxt	bxh	
1, 2 y 3	40x50 cm	30x40 cm	

Losa aligerada	Peso	Peso	Uso	Ubicación	Perfil de suelo	Sistema estructural	Irregularidades
Peralte	Acabados	Tabique	U	Z	S	Ct y Ro	Ip
20 cm	150 kg/m2	120 kg/m2	Vivienda	Lima-Lima-San Juan de Miraflores	Suelo intermedio	pórticos de concreto armado, sin muros de corte	No presenta irregularidades

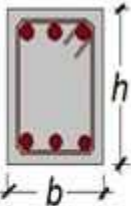
Columnas:	$b =$	0.40	m
$C(b \times t)$	$t =$	0.50	m
Vigas bh:	$b =$	0.30	m
$V(b \times h)$	$h =$	0.40	m

$L1 =$	3.80	m
$L2 =$	4.00	m
$L3 =$	4.20	m
$L4 =$	4.50	m
$L5 =$	4.80	m

$h1 =$	3.00	m
$h2 =$	2.90	m
$h3 =$	2.80	m
# Col	12.00	

H losa aligerada	$=$	0.20	m
Peso acabados	$=$	150	kg/m ²
Peso tabiquería	$=$	120	kg/m ²
$f'c$	$=$	280	kg/cm ²
S/C	$=$	250	kg/m ²
S/C ultimo piso	$=$	150	kg/m ²

Peso propio de losas aligeradas		
H	Peso propio (pp)	
0.17	280	kg/m ²
0.20	300	kg/m ²
0.25	350	kg/m ²
Peso propio	300	kg/m ²



a) **Metrado de cargas**

Tabla 14: Resultados de los pesos por metrados de carga en toneladas (ton)

Viga en X - V(bxh) : Nivel 1					
Eje	L1+L2	b	h	γ_{conc}	$P_{vx}=2.4bhL$
Eje 1	7.80	0.30	0.40	2.4	2.2464 ton
Eje 2	7.80	0.30	0.40	2.4	2.2464 ton
Eje 3	7.80	0.30	0.40	2.4	2.2464 ton
Eje 4	7.80	0.30	0.40	2.4	2.2464 ton
$\Sigma vx =$					8.9856 ton

Viga en Y - V(bxh) : Nivel 1					
Eje	L3+L4+L5	b	h	γ_{conc}	$P_{vy}=2.4bhL$
Eje A	13.50	0.30	0.40	2.4	3.888 ton
Eje B	13.50	0.30	0.40	2.4	3.888 ton
Eje C	13.50	0.30	0.40	2.4	3.888 ton
$\Sigma vy =$					11.664 ton

Columnas en X - C(bxt)							
Nivel	he=(hi+hi+1)/2		b	t	#Col	γconc	P=2.4hebt#Col
1	3.00	2.95	0.40	0.50	12.00	2.4	16.992 ton
2	2.90	2.85	0.40	0.50	12.00	2.4	16.416 ton
3	2.80	1.40	0.40	0.50	12.00	2.4	8.064 ton
						Σ c =	41.472 ton

Losa aligerada		
Área	Wlosa	P(Ton)
105.3	0.300	31.59

Acabados		
Área	Wacab	P(Ton)
105.30	0.150	15.795

Tabiquería		
Área	Wtab	P(Ton)
105.3	0.120	12.636

S/C		
Área	Ws/c	P(Ton)
105.3	0.250	26.325

S/C techo		
Área	Ws/c	P(Ton)
105.3	0.150	15.795

Nivel	Viga en x	Viga en y	Columnas	Losa	Acab	Tab	S/C	CM	CV	P(ton)
1	8.9856	11.664	16.992	31.59	15.795	12.636	26.325	123.988	26.325	130.57
2	8.9856	11.664	16.416	31.59	15.795	12.636	26.325	123.412	26.325	129.99
3	8.9856	11.664	8.064	31.59	15.795	12.636	15.795	104.53	15.795	108.48

b) Peso de la edificación en toneladas (Ton)

PISO	CM: Carga muerta	CV: Carga viva	Peso (Ton)
3	104.530	15.795	108.478
2	123.412	26.325	129.993
1	123.988	26.325	130.569
TOTAL =			369.04

c) Los parámetros sísmicos Z, U, C, S, R

En el contexto de esta tesis doctoral, los parámetros **Z-U-C-S-R** son los factores fundamentales establecidos por la **Norma E.030 de Diseño Sismorresistente** para determinar la fuerza sísmica y la respuesta dinámica de una estructura.

Estos parámetros transforman la peligrosidad sísmica de una ubicación y las características del edificio en valores numéricos que alimentan las ecuaciones diferenciales.

Para el caso, por las condiciones de la zona tenemos:

Tabla 15: Cálculo de los parámetros sísmicos

Proyecto: Portico de concreto armado para oficinas
Lugar: Lima -San Juan de Miraflores

PASO	SIMBOLO	Coeficiente	Dato	En Norma E30
1	$Z =$	0.45	ZONA 4	TABLA N° 1 - E030
2	$S =$	1.05	S2:Intermedios	TABLA N° 3 - E030
3	$T_P =$	0.6	S2	TABLA N° 4 - E030
4	$T_L =$	2.0	S2	TABLA N° 4 - E030
5	$T =$	0.25	h_n/C_t	ARTICULO 4.5.4
6	$C =$	2.50	$T < T_p$	ARTICULO 2.5
7	$U =$	1.3	B	TABLA N° 5 - E030
8	$R_o =$	8	Porticos	TABLA N° 7 - E030
9	$I_a =$	1	Regular	TABLA N° 8 - E030
10	$I_p =$	1	Regular	TABLA N° 9 - E030
11	$R =$	8.00	$R = R_o I_a I_p$	ARTICULO 3.8
12	% C. Viva	25%	Edificaciones C	ARTICULO 4.3
13	$P =$	369.04	$\sum P_i$	
	$k =$	1.00	$T < 0.5$	ARTICULO 28.3.2
	C_t	35	Pórticos de concreto armado sin muros de	ARTICULO 4.5.4
14	V	70.84	Toneladas	ARTICULO 4.5.2

Periodo Fundamental de Vibración

$$T = \frac{h_n}{C_t} = \frac{8.70}{35} = 0.25$$

ARTICULO 4.5.2

$$C/R = 0.3125 > 0.125$$

CORRECTO $C/R > 0.125$

El edificio cumple con la tabla 10

Fuerza Cortante Vasal:

$$V = \frac{Z \cdot U \cdot C \cdot S}{R} \cdot P$$

Fuerza Sísmica:

$$F_i = \alpha_i \cdot V$$

Leyenda:

$Z = 0.45$	Factor de Zona Sísmica
$U = 1.3$	Factor de Uso o Impotancia
$C = 2.5$	Factor de amplificación sísmica
$S = 1.05$	Factor de tipo de suelo
$R = 8.0$	Coeficiente de reducción sísmica
$P =$	Carga de gravedad + % Carga viva
$V =$	Cortante Basal o en la base

Aceleración:

$$\alpha_i = \frac{P_i(h_i)^k}{\sum_{j=1}^n P_j(h_j)^k}$$

a) Para T menor o igual a 0,5 segundos: $k = 1.0$.
b) Para T mayor que 0,5 segundos: $k = (0.75 + 0$

d) **El Cortante Basal en ton y las fuerzas repartidas por niveles**

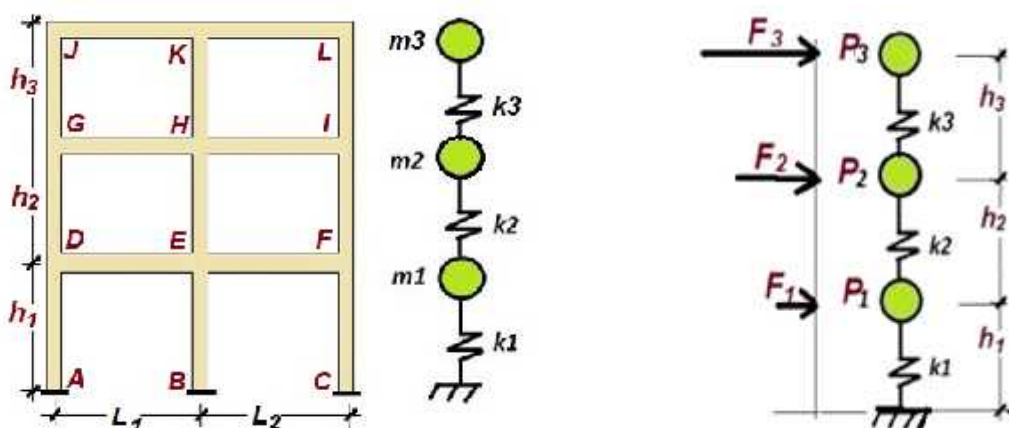
El **Cortante Basal** (V) es la fuerza lateral total de diseño que actúa en la base de la estructura como resultado de la acción sísmica. Es el punto de partida para entender cómo se distribuyen las fuerzas inerciales en cada nivel del edificio de 3 niveles.

Una vez que encontrado el cortante basal (V), se distribuye verticalmente en cada nivel (Fi). Esto es fundamental para esta tesis, ya que estas fuerzas generan los desplazamientos horizontales y las derivas que se analiza.

PISO	CM	CV	Pi	hi	Hi	Pi Hi ^k	α_i	F _i	
3	104.530	15.795	108.478	2.80	8.70	943.76	0.44889	31.80	Ton
2	123.412	26.325	129.993	2.90	5.90	766.96	0.36480	25.84	Ton
1	123.988	26.325	130.569	3.00	3.00	391.71	0.18631	13.20	Ton
$\Sigma =$			369.04	8.70		2102.43	1.00	70.84	Ton

$$\alpha_i = \frac{P_i (H_i)^k}{\sum_{j=1}^n P_j (H_j)^k} \quad F_i = \alpha_i V$$

FUERZA CORTANTE BASAL	
$V = \frac{ZUCS}{R} \cdot P = \frac{0.45 \times 1.3 \times 2.5 \times 1.05}{8.00} \times P = 0.192 \times P = 0.19195313 \times 369.04005 = 70.84$	Ton

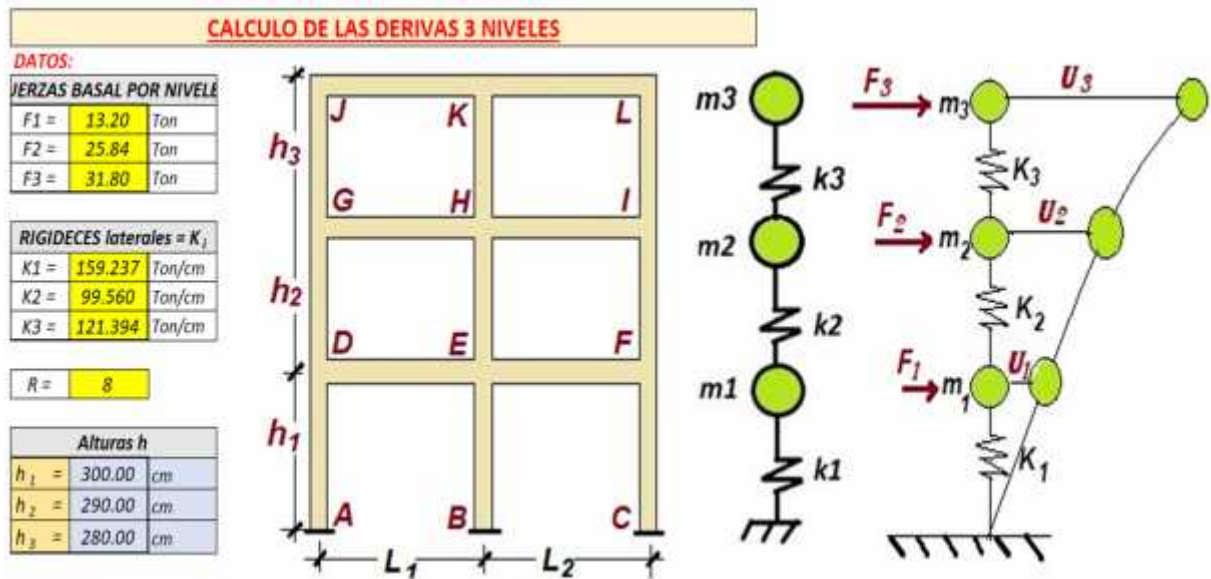


e) **Rigideces laterales por el método de Wilbur en el eje x**

RIGIDECES LATERALES POR EL METODO DE WILBUR DE TRES NIVELES eje x

$f'c = 280 \text{ Kg/cm}^2$			$E = 15100 \sqrt{f'c} \text{ ton/cm}^2$		
$I = \text{Momento de inercia}$			$E = 252.671 \text{ ton/cm}^2$		
			$E = \text{Modulo de elasticidad del concreto}$		
NIVEL 1					
Col	b(cm)	t(cm)	$h_1 \text{ (m)}$	$I_1 = tb^3/12$	$K = I_1/h_1$
AD	40.00	50.00	3.00	266666.67	888.89
BE	40.00	50.00	3.00	266666.67	888.89
CF	40.00	50.00	3.00	266666.67	888.89
				$\Sigma kc_1 =$	2666.67
				cm^3	
Eje x					
Vigas	b(cm)	h(cm)	$L_1 \text{ (m)}$	$I_1 = bh^3/12$	$K = I_1/L_1$
DE	30	40	3.80	160000	421.053
EF	30	40	4.00	160000	400.000
				$\Sigma kv_1 =$	821.053
				cm^3	
METODO DE WILBUR					
para el 1er nivel					
Columnas empotradas					
$K_1 = \frac{48E}{h_1 \left[\frac{4h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{v1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} \right]}$					
K1 = 39.809 ton/cm					
4K1 = 159.237 ton/cm					
NIVEL 2					
Col	b(cm)	t(cm)	$h_2 \text{ (m)}$	$I_1 = tb^3/12$	$K = I_1/h_1$
DG	40.00	50.00	2.90	266666.67	919.540
EH	40.00	50.00	2.90	266666.67	919.540
FI	40.00	50.00	2.90	266666.67	919.540
				$\Sigma kc_2 =$	2758.621
				cm^3	
Eje x					
Vigas	b(cm)	h(cm)	$L_1 \text{ (m)}$	$I_1 = bh^3/12$	$K = I_1/L_1$
GH	30	40	3.80	160000	421.053
HI	30	40	4.00	160000	400.000
				$\Sigma kv_2 =$	821.053
				cm^3	
para el 2do nivel					
Columnas empotradas					
$K_2 = \frac{48E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{v1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{v2}} \right]}$					
K2 = 24.890 ton/cm					
4K2 = 99.560 ton/cm					
NIVEL 3					
Col	b(cm)	t(cm)	$h_3 \text{ (m)}$	$I_1 = tb^3/12$	$K = I_1/h_1$
GJ	40.00	50.00	2.80	266666.67	952.381
HK	40.00	50.00	2.80	266666.67	952.381
IL	40.00	50.00	2.80	266666.67	952.381
				$\Sigma kc_3 =$	2857.143
				cm^3	
Eje x					
Vigas	b(cm)	h(cm)	$L_1 \text{ (m)}$	$I_1 = bh^3/12$	$K = I_1/L_1$
JK	30	40	3.80	160000	421.053
KL	30	40	4.00	160000	400.000
				$\Sigma kv_3 =$	821.053
				cm^3	
Para el 3er nivel segun Wilbur					
$K_3 = \frac{48E}{h_3 \left[\frac{4h_3}{\Sigma K_{c3}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{v2}} + \frac{h_3 + h_4}{\Sigma K_{v3}} \right]}$					
K3 = 30.348 ton/cm					
4K3 = 121.394 ton/cm					

- f) Los desplazamientos laterales y los desplazamientos relativos (Derivas inelásticas)



SOLUCION

Matriz de Fuerzas

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.20 \\ 25.84 \\ 31.80 \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigideces

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & k_2+k_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 258.797 & -99.56 & 0 \\ -99.560 & 220.954 & -121.394 \\ 0 & -121.39 & 121.394 \end{bmatrix}$$

Ecuacion matricial de valor caracteristico o eigenvalor

$$U = K^{-1} \times F = U$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.0063 & 0.0063 & 0.0063 \\ 0.0063 & 0.0163 & 0.0163 \\ 0.0063 & 0.0163 & 0.0246 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 13.20 \\ 25.84 \\ 31.80 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.445 \\ 1.024 \\ 1.286 \end{Bmatrix}$$

DESPLAZAMIENTOS LATERALES

$$U = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.445 \\ 1.024 \\ 1.286 \end{Bmatrix}$$

DERIVAS INELASTICAS (Desplazamientos relativos)

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = 0.75R \begin{Bmatrix} (U_1)/h_1 \\ (U_2-U_1)/h_2 \\ (U_3-U_2)/h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.009 \\ 0.012 \\ 0.006 \end{Bmatrix}$$

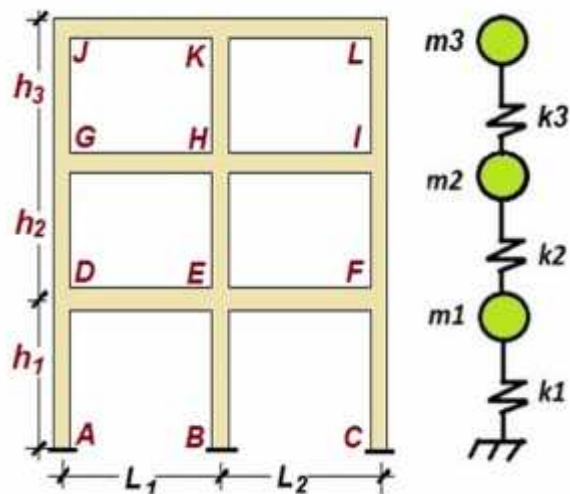
4.3: PARTE II: ANALISIS SISMICO DINAMICO

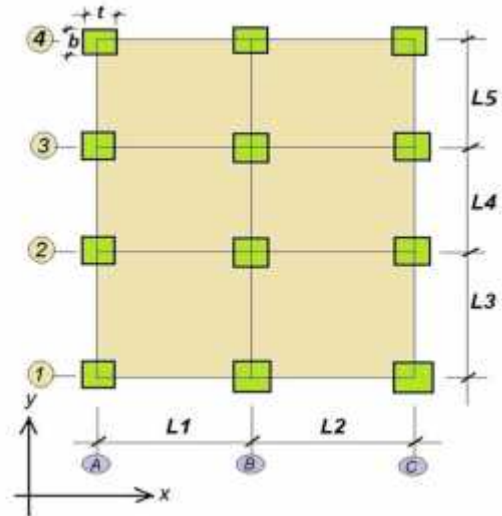
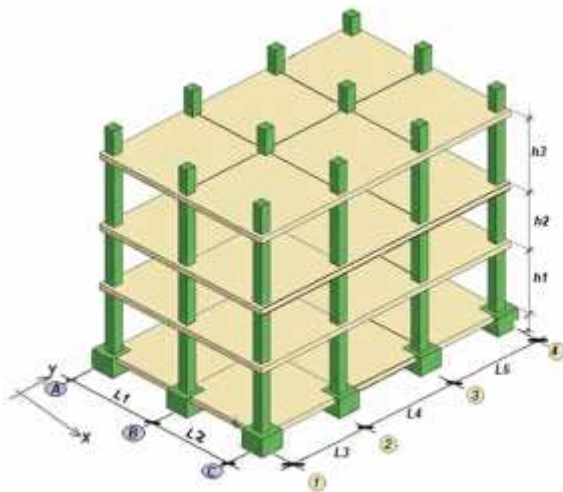
- g) Polinomio característico
- h) Las frecuencias angulares ω y los periodos de vibración T
- i) Los modos de vibración con su respectiva comprobación y verificación de sus respectivas condiciones de ortogonalidad con respecto a la masa.
- j) Normalización respecto a la matriz masa
- k) Condiciones de ortogonalidad respecto a la matriz de masa
- l) Cálculo de las pseudo-aceleraciones y pseudo-desplazamientos
- m) Cálculo de las participaciones modales
- n) Desplazamientos elásticos máximos de entrepisos
- o) Derivas inelásticas máximas

DATOS:

PESOS = P_i (Ton)		Alturas (cm)	
$P1 =$	130.569	$h1 =$	300.00
$P2 =$	129.993	$h2 =$	290.00
$P3 =$	108.478	$h3 =$	280.00

RIGIDECES laterales = K_i		
$K1 =$	159.24	Ton/cm
$K2 =$	99.56	Ton/cm
$K3 =$	121.39	Ton/cm
$g =$	981	cm/seg ²





g) Cálculo del Polinomio característico

SOLUCION

MASAS = P_i/g		
$m_1 =$	0.1331	ton-seg ² /cm
$m_2 =$	0.1325	ton-seg ² /cm
$m_3 =$	0.1106	ton-seg ² /cm

RIGIDECES laterales = K_i		
$K1 =$	159.24	Ton/cm
$K2 =$	99.56	Ton/cm
$K3 =$	121.39	Ton/cm
$g =$	981	cm/seg ²

Matriz de masas

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigideces

$$K = \begin{bmatrix} k1+k2 & -K2 & 0 \\ -K2 & k2+k3 & -K3 \\ 0 & -K3 & k3 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 258.8 & -99.560 & 0 \\ -99.6 & 220.954 & -121.394 \\ 0 & -121.394 & 121.394 \end{bmatrix}$$

Ecuación matricial de valor característico o eigenvalor

Para el cálculo del polinomio característico, debemos resolver la ecuación diferencial, lineal y homogénea de segundo orden del movimiento dinámico. Para ello tomaremos el modelo de vibraciones libres no amortiguadas y es:

$$mx'' + kx = 0$$

resolviendo la ecuación diferencial (ya demostrado):

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t$$

O también:

$$x = a \cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$x' = -a\omega_n \sin(\omega_n t + \varphi)$$

Reemplazando en la ecuación y dando forma queda:

$$[K] \cdot \{\phi\} = \omega_n^2 \cdot [m] \cdot \{\phi\}$$

Esta ecuación algebraica se denomina: problema matricial de valor característico o eigenvalor, donde las matrices K y m son conocidas por lo que el problema se reduce a calcular la frecuencia natural W y los valores de los modos de vibración ϕ

Para dar solución formal a la ecuación matricial se escribe como:

$$\{[K] - \omega_n^2 \cdot [m]\} \cdot \{\phi\} = 0$$

Que resulta un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para n niveles (para el ejemplo n =3), siendo ϕ **los modos de vibración**

Siendo:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

La cual se interpreta como un conjunto de N ecuaciones algebraicas homogéneas para los N elementos, donde. $\{\phi\}=0$ no es solución porque implica que no habría movimiento, pero si se tienen soluciones triviales si se cumple que:

$$\text{Det} \{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} = 0$$

Resolviendo :

$$\text{Det } \{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & k_2+k_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & k_3 \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 258.80 & -99.56 & 0 \\ -99.56 & 220.954 & -121.39 \\ 0 & -121.39 & 121.39 \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix} = 0$$

Aplicando el determinante de la matriz indicada

$$\text{Det } \{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} = 0 \quad \omega_n^2 = \lambda$$

$$\begin{vmatrix} 258.797 - 0.1331 \lambda & -99.560 & 0 \\ -99.560 & (220.954 - 0.1325 \lambda) & -121.394 \\ 0 & -121.394 & (121.394 - 0.11058 \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de menores complementarios:

$$(258.797 - 0.1331 \lambda) \begin{vmatrix} (220.954 - 0.1325 \lambda) & -121.394 \\ -121.394 & (121.394 - 0.11058 \lambda) \end{vmatrix} - (-99.56) \begin{vmatrix} -99.560 & -121.394 \\ 0 & (121.394 - 0.11058 \lambda) \end{vmatrix}$$

$$(258.797 - 0.1331 \lambda) \{ (220.954 - 0.1325 \lambda) (121.394 - 0.11058 \lambda) - 14736.5 \} - (-99.56) \{ -99.559637332183 (121.394 - 0.11058 \lambda) \}$$

Polinomio Característico para 3 niveles:

Forma:

$$A X^3 + B X^2 + C X + D = 0$$

Donde:

$$A = m_1 m_2 m_3 = 0.0020$$

$$B = -[(K_1 + K_2) m_2 m_3 + (K_2 + K_3) m_1 m_3 + K_3 m_1 m_2] = -9.185$$

$$C = [(K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3) m_3 + (K_1 K_3 + K_2 K_3) m_2 + K_2 K_3 m_1] = 10998.696$$

$$D = -K_1 K_2 K_3 = -1924531.25$$

Ecuación característica:

$$0.0020 X^3 + -9.1851 X^2 + 10998.6958 X + -1924531.25 = 0$$

h) Las frecuencias angulares ω y los periodos de vibración T

Resolviendo la ecuación del polinomio característico, resulta x_1 , x_2 y x_3 (λ_1 , λ_2 , λ_3)

$X = \lambda$	$\omega^2_{\lambda} = \lambda$		$\omega_n = \sqrt{\lambda}$		$T = 2\pi/\omega$	
			Frecuencias angulares		Periodos de vibración	
$\lambda_1 =$	210.24425	→	$\omega_1 =$	14.500 Rad/seg	→	$T_1 =$ 0.433 seg
$\lambda_2 =$	1643.4251	→	$\omega_2 =$	40.539 Rad/seg	→	$T_2 =$ 0.155 seg
$\lambda_3 =$	2855.9844	→	$\omega_3 =$	53.441 Rad/seg	→	$T_3 =$ 0.118 seg

Tabla 16: Resultados de frecuencias y periodos de vibración

- i) **Los modos de vibración** con su respectiva comprobación y verificación de sus respectivas condiciones de ortogonalidad con respecto a la masa.

Calculo de los modos de vibracion

1er modo de vibracion:

$\omega_1 = 14.4998$
 $\omega_3^2 = 210.244$

$$([K] - \omega_1^2 \cdot [m]) \cdot \{\phi_i\} = 0$$

230.81	-99.55964	0	$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
-99.5596	193.09	-121.394		
0	-121.394	98.15		

Planteando el sistema de ecuaciones solo con las 2 primeras filas resulta:

230.81 ϕ_1	-99.56 ϕ_2	0 ϕ_3	= 0	(7)
-99.56 ϕ_1	193.09 ϕ_2	-121.394 ϕ_3	= 0	(8)

Comprobando:

0 ϕ_1	-121.39 ϕ_2	98.15 ϕ_3	= 0	(9) = 0...ok
------------	------------------	----------------	-----	-------------------

Resolviendo hacemos:

ϕ_1	=	1
ϕ_2	=	2.3183
ϕ_3	=	2.8675

Se hace $\phi_1 = 1$ en la ec 1 y sale:

Se reemplazan en la ec 2 y salen:

2do modo de vibración:

$$\{[K] - \omega_2^2 \cdot [m]\} \cdot \{\phi_i\} = 0$$

$\omega_2 = 40.5392$ $\omega_2^2 = 1643.425$	$\begin{pmatrix} 40.06 & -100 & 0 \\ -99.56 & 3.18 & -121 \\ 0 & -121 & -60.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
---	--

40.06 ϕ_1	-99.56 ϕ_2	0 ϕ_3	= 0	(4)
----------------	-----------------	------------	-----	----------

-99.56 ϕ_1	3.18 ϕ_2	-121.39 ϕ_3	= 0	(5)
-----------------	---------------	------------------	-----	----------

Comprobando:

0 ϕ_1	-121.39 ϕ_2	-60.33 ϕ_3	= 0	(6) = 0...ok
------------	------------------	-----------------	-----	-------------------

hacemos:

$\phi_1 =$	1
$\phi_2 =$	0.4024
$\phi_3 =$	-0.8096

3er modo de vibración:

$$\{[K] - \omega_3^2 \cdot [m]\} \cdot \{\phi_i\} = 0$$

$\omega_3 = 53.4414$ $\omega_3^2 = 2855.984$	$\begin{pmatrix} -121.33 & -99.55964 & 0 \\ -99.5596 & -157.49 & -121.394 \\ 0 & -121.394 & -194.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
---	--

Planteando el sistema de ecuaciones solo con las 2 primeras filas resulta:

-121.33 ϕ_1	-99.56 ϕ_2	0 ϕ_3	= 0	(1)
------------------	-----------------	------------	-----	----------

-99.56 ϕ_1	-157.49 ϕ_2	-121.394 ϕ_3	= 0	(2)
-----------------	------------------	-------------------	-----	----------

Comprobando con la tercera fila:

0 ϕ_1	-121.39 ϕ_2	-194.42 ϕ_3	= 0	(3) = 0...ok
------------	------------------	------------------	-----	-------------------

Resolviendo

hacemos:

$\phi_1 =$	1
$\phi_2 =$	-1.2186
$\phi_3 =$	0.7609

Se hace $\phi_1 = 1$ en la ec 1 y sale:

Se reemplazan en la ec 2 y salen:

Matriz de desplazamiento:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.3183 & 0.4024 & -1.2186 \\ 2.8675 & -0.8096 & 0.7609 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix}$$

Tres modos de vibración

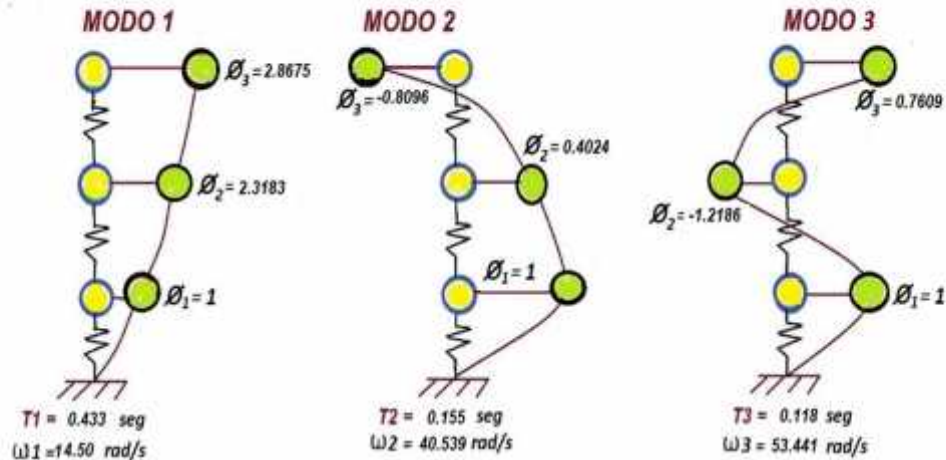


Fig. 30: Resultados de los 3 modos de vibración

j) Normalización respecto a la matriz masa

Normalización con respecto a la matriz de masas

$$X = \begin{pmatrix} X1 & X2 & X3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2.3183 & 0.4024 & -1.2186 \\ 2.8675 & -0.8096 & 0.7609 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1/2.86752 & X2/-0.80959 & X3/0.76092 \\ 0.3487 & -1.2352 & 1.3142 \\ 0.8085 & -0.4970 & -1.6016 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

La normalización de los modos de vibración (específicamente la normalización respecto a la matriz de masa) es un paso clave para simplificar las ecuaciones del movimiento y facilitar el análisis dinámico, como el que exige la norma **E.030** en Perú. Antes de normalizar, debemos recordar que los autovectores o formas modales (X_i) cumplen con propiedades de ortogonalidad respecto a las matrices de masa (M) y rigidez (K). Cuando multiplicamos un modo por la matriz de masa, obtenemos la **masa generalizada** (M_i^*) del modo i :

$$M_i^* = X_i^T M_i X_i$$

M = matriz masa

X_i = matriz desplazamiento

Procedimiento de Normalización (Paso a Paso)

Para normalizar respecto a la masa (lo que se conoce como modos masa normalizados), el objetivo es que la masa generalizada sea igual a la unidad (1).

Paso A: Calcular los modos naturales

Primero se resolvió el problema de autovalores para tus tres niveles:

$$\text{Det} \{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} = 0$$

Esto nos dio las frecuencias naturales (ω_i) y los vectores modales arbitrarios (φ_i).

Paso B: Calcular la masa generalizada

Para cada modo i (del 1 al 3), se realiza el producto matricial: $M_i^* = X_i^T M_i X_i$

Donde M es la matriz de masa diagonal de 3x3:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Paso C: Calcular el factor de escala

El vector normalizado φ_i (el que se usara en los cálculos según la norma E030) se obtiene dividiendo el vector original por la raíz cuadrada de su masa generalizada;

$$\varphi_i = \frac{X_i}{\sqrt{X_i^T M X_i}} =$$

Resumen del resultado final

Una vez normalizados, tus modos deben cumplir que:

1. $\Phi^T M \Phi = I$ (Matriz Identidad)
2. $\Phi^T K \Phi = \Omega^2$ (Matriz de frecuencias al cuadrado)

Aplicando a nuestro caso:

a) Normalización del 1er modo de vibración

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3487 \\ 0.8085 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \\
 X_1^T M X_1 &= \begin{pmatrix} 0.3487 & 0.8085 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3487 \\ 0.8085 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.2134 \\
 \Phi_1 &= \begin{pmatrix} \varphi_{11} = \frac{X_{11}}{\sqrt{X_1^T M X_1}} = \frac{0.3487}{\sqrt{0.2134}} = 0.75495 \\ \varphi_{21} = \frac{X_{21}}{\sqrt{X_1^T M X_1}} = \frac{0.8085}{\sqrt{0.2134}} = 1.75023 \\ \varphi_{31} = \frac{X_{31}}{\sqrt{X_1^T M X_1}} = \frac{1}{\sqrt{0.2134}} = 2.16482 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7549 \\ 1.7502 \\ 2.1648 \end{pmatrix} \\
 \text{Comprobación} \\
 \Phi_1^T M \Phi_1 &= \begin{pmatrix} 0.7549 & 1.7502 & 2.1648 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.133098 & 0 & 0 \\ 0 & 0.133 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7549 \\ 1.7502 \\ 2.1648 \end{pmatrix} = 1.00
 \end{aligned}$$

OK !!!!

Se cumple:

$$\Phi^T M \Phi = I \text{ (Matriz Identidad)}$$

b) Normalización del 2do modo de vibración

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2352 \\ -0.4970 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix}$$

$$X_2^T M X_2 = \begin{pmatrix} -1.2352 & -0.4970 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.2352 \\ -0.4970 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.3464$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_2^T M X_2}} = \frac{-1.2352}{\sqrt{0.3464}} = -2.09874 \\ \varphi_{22} = \frac{X_{22}}{\sqrt{X_2^T M X_2}} = \frac{-0.4970}{\sqrt{0.3464}} = -0.84449 \\ \varphi_{32} = \frac{X_{32}}{\sqrt{X_2^T M X_2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3464}} = 1.69911 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0987 \\ -0.8445 \\ 1.6991 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$\Phi_2^T M \Phi_2 = \begin{pmatrix} -2.0987 & -0.8445 & 1.6991 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.133098 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.0987 \\ -0.8445 \\ 1.6991 \end{pmatrix} = 1.00$$

OK !!!!

c) Normalización del 3er modo de vibración

$$X_3 = \begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3142 \\ -1.6016 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix}$$

$$X_3^T M X_3 = \begin{pmatrix} 1.3142 & -1.6016 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.3142 \\ -1.6016 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.6803$$

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_{13} = \frac{X_{13}}{\sqrt{X_3^T M X_3}} = \frac{1.3142}{\sqrt{0.6803}} = 1.59331 \\ \varphi_{23} = \frac{X_{23}}{\sqrt{X_3^T M X_3}} = \frac{-1.6016}{\sqrt{0.6803}} = -1.94168 \\ \varphi_{33} = \frac{X_{33}}{\sqrt{X_3^T M X_3}} = \frac{1}{\sqrt{0.6803}} = 1.21237 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$\Phi_3^T M \Phi_3 = \begin{pmatrix} 1.5933 & -1.9417 & 1.2124 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.133098 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{pmatrix} = 1.00$$

OK !!!!

Matriz de desplazamientos con valores normalizados:

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.755 & -2.099 & 1.593 \\ 1.750 & -0.844 & -1.942 \\ 2.165 & 1.699 & 1.212 \end{pmatrix}$$

Modo 1 Modo 2 Modo 3
 φ_{i1} φ_{i2} φ_{i3}
 Nivel 1
 Nivel 2
 Nivel 3

k) Condiciones de ortogonalidad respecto a la matriz de masa

Las condiciones de ortogonalidad son las reglas "de oro" del análisis dinámico. En el contexto de la norma **E.030**, estas propiedades permiten que un edificio complejo de tres niveles se pueda analizar como si fueran tres osciladores de un solo grado de libertad independientes.

Las condiciones técnicas fundamentales de ortogonalidad son:

1. Ortogonalidad respecto a la Matriz de Masa (M)

Esta condición establece que si multiplicas dos modos de vibración distintos (i y j) por la matriz de masa, el resultado es cero. Esto significa que los modos son cinemáticamente independientes entre sí.

Para un sistema de 3 niveles, si $i \neq j$:

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0 \quad \text{..... para } j \neq i$$

Si $i = j$ (el mismo modo), el resultado es la masa generalizada (M_i^*):

$$\varphi_i^T M \varphi_i = M_i^* = 1 \quad \text{..... para } i=j$$

Dato clave: Al normalizarse respecto de la masa (como ya vimos), entonces se cumple que: $M_i^ = 1$*

Condicion de Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas

$$X_i^T M X_j = 0 \text{ para } j \neq i$$

a) Columna 1 y 2 :

$$\Phi_{i1}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.7549 & 1.7502 & 2.1648 \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_{i2} = \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0987 \\ -0.8445 \\ 1.6991 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{i1}^T M \Phi_{i2} = \begin{bmatrix} 0.7549 & 1.7502 & 2.1648 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.0987 \\ -0.8445 \\ 1.6991 \end{bmatrix} = 0$$

$$= 0.00$$

$$\approx 0 \text{ OK !!}$$

b) Columna 1 y 3 :

$$\Phi_{i1}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.7549 & 1.7502 & 2.1648 \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_{i3} = \begin{bmatrix} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{i1}^T M \Phi_{i3} = \begin{bmatrix} 0.7549 & 1.7502 & 2.1648 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{bmatrix} = 0$$

$$= 0.00$$

$$\approx 0 \text{ OK !!}$$

c) Columna 2 y 3 :

$$\Phi_{i2}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2.0987 & -0.8445 & 1.6991 \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_{i3} = \begin{bmatrix} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{i2}^T M \Phi_{i3} = \begin{bmatrix} -2.0987 & -0.8445 & 1.6991 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1331 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5933 \\ -1.9417 \\ 1.2124 \end{bmatrix} = 0$$

$$= 0.00$$

$$\approx 0 \text{ OK !!}$$

Quedó comprobada las condiciones de ortogonalidad respecto de la matriz de masas

I) Cálculo de las pseudo-aceleraciones y pseudo-desplazamientos

Calculo de las pseudoaceleraciones y pseudodesplazamientos

Parametros sismicos	
Z =	0.45
U =	1.30
S =	1.05
Tp =	0.60
TL =	2.00
R =	8.00
gravedad g=	981.00 cm/s ²

29.2. Aceleración Espectral

29.2.1. Para cada una de las direcciones horizontales analizadas se utiliza un espectro inelástico de pseudo-aceleraciones definido por:

$$S_a = \frac{Z \cdot U \cdot C \cdot S}{R} \cdot g$$

T en seg						S _d = S _a / ω ²	
Periodos de vibracion	Frecuencia angular	Factor amplificacion	Pseud-acel (cm/seg ²)	Pseud-desp (cm)			
T1 = 0.433	ω ₁ (trd/s) = 14.500	C1 = 2.50	Sa ₁ = 188.31	S _{d1} = 0.896			
T2 = 0.155	ω ₂ = 40.539	C2 = 2.50	Sa ₂ = 188.31	S _{d2} = 0.115			
T3 = 0.118	ω ₃ = 53.441	C3 = 2.50	Sa ₃ = 188.31	S _{d3} = 0.066			

m) Cálculo de las participaciones modales

Calculo de las participaciones modales

Matriz de modos generalizada normalizada de 3x3 :

$$\Phi_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \text{Modo 1} & \text{Modo 2} & \text{Modo 3} \\ 0.755 & -2.099 & 1.593 \\ 1.750 & -0.844 & -1.942 \\ 2.165 & 1.699 & 1.212 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

$$\Gamma = \Phi_{3 \times 3}^T \tilde{M} B_{3 \times 1}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.755 & 1.750 & 2.165 \\ -2.099 & -0.844 & 1.699 \\ 1.593 & -1.942 & 1.212 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.1331 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.1325 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5718 \\ -0.203 \\ 0.0888 \end{pmatrix}$$

Γ		Γ ²	% Part Modo	
			%Modo 1	
0.5717892	→	Γ1 = 0.57	0.3269	86.91
-0.203355	→	Γ2 = 0.20	0.0414	10.99
0.0888	→	Γ3 = 0.09	0.0079	2.10
		suma = ΣΓ ² =	0.3762	

n) Desplazamientos elásticos máximos de entrespos

Desplazamientos elasticos maximos de entrespos						
		$S_d = S_u / \omega^2$	φ_1 Modo 1	φ_2 Modo 2	φ_3 Modo 3	
$\Gamma_1 =$	0.5718	$S_{d1} =$	0.8957	$\Phi_{3 \times 3} =$	$\begin{pmatrix} 0.755 & -2.099 & 1.593 \\ 1.750 & -0.844 & -1.942 \\ 2.165 & 1.699 & 1.212 \end{pmatrix}$	nivel 1
$\Gamma_2 =$	0.2034	$S_{d2} =$	0.1146			nivel 2
$\Gamma_3 =$	0.0888	$S_{d3} =$	0.0659			nivel 3

Desplazamientos para el modo 1:

$$u_1 = \Gamma_1 S_{d1} (\varphi_1) = 0.5718 \times 0.8957 \times \begin{pmatrix} 0.755 \\ 1.750 \\ 2.165 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0.387 \\ 0.896 \\ 1.109 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Desplazamientos para el modo 2:

$$u_2 = \Gamma_2 S_{d2} (\varphi_2) = 0.2034 \times 0.1146 \times \begin{pmatrix} -2.099 \\ -0.844 \\ 1.699 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -0.049 \\ -0.020 \\ 0.040 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Desplazamientos para el modo 3:

$$u_3 = \Gamma_3 S_{d3} (\varphi_3) = 0.0888 \times 0.0659 \times \begin{pmatrix} 1.593 \\ -1.942 \\ 1.212 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0.009 \\ -0.011 \\ 0.007 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Combinacion cuadratica

$$u_{\max} = \begin{pmatrix} \sqrt{[(0.3866)^2 + (-0.0489)^2 + (0.0093)^2]} \\ \sqrt{[(0.8963)^2 + (-0.0197)^2 + (-0.0114)^2]} \\ \sqrt{[(1.1087)^2 + (0.0396)^2 + (0.0071)^2]} \end{pmatrix} \Rightarrow u_{\max} = \begin{pmatrix} 0.390 \\ 0.897 \\ 1.109 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

o) Derivas inelásticas máximas

Derivas inelásticas maximas

Desplazamientos inelásticos(cm)

Resumen de datos

$R =$	8
-------	---

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0.3866 & -0.0489 & 0.0093 \\ 0.8963 & -0.0197 & -0.011 \\ 1.1087 & 0.0396 & 0.0071 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Alturas (cm)	
$h_1 =$	300
$h_2 =$	290
$h_3 =$	280

Derivas para el modo 1 :

$$\Delta_1 = 0.75R(u_i^1 - u_{i-1}^1)/h_i$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \times 8 (0.3866) / 300 \\ 0.75 \times 8 (0.8963 - 0.3866) / 290 \\ 0.75 \times 8 (1.1087 - 0.8963) / 280 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.011 \\ 0.005 \end{pmatrix}$$

	Redondeo 4 dec
nivel 1	0.0077
nivel 2	0.0105
nivel 3	0.0046

Derivas para el modo 2 :

$$\Delta_2 = 0.75R(u_i^2 - u_{i-1}^2)/h_i$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \times 8 (-0.0489) / 300 \\ 0.75 \times 8 (-0.0197 - -0.0489) / 290 \\ 0.75 \times 8 (0.0396 - -0.0197) / 280 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

nivel 1	0.0010
nivel 2	0.0006
nivel 3	0.0012

Derivas para el modo 3 :

$$\Delta_3 = 0.75R(u_i^3 - u_{i-1}^3)/h_i$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \times 8 (0.0093) / 300 \\ 0.75 \times 8 (-0.0114 - 0.0093) / 290 \\ 0.75 \times 8 (0.0071 - -0.0114) / 280 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0002 \\ 0.0004 \\ 0.0004 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \text{nível 1} & 0.00019 \\ \text{nível 2} & 0.0004 \\ \text{nível 3} & 0.0004 \end{array}$$

Combinación cuadrática

$$u_{\max} = \begin{bmatrix} \sqrt{[(0.0077)^2 + (0.001)^2 + (0.00019)^2]} \\ \sqrt{[(0.0105)^2 + (0.0006)^2 + (0.0004)^2]} \\ \sqrt{[(0.0046)^2 + (0.0012)^2 + (0.0004)^2]} \end{bmatrix} \rightarrow u_{\max} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.011 \\ 0.005 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

4.4 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En base a la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento dinámico,

$$mx'' + kx = 0$$

las magnitudes físicas que se utilizan para calcular las vibraciones libres no amortiguadas son:

Posición $x(t)$: $x(t) = \frac{v_0}{w_n} \sin w_n t + x_0 \cos w_n t \rightarrow x(t) = a \quad (w_n t + \varphi)$

Velocidad $V(t)$: $x'(t) = a w_n \cos (w_n t + \varphi)$, con un desfase de 90° respecto de $x(t)$

Aceleración $a(t)$: $x''(t) = -a w_n^2 \sin (w_n t + \varphi)$, con desfase de 180° respecto de $x(t)$

La influencia de las ecuaciones diferenciales en la estructura se manifiesta mediante la solución del sistema homogéneo de segundo orden para vibración libre no amortiguada:

$$mx'' + kx = 0$$

Al proponer una solución de la forma:

$$x = a \quad (w_n t + \varphi),$$

El problema se transforma en una ecuación algebraica de autovalores, cuya solución define la dinámica del edificio:

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\}$$

4.4.1 Del análisis sísmico estático efectuado en la dirección del eje x, según la norma E030 2019, los parámetros sísmicos encontrados para el edificio del ejemplo tomado en San Juan de Miraflores Lima Perú fueron:

Z = 0.45	Factor de Zona Sísmica: Zona 4
U = 1.3	Factor de Uso o importancia: B
C = 2.5	Factor de amplificación sísmica: $T < T_p$, $0.25 < 0.60$
S = 1.05	Factor de tipo de suelo: S2 suelo intermedio
R = 8.0	Coeficiente de reducción sísmica: Pórticos de concreto armado

Luego del metrado de cargas, los pesos por cada nivel resultaron

PISO	CM	CV	Pi
3	104.530	15.795	108.478
2	123.412	26.325	129.993
1	123.988	26.325	130.569
$\Sigma =$			369.04

La fuerza cortante V en toneladas (ton) en la base es:

$$V = 70.84 \text{ ton}$$

Estas Fuerzas repartidas F en toneladas (ton) por cada nivel es:

PISO	Fi
3	31.80 ton
2	25.84 ton
1	13.20 ton
$\Sigma =$	70.84 ton

Las rigideces calculadas según el método de Wilbur por cada nivel son:

RIGIDECES laterales = K_i		
K1 =	159.237	Ton/cm
K2 =	99.560	Ton/cm
K3 =	121.394	Ton/cm

Luego de aplicar la ecuación matricial de la ley de Hooke: $F = K U$, despejando el desplazamiento lateral $U = k^{-1} \times F$, Resulta:

DESPLAZAMIENTOS LATERALES

$$U = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.445 \\ 1.024 \\ 1.2.86 \end{Bmatrix}$$

DERIVAS INELASTICAS (Desplazamientos relativos)

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.009 \\ 0.012 \\ 0.006 \end{Bmatrix} \begin{matrix} > 0.007 & \text{NO CUMPLE} \\ > 0.007 & \text{NO CUMPLE} \\ < 0.007 & \text{SI CUMPLE} \end{matrix}$$

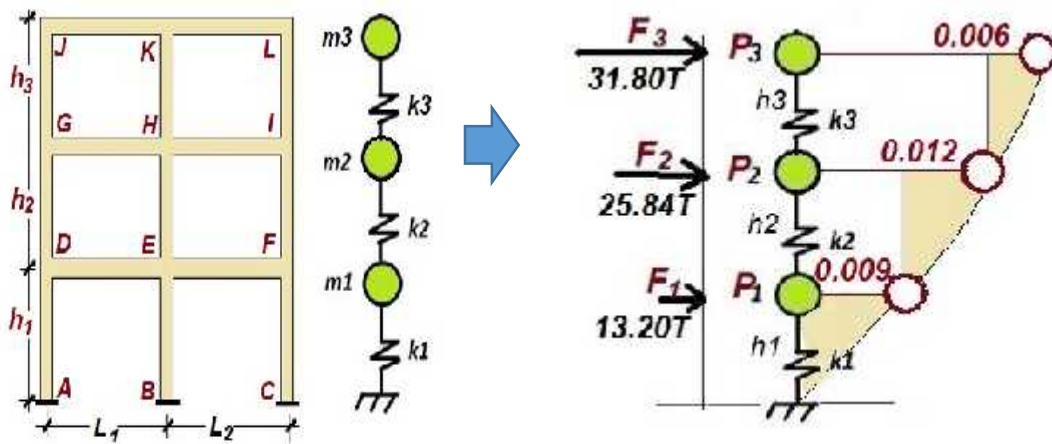


Fig. 31: Resultados de la distribución de fuerzas y desplazamientos relativos

Contraste Normativo y Validación Estructural

Los resultados obtenidos mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento muestran una discrepancia crítica entre el desempeño esperado y las exigencias de seguridad. Según la normativa vigente para estructuras de concreto armado (límite de deriva $\Delta_i / h_i < 0.007$):

Tabla N° 11 LÍMITES PARA LA DISTORSIÓN DEL ENTREPISO	
Material Predominante	(ζ_i / h_{ei})
Concreto Armado	0,007

Fuente: Norma Peruana E030 ingeniería sismorresistente

) **Análisis del Nivel 1 y 2:** Las derivas de **0.009** y **0.012** respectivamente, indican que la estructura entra en un rango de **daño inelástico severo** ante el sismo de diseño. Matemáticamente, esto implica que las fuerzas internas derivadas de la matriz de rigidez [K] generan momentos flectores que superan la capacidad de las secciones transversales diseñadas.

) **Predicción de Daño:** El valor de 0.012 en el segundo nivel representa un exceso del **71.4%** sobre el límite permisible. Esto sugiere que, aunque la estructura pueda mantenerse en pie (evitar el colapso total), los daños en elementos no estructurales (tabiquería, vidrios) y el daño estructural en nudos viga-columna serían irreparables.

4.4.2 Del análisis sísmico dinámico, conocidos los pesos por niveles y sus rigideces, se aplicó la ecuación matricial que representa la ecuación diferencial de segundo orden del movimiento dinámico:

$$\{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} \cdot \{ \phi \} = 0$$

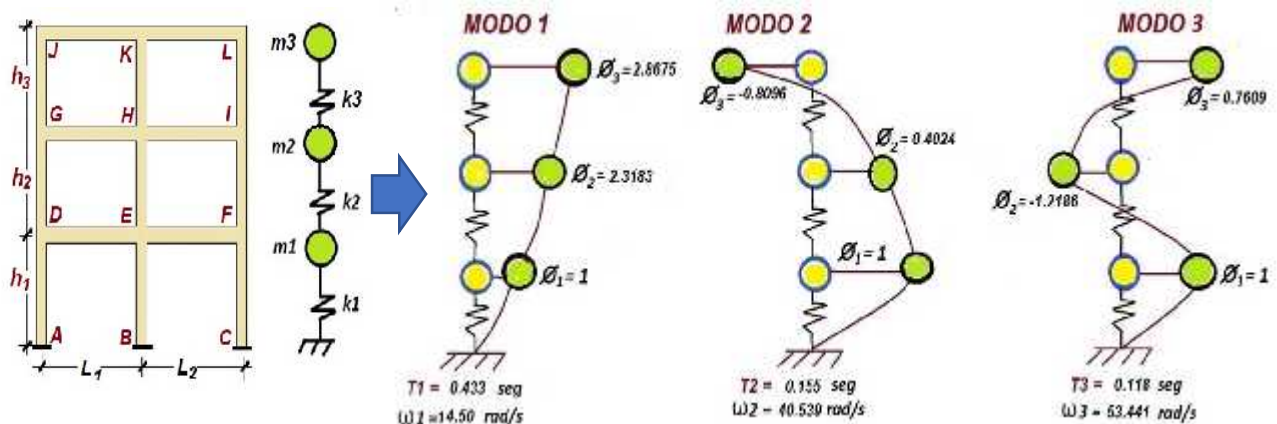
Y al resolver el polinomio característico (con sus raíces λ) que resulta del proceso de solución de la ecuación matricial, se calculó las frecuencias (ω) y sus respectivos periodos de vibración (T), las cuales resultaron:

$\chi = \lambda$	$\omega^2_{\phi} = \lambda$		$\omega_n = \sqrt{\lambda}$		$T = 2\pi/\omega$
			Frecuencias angulares		Periodos de vibración
$\lambda_1 =$	210.24425	→	$\omega_1 =$ 14.500 Rad/seg	→	$T_1 =$ 0.433 seg
$\lambda_2 =$	1643.4251	→	$\omega_2 =$ 40.539 Rad/seg	→	$T_2 =$ 0.155 seg
$\lambda_3 =$	2855.9844	→	$\omega_3 =$ 53.441 Rad/seg	→	$T_3 =$ 0.118 seg

De la resolución del polinomio característico $\text{Det} \{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} = 0$ se obtuvieron las frecuencias naturales calculadas en los tres modos siguientes:

Modos de vibración	Frecuencia angular (ω_n)	Periodo Natural (T_n)	Interpretación física
Modo 1	14.50 rad/s	0.433 s	Modo fundamental (traslacional)
Modo 2	40.53 rad/s	0.155 s	Primer modo superior (flexión)
Modo 3	53.44 rad/s	0.118 s	Modo de alta frecuencia (Rigidez)

Resultando los tres modos de vibración:



Evaluación de la Respuesta Dinámica (Modos de Vibración)

La influencia de las ecuaciones diferenciales se hace evidente al observar la configuración de los periodos. Un periodo fundamental de **T1 = 0.433 s** es típico para una estructura de tres niveles, lo que sitúa al edificio en la zona de mayores aceleraciones de la mayoría de los espectros de respuesta (plataforma del espectro).

$$S_a = Z \cdot U \cdot C \cdot S / R \cdot g$$

La resolución de la ED permite concluir que la estructura es "demasiado flexible". El hecho de que el Modo 1 concentre la mayor parte de la masa participativa agrava el problema de las derivas en los primeros niveles, confirmando que la solución matemática predice una **falla por flexibilidad lateral**.

Interpretación de periodos (T) y Frecuencias (ω)

Los valores temporales nos indican que tan "rígida" o "flexible" es la estructura:

-) **Modo 1 (Fundamental):** Tiene el periodo más largo ($T_1 = 0.433$ seg) y la frecuencia más baja ($\omega_1 = 14.50$ rad/s), este el modo que suele movilizar la mayor cantidad de masa y es el más crítico para el diseño sísmico, un periodo de 0.466 s es el típico de una estructura de concreto armado de baja altura (aprox. 3-4 niveles).
-) **Modo superiores (2 y 3):** A medida que pasamos al modo 2 ($T_2 = 0.155$ s) y Modo 3 ($T_3 = 0.118$ s), el periodo disminuye drásticamente. Esto es normal: los modos superiores vibran mucho más rápido y requieren más energía para ser excitados

Cada modo de vibración se normalizo con respecto a su masa y se comprobó su ortogonalidad, resultando la matriz de modos normalizada siguiente:

Matriz de modos generalizada normalizada de 3x3 :

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	
$\Phi_{3 \times 3} =$	0.755	-2.099	1.593	nivel 1
	1.750	-0.844	-1.942	nivel 2
	2.165	1.699	1.212	nivel 3

Al realizar la partición modal, resulto que el modo 1 tiene un 86.91 % de participación. El modo 2 con el 10.99% y el modo 3 con el 2.10% de participación.

Interpretación de la Participación Modal

El coeficiente de participación modal indica qué porcentaje de la masa total de la estructura se activa en cada modo de vibración cuando ocurre un evento sísmico.

-) **Modo 1 (86.91%): Dominante.** Este es el "Modo Fundamental". Al tener casi el 87% de participación, significa que la estructura se comporta de manera muy predecible. La mayor parte de la energía y las fuerzas sísmicas se concentran en este modo. Visualmente, el edificio se balanceará principalmente hacia adelante y hacia atrás como un todo (sin muchas ondulaciones intermedias).
-) **Modo 2 (10.99%): Secundario.** Tiene una influencia menor, pero no despreciable. Aporta un componente de "latigazo" o flexión adicional.
-) **Modo 3 (2.10%): Marginal.** Su efecto en el diseño global es mínimo, ya que moviliza muy poca masa.

¿Para qué sirve el Coeficiente de Participación?

Este valor (Γ) es la "llave" que conecta el movimiento del suelo con la respuesta de la estructura. Sirve para:

-) **Calcular las Fuerzas Sísmicas:** Determina cuánta fuerza cortante se genera en la base para cada modo.
-) **Optimizar el Cálculo:** Permite a los ingenieros decidir cuántos modos incluir en el análisis. Si un modo tiene 0.01%, se puede ignorar para ahorrar tiempo de cómputo.
-) **Identificar Debilidades:** Si el Modo 1 tuviera una participación baja (ej. 40%), indicaría que la estructura es compleja o tiene irregularidades severas que requieren un análisis dinámico mucho más riguroso.

Nota sobre la Matriz $\Phi_{3 \times 3}$: Se observa que en el **Modo 1**, todos los valores son positivos (0.755, 1.750, 2.165), lo que confirma que todos los niveles se mueven hacia el mismo lado (comportamiento típico del primer modo). En el **Modo 2**, hay un cambio de signo, lo que indica un "nodo" o punto de inflexión.

Y como consecuencia, los desplazamientos elásticos máximos de entrepisos resultaran lo siguiente:

Desplazamientos para el modo 1:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.387 \\ 0.896 \\ 1.109 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Desplazamientos para el modo 2:

$$u_2 = \begin{bmatrix} -0.049 \\ -0.020 \\ 0.040 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Desplazamientos para el modo 3:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0.009 \\ -0.011 \\ 0.007 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Total: Matriz de desplazamientos

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0.387 & -0.049 & 0.009 \\ 0.896 & -0.020 & -0.011 \\ 1.109 & 0.040 & 0.007 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nivel 1} \\ \text{nivel 2} \\ \text{nivel 3} \end{matrix}$$

Como consecuencia sus máximos desplazamientos vibratorios de sus estructuras del edificio o Derivas inelásticas utilizando el método dinámico resultaron:

<u>Derivas para el modo 1 :</u>				
→	$\Delta_1 =$	0.008	nivel 1	> 0.007 NO CUMPLE !
		0.011	nivel 2	> 0.007 NO CUMPLE !
		0.005	nivel 3	< 0.007 CUMPLE !
<u>Derivas para el modo 2 :</u>				
→	$\Delta_1 =$	0.001	nivel 1	< 0.007 CUMPLE !
		0.001	nivel 2	< 0.007 CUMPLE !
		0.001	nivel 3	< 0.007 CUMPLE !
<u>Derivas para el modo 3 :</u>				
→	$\Delta_1 =$	0.0002	nivel 1	< 0.007 CUMPLE !
		0.0004	nivel 2	< 0.007 CUMPLE !
		0.0004	nivel 3	< 0.007 CUMPLE !
<u>Combinacion cuadratica</u>				
→	$u_{max} =$	0.008	nivel 1	> 0.007 NO CUMPLE !
		0.011	nivel 2	> 0.007 NO CUMPLE !
		0.005	nivel 3	< 0.007 CUMPLE !

<u>Comparacion de ambos metodos</u>				
	ANALISIS	ANALISIS	NORMA E030 ING SISMORR	
	ESTATICO	DINAMICO		
nivel 1	0.009	0.008	> 0.007	NO CUMPLE !
nivel 2	0.012	0.011	> 0.007	NO CUMPLE !
nivel 3	0.006	0.005	< 0.007	CUMPLE !

Tabla 17: Comparación de las Derivas por ambos metrados

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

1. Para un sistema de estructuras de concreto armado (que tiene masa y rigidez considerable) en vibración libre (sin fuerzas externas activas) y no amortiguada (despreciando la pérdida de energía por un momento), la ecuación diferencial que domina el movimiento vibratorio fundamental es:

$$M\ddot{U}(t) + K U(t) = 0, \quad \text{donde: } \ddot{U}(t) = \ddot{u}(t) = x''(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Donde:

- $[M]$ es la **matriz de masa** (el peso de las losas de concreto).
 - $[K]$ es la **matriz de rigidez** (la resistencia de las columnas y muros).
 - $\{u\}$ es el vector de **desplazamiento** de cada uno de los 3 pisos.
2. Se considera que la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico para vibraciones libres no amortiguada es una función armónica porque tiene la forma:

$$u(t) = a \sin(w_n t + \varphi)$$

En forma matricial es:

$$\{ [K] - \omega_n^2 \cdot [m] \} \cdot \{ \emptyset \} = 0$$

y tiene las siguientes características:

- a) **Es de naturaleza elástica:** porque el concreto armado, dentro de su rango elástico, actúa como un resorte gigante de tal forma que, ante un evento de ondas sísmicas, vibra y se desplaza y luego intenta volver a su posición original, originando un movimiento armónico oscilatorio.
- b) **Tiene linealidad:** al ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, las funciones seno y coseno son las únicas raíces que, al derivarse dos veces, mantienen su forma original, permitiendo que la suma de fuerzas sea cero.
- c) Permitió obtener el periodo fundamental de la estructura de concreto armado (0.25 seg), que es vital para cumplir con las normas de diseño sismorresistente E030.
- d) Las rigideces de las columnas de los edificios de concreto armado dominan el comportamiento dinámico, y la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico de este modelo matemático predice con gran precisión como se distribuyen las fuerzas cortantes en la base, la cual servirá para que los ingenieros estructurales realicen un buen diseño antisísmico

En realidad, el concreto armado si tiene amortiguamiento (usualmente se asume un 5% para cálculos sísmicos), sin embargo, se estudia primero el caso “no amortiguado” porque las frecuencias naturales de la estructura no cambian significativamente con el amortiguamiento bajo, y son estas frecuencias las que determinan si el edificio entrara en resonancia.

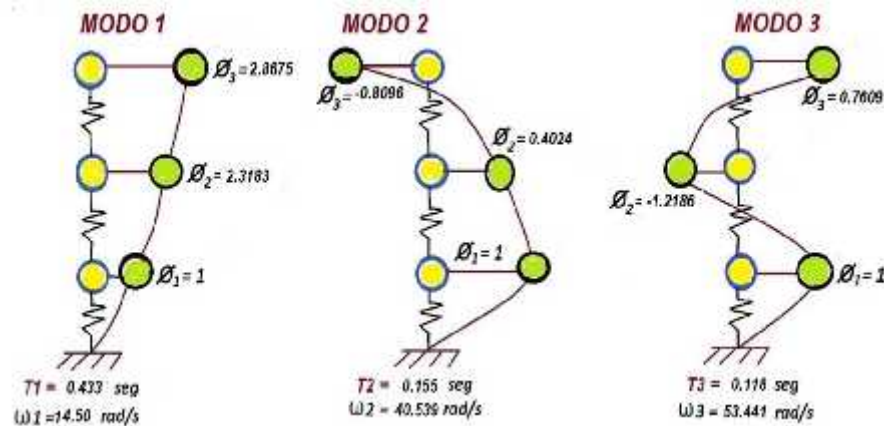
- 3. Del análisis sísmico estático, se observa que como consecuencia de la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico considerando el caso de vibraciones libres no amortiguadas, que la fuerza cortante basal fue de 70.84 ton, la cual se reparte proporcionalmente a su altura acumulada, tal es así que en el 3er piso soporta mayor fuerza cortante horizontal sísmica en el orden del triple

respecto del 1er piso, la cual origina un desplazamiento lateral de 3er piso del orden del 0.445 cm

4. Según este **análisis estático** solo el tercer piso cumple con los desplazamientos relativos (conocidas como derivas inelásticas), ya que según la tabla 11 “Limites para la distorsión del entrepiso” de la norma E030 sus máximos desplazamientos por vibraciones sísmicas para obras de concreto armado debe ser 0.007 ($0.006 < 0.007$)
5. Según el **análisis sísmico dinámico**, el 1er piso es el que tiene menor frecuencia angular con 14.50 rad/seg y por consiguiente es el que tiene el mayor periodo de tiempo de vibración en dar un ciclo completo con 0.433 segundos.
6. Al realizar la partición modal, resulto que el modo 1 tiene un 86.91 % de participación. El modo 2 con el 10.99% y el modo 3 con el 2.10% de participación. Y como consecuencia, el primer modo de vibración es el más probable que ocurra en un evento sísmico

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden mediante el cálculo de autovalores permitió diagnosticar que la rigidez intrínseca del modelo es insuficiente para mitigar los rangos de desplazamiento inelástico.
7. Como consecuencia del análisis sísmico dinámico, sus máximos desplazamientos vibratorios de las estructuras del edificio o Derivas inelásticas no cumplen para el modo 1 en el 1er y 2do nivel, pero si cumple el 3er nivel (que es el más importante), pero para el modo 2 y el modo 3 cumplen en todos sus niveles ya que son menores al máximo permitido que es de 0.007
8. Las estructuras del edificio del modelo tomado como ejemplo, **si** cumplen con los desplazamientos horizontales por vibración sísmica ante un evento, pero solo ante un comportamiento esperado como en los modos 2 y modo 3, pero **no** cumplen si

la edificación se comporta como en el modo 1 en su nivel 3, en casos extremos de máxima eventualidad de un sismo severo



9. Para el caso específico de la edificación de 3 pisos (3 grados de libertad): A diferencia de un péndulo simple, un edificio de tres pisos no tiene una sola “solución”, sino tres modos de vibración:

1. **Modo 1** (fundamental): Todos los pisos se mueven hacia el mismo lado. Es la frecuencia más baja y suele ser la más peligrosa en solicitaciones sísmicas.
2. **Modo 2:** El primer piso va hacia un lado y el tercero hacia el otro.
3. **Modo 3:** Los pisos se mueven de forma alterna (forma de zigzag)

10. Sobre el problema general y el cálculo de modos (objetivos generales)

Precisión en la caracterización dinámica: Se concluye que la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (forma matricial: $[\ddot{\mathbf{M}}(t) + \mathbf{K}(t) = 0]$) es la herramienta matemática indispensable para determinar con precisión las propiedades dinámicas de la estructura. Los resultados del Modo 1 ($\omega = 14.50 \text{ rad/s}$), Modo 2 ($\omega = 40.53 \text{ rad/s}$) y Modo 3 ($\omega = 53.44 \text{ rad/s}$) demuestran que a mayor complejidad del modo (mayor número de nodos), la frecuencia natural aumenta, lo cual permite predecir como responderá el edificio ante diferentes espectros sísmicos.

11. Sobre los desplazamientos horizontales (Objetivo específico A)

Control de la rigidez Estructural: La solución de las ecuaciones diferenciales permite obtener los vectores propios ($\emptyset$) que representan la forma de la deformada. Al analizar los desplazamientos relativos (**Derivas inelásticas**), se observa que los niveles 1 y 2 presentan valores de **0.009** y **0.012**, los cuales superan el límite normativo de **0.007 (NO CUMPLE)**. Esto demuestra que las ecuaciones diferenciales no solo son teóricas, sino que tienen una influencia crítica en la toma de decisiones de diseño, indicando la necesidad de rigidizar los niveles inferiores para garantizar la seguridad.

12. Sobre la predicción de Fallas Estructurales (Objetivo Especifico B)

Identificación de puntos vulnerables: El análisis dinámico basado en ecuaciones diferenciales permitió identificar que el segundo nivel es el punto más crítico de la estructura, al presentar la deriva más alta (0.012). Al no cumplir con los límites del servicio, se predice una falla estructural por daño excesivo en elementos no estructurales o pérdida de estabilidad global ante un evento dinámico real, validando la hipótesis de que las ecuaciones diferenciales son la base predictiva para prevenir colapsos.

13. Relación Periodo-Frecuencia

Validación de la respuesta Temporal: Se confirma la relación inversa entre el periodo (T) y la frecuencia (ω) obtenida mediante la solución del problema de autovalores y autovectores, (como producto de la solución de la ecuación diferencial del movimiento dinámico). La transición del **Modo 1** ($T=0.433$ s) al **Modo 3** ($T= 0.118$ s) refleja como la estructura moviliza diferentes porcentajes de masa, permitiendo un analisis diseño modal de superposición completo que es vital para el sismorresistente moderno

14. Influencia de los Modos Superiores: La resolución de las ED permitió cuantificar que, aunque el **Modo 1 ($T=0.433$ s)** es el dominante, la configuración de los modos 2 y 3 es vital para entender la distribución de cortes basales. La transición de

frecuencias de 14.50 a 53.44 rad/s indica una estructura con cambios bruscos de rigidez que las ecuaciones diferenciales logran diagnosticar con precisión matemática.

- 15.** El análisis dinámico, fundamentado en la resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento, proporciona valores de deriva ligeramente más bajos y precisos en comparación con el análisis estático. Mientras que el análisis estático tiende a ser más conservador (entregando valores de desplazamiento mayores), el dinámico refleja mejor el comportamiento real de la estructura al considerar sus **frecuencias naturales y modos de vibración**.

Finalmente; Las ecuaciones diferenciales permitieron transformar un modelo físico complejo a un modelo matemático cuya solución nos reveló que la estructura presentada es vulnerable en los dos primeros niveles (Derivas >0.007), permitiendo predecir fallas antes que la estructura sea sometida a cargas de servicio reales.

5.2 RECOMENDACIONES

Dado los resultados obtenidos en el análisis sísmico estático y dinámico se recomienda lo siguiente:

1. Reforzamiento de la Rigidez Lateral

Dado que las derivas inelásticas en el **Nivel 1 (0.009)** y **Nivel 2 (0.012)** superan el límite permisible de **0.007**, se recomienda incrementar la sección transversal de las columnas (rigidez lateral) o incluir **muros de corte (placas)** en estos niveles. Esto permitiría que la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento arroje desplazamientos menores, garantizando que la estructura "CUMPLA" con los estados límite de servicio.

2. Análisis de la Configuración de Masa y Rigidez

Se observa que el **Modo 1 (T = 0.433 seg)** es el que domina la respuesta. Se recomienda realizar un reajuste en la distribución de masas en los niveles superiores para intentar separar más los periodos naturales y evitar efectos de torsión acoplada, asegurando que el diseño final sea más robusto ante sismos de diseño.

3. Consideración de Efectos P-Delta

Debido a que los desplazamientos relativos en el segundo nivel son elevados ($0.012 > 0.007$), es imperativo realizar un **análisis de segundo orden (P-Delta)**. Las ecuaciones diferenciales lineales utilizadas inicialmente podrían subestimar los momentos en la base si los desplazamientos laterales son excesivos, lo que podría derivar en una falla por inestabilidad no prevista.

4. Implementación de Disipadores de Energía

Si la arquitectura no permite aumentar el tamaño de los elementos estructurales (columnas/vigas), se recomienda la evaluación de **disipadores de energía viscosos**. Estos dispositivos modifican la matriz de amortiguamiento de las ecuaciones diferenciales, ayudando a reducir las amplitudes de vibración y, por ende, las derivas inelásticas sin necesidad de rigidizar excesivamente la estructura.

5. **Transición a Modelos No Lineales:** Debido a que las derivas calculadas mediante ED lineales superan los límites de servicio, se recomienda profundizar la investigación utilizando **ecuaciones diferenciales parciales no lineales** para modelar el comportamiento inelástico (Hysteresis), permitiendo una predicción más real del colapso.

6. **Análisis de Interacción Suelo-Estructura:** Incorporar en las ecuaciones diferenciales términos que representen la flexibilidad de la cimentación, ya que un apoyo empotrado (como el mostrado en tus diagramas) suele subestimar los periodos reales y, por ende, las derivas finales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Aguiar Falconí, R. (2014). *Análisis sísmico de estructuras*. Escuela Politécnica del Ejército.
2. Chopra, A. K. (2014). *Dinámica de estructuras*. Pearson Educación.
3. Chopra, P. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. Prentice Hall.
4. Espinoza, E. (1996). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones* (5.^a ed.). Neptuno.
5. García, L. (1998). *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. CivilGeeks. <http://civilgeeks.com/2014/08/18/dinamica-estructural-aplicada-al-diseno-sismico/>
6. IGC. (2009a). *Reglamento Nacional de Edificaciones, NTE-E.020 Cargas* (Vol. 2). Fondo Editorial IGC.
7. Incropera, F. (2009). *SAP 2000 basic analysis reference manual*. CSI Inc.
8. Ottosen, N. y Petersson, H. (2010). *Ingeniería sismorresistente*. Fondo Editorial PUCP.
9. San Bartolomé, A. (1998). *Análisis de edificios*. Pontificia Universidad Católica del Perú.
10. SENCICO. (2018). *Reglamento Nacional de Edificaciones, NTE-E.030 Diseño Sismorresistente*. Fondo Editorial SENCICO.
11. Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas* (3.^a ed.). Prentice-Hall.
12. Villarreal, G. (2016). *Curso breve de Dinámica Estructural* (1era ed.). Editorial Norte S.R.L.

<https://es.scribd.com/document/381243919/Libro-Dinamica-Estructural-Curso-Breve-pdf>