

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Algunas caracterizaciones sobre funtores adjuntos
y aplicaciones**

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:

M.Sc. Mejía Alemán, Carlos
Código ORCID: 0000-0002-5081-9175

Asesor:

Dr. Cortez Gutierrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de Investigación
Análisis armónico, Funcional y Teoría de Aproximación

Nuevo Chimbote - PERÚ
2026



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "ALGUNAS CARACTERIZACIONES SOBRE FUNTORES ADJUNTOS Y APLICACIONES", por el Ms. Carlos Mejía Alemán, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, marzo del 2026.

.....
Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"Algunas Caracterizaciones sobre Funtores Adjuntos y Aplicaciones"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:



.....
Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra
PRESIDENTE
CODIGO ORCID: 0000-0002-5474-8423
DNI N° 17850934



.....
Dr. Teodoro Moore Flores
SECRETARIO
CODIGO ORCID: 0000-0002-1755-3459
DNI N° 32763522



.....
Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
VOCAL/ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los trece días del mes de marzo del año 2026, siendo las 10:15 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 556-2025-EPG-UNS de fecha 09.06.2025, conformado por los docentes: Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis intitulada: "**ALGUNAS CARACTERIZACIONES SOBRE FUNTORES ADJUNTOS Y APLICACIONES**"; presentado por el tesista **Carlos Mejía Alemán**, egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 192-2026-EPG-UNS de fecha 06 de marzo de 2026.


El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de Diecinueve.

Siendo las 11:40 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra
Presidente


Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario


Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
Vocal/Asesor

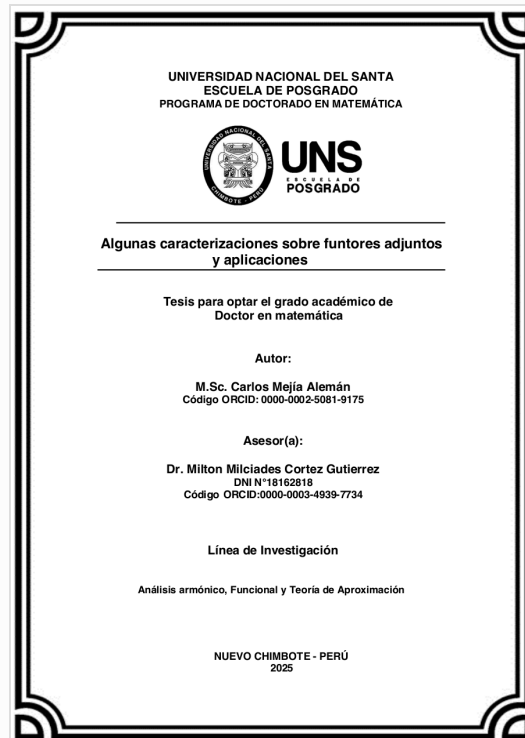


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: CARLOS MEJIA ALEMAN
Título del ejercicio: DOCTORADO 2026
Título de la entrega: Algunas caracterizaciones sobre funtores adjuntos y aplicacio...
Nombre del archivo: TESIS_DE_DOCTORADO-CARLOS_MEJIA_1_.pdf
Tamaño del archivo: 825.82K
Total páginas: 60
Total de palabras: 9,572
Total de caracteres: 46,135
Fecha de entrega: 13-mar-2026 03:17p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2902428411



Algunas caracterizaciones sobre funtores adjuntos y aplicaciones

INFORME DE ORIGINALIDAD

22%

INDICE DE SIMILITUD

22%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

7%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

revistas.unitru.edu.pe

Fuente de Internet

9%

2

repositorio.uns.edu.pe

Fuente de Internet

4%

3

hdl.handle.net

Fuente de Internet

3%

4

Submitted to Universidad Nacional del Santa

Trabajo del estudiante

2%

5

cybertesis.unmsm.edu.pe

Fuente de Internet

2%

6

www.coursehero.com

Fuente de Internet

1%

7

Submitted to Universidad de Málaga - Tii

Trabajo del estudiante

<1%

8

ebin.pub

Fuente de Internet

<1%

9

germand.github.io

Fuente de Internet

<1%

idoc.tips

Índice general

Resumen	
Abstract	
1 Introducción	1
1.1 Descripción del problema	2
1.2 Formulación del problema	3
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo general	3
1.3.2 Objetivos específicos	4
1.4 Formulación de la hipótesis	4
1.5 Justificación e importancia de la investigación	5
2 Marco teórico	6
2.1 Antecedentes	6
2.2 Marco conceptual	7
2.2.1 Definiciones previas	7
2.2.2 Categoría coma	13
2.2.3 Casos especiales de la categoría	14
2.2.4 Funtores importantes I	15
2.2.5 Adjunciones	17
2.2.6 Funtor opuesto	18
2.2.7 Par adjunto con funtores opuestos	19
2.2.8 Funtores importantes II	20

2.3	Hipótesis central de la investigación	20
2.4	VARIABLES e indicadores de la investigación	20
2.5	Métodos de la investigación	21
2.6	Diseño o esquema de la investigación	21
2.7	Población y muestra	22
2.8	Actividades del proceso de investigación	22
2.9	Técnicas e instrumentos de la investigación	23
2.10	Procedimiento para la recolección de datos (validación y confiabilidad de los instrumentos)	23
2.11	Técnicas de procesamiento y análisis de datos	24
3	Resultados	25
3.1	Resultado 1	25
3.2	Resultado 2	33
3.3	Aplicaciones	42
3.3.1	Aplicaciones en la teoría de grafos	42
3.3.2	Aplicaciones a la teoría de exponentes con conjuntos	46
4	Conclusiones y sugerencias	48
4.1	Conclusiones	48
4.2	Sugerencias	49
	Bibliografía	50

Resumen

En esta tesis se presentan dos caracterizaciones equivalentes del concepto de adjunción en teoría de categorías. Para ello se desarrolla el marco necesario sobre categorías, funtores, transformaciones naturales y categorías coma, herramientas que permiten describir propiedades universales en distintos contextos matemáticos.

La primera caracterización establece que un par de funtores $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es adjunto si y sólo si existe un isomorfismo entre las categorías coma $(1_{\mathcal{C}} \downarrow \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathcal{D}})$ que respeta las proyecciones naturales. La segunda caracterización demuestra que la adjunción se conserva al pasar a categorías opuestas; es decir, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par adjunto si y sólo si $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ también lo es.

Ambas caracterizaciones se presentan mediante demostraciones detalladas y auto-contenidas. Finalmente, se incluyen dos aplicaciones: la primera describe una relación entre categorías y dígrafos, y la segunda muestra una propiedad de los exponentes cuando se trabaja en la categoría **Set**.

Palabras clave: Categorías, funtores, transformaciones naturales, isomorfismos naturales, adjunciones.

Abstract

This thesis presents two characterizations of the concept of adjunction in category theory. To this end, we review the necessary background on categories, functors, natural transformations, and comma categories, which provide the structural framework used throughout the work.

The first characterization establishes that a pair of functors $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ forms an adjunction if and only if there exists an isomorphism between the comma categories $(1_{\mathcal{C}} \downarrow \mathcal{G})$ and $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathcal{D}})$ compatible with the canonical projections. The second characterization shows that adjunctions are

preserved under passage to opposite categories; that is, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ is an adjoint pair if and only if $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ is also an adjoint pair.

Both characterizations are presented through complete and self-contained proofs. Two illustrative applications are included: one involving the relation between categories and directed graphs, and another concerning a property of exponentials in the category **Set**.

Keywords: Categories, functors, natural transformations, natural isomorphisms, adjoint functors.

Capítulo 1

Introducción

La teoría de categorías proporciona un marco unificador para estudiar estructuras matemáticas mediante objetos, morfismos y relaciones naturales entre ellos. Dentro de este marco, el concepto de adjunción ocupa un lugar central, ya que describe correspondencias universales que aparecen en diversas áreas de la matemática, incluyendo el álgebra, la topología, la lógica y el análisis.

Desde su formulación por Daniel Kan en 1958 [10], las adjunciones se han convertido en una de las herramientas más utilizadas para entender construcciones universales y propiedades estructurales. Textos clásicos como los de Mac Lane [3] y Awodey [1] muestran cómo este concepto permite reinterpretar y unificar numerosos resultados matemáticos.

La definición estándar de adjunción se basa en la existencia de un isomorfismo natural entre conjuntos de morfismos. Esta caracterización es precisa y ampliamente aceptada; sin embargo, no siempre resulta la más intuitiva para visualizar la estructura categórica que subyace al fenómeno. Por ello, es de interés explorar otras formas equivalentes de describir una adjunción, especialmente aquellas que recurren a construcciones categóricas como las categorías coma o al uso de dualidades.

En esta tesis se estudian dos caracterizaciones equivalentes del con-

cepto de adjunción. La primera se basa en un isomorfismo entre las categorías coma $(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$, lo que permite interpretar la adjunción como una identificación estructural entre dos construcciones dependientes únicamente de los funtores involucrados. La segunda caracterización muestra que la adjunción se preserva bajo el paso a categorías opuestas: un par de funtores $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es adjunto si y sólo si el par $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ también lo es.

Si bien los enunciados de estas caracterizaciones pueden encontrarse, de forma dispersa, en la literatura especializada, no se dispone de demostraciones explícitas y detalladas que desarrollen estos resultados de manera autónoma a partir de la definición clásica de adjunción. El aporte principal de esta tesis consiste precisamente en proporcionar demostraciones completas, rigurosas y auto-contenidas de dichas caracterizaciones, poniendo de relieve su equivalencia y su relación estructural.

Finalmente, se presentan dos aplicaciones. La primera establece una relación entre categorías y dígrafos, y la segunda muestra cómo las adjunciones permiten justificar identidades estructurales en la teoría de exponentes dentro de la categoría **Set**. Estas aplicaciones ilustran la utilidad práctica de las caracterizaciones desarrolladas.

1.1 Descripción del problema

En la teoría de categorías, los funtores adjuntos constituyen una de las nociones más importantes debido a su capacidad para describir construcciones universales. La definición clásica de adjunción se formula a partir de la existencia de un isomorfismo natural entre conjuntos de morfismos. Sin embargo, esta definición, aunque precisa, no siempre permite visualizar de manera clara la estructura categórica que subyace al fenómeno.

Además, existen otras construcciones dentro de la teoría de categorías, como las categorías coma y las categorías opuestas, que ofrecen perspectivas alternativas para describir fenómenos universales. No obstante, en

la literatura tradicional, estas caracterizaciones equivalentes no suelen aparecer tratadas de manera conjunta, completa y con demostraciones detalladas que permitan apreciar su conexión con la definición estándar.

Por ello, surge el siguiente problema de investigación: establecer, demostrar y articular dos caracterizaciones equivalentes del concepto de adjunción —una a través de isomorfismos entre categorías coma y otra mediante el uso de funtores opuestos—, mostrando que ambas caracterizaciones coinciden con la definición clásica basada en isomorfismos naturales.

1.2 Formulación del problema

¿Es posible demostrar, que el concepto de adjunción entre dos funtores puede caracterizarse mediante:

1. Un isomorfismo entre las categorías coma $(1_{\mathcal{C}} \downarrow \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathcal{D}})$, y
2. La equivalencia entre la adjunción $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y la adjunción entre los funtores opuestos $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Establecer y demostrar dos caracterizaciones equivalentes del concepto de adjunción entre funtores, una mediante categorías coma y otra mediante funtores opuestos, mostrando que ambas coinciden con la definición clásica basada en isomorfismos naturales.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Desarrollar de manera rigurosa la teoría necesaria relacionada con categorías, funtores, transformaciones naturales y categorías coma.
2. Demostrar la caracterización de adjunciones a través de un isomorfismo entre las categorías coma $(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$.
3. Demostrar que la adjunción entre funtores se preserva al pasar a categorías opuestas, es decir, que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es adjunto si y solo si $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ lo es.
4. Comparar ambas caracterizaciones con la definición clásica de adjunción y establecer la equivalencia.
5. Presentar aplicaciones teóricas que ilustren la utilidad de las caracterizaciones obtenidas.

1.4 Formulación de la hipótesis

Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores. La hipótesis sostiene que la adjunción entre ellos puede describirse mediante las siguientes condiciones equivalentes:

(H1) **Caracterización mediante categorías coma:** Existe un isomorfismo

$$\mathcal{J} : (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$$

que es compatible con las proyecciones naturales de ambas categorías.

(H2) **Caracterización mediante dualidad categórica:**

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es adjunto} \iff (\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op}) \text{ es adjunto.}$$

Estas expresiones describen de manera equivalente la validez de la hipótesis, al provenir de dos enfoques estructurales distintos dentro de la teoría de categorías.

1.5 Justificación e importancia de la investigación

La importancia del estudio de las adjunciones radica en que constituyen una de las nociones centrales de la teoría de categorías, con aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas contemporáneas. Si bien la definición clásica mediante isomorfismos naturales es ampliamente utilizada, existen otras caracterizaciones que permiten comprender la estructura interna de las adjunciones desde distintas perspectivas. Demostrar rigurosamente estas caracterizaciones alternativas no solo enriquece la comprensión conceptual del tema, sino que además proporciona herramientas adicionales para su aplicación en otras áreas. Asimismo, presentar las demostraciones de forma completa y auto-contenida contribuye a la literatura en español sobre teoría de categorías, facilitando el acceso a estos resultados a estudiantes e investigadores.

El trabajo también adquiere relevancia al ofrecer aplicaciones en contextos concretos, como la relación entre categorías y dígrafos, y las propiedades exponenciales en **Set**, mostrando que las caracterizaciones desarrolladas no son solamente teóricas, sino también útiles en la práctica.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1 Antecedentes

El estudio de las adjunciones se remonta al trabajo de Daniel Kan (1958), donde se introdujo formalmente este concepto en el contexto de la teoría de homotopía. Posteriormente, Mac Lane [3] sistematizó el tratamiento de las adjunciones dentro de la teoría de categorías, convirtiéndolas en una herramienta fundamental para el análisis estructural de numerosas construcciones algebraicas y topológicas.

Awodey [1] y Leinster [2] presentan una introducción moderna a la teoría de categorías, destacando el papel unificador de las adjunciones. En estos textos se discuten ejemplos clásicos, pero no se desarrolla de manera detallada la relación entre adjunciones, categorías coma y funtores opuestos, lo que motiva el interés de este trabajo.

Por otra parte, trabajos como [14] estudian en profundidad las categorías coma, mientras que en [5] se desarrolla una caracterización de isomorfismos naturales de bifuntores, la cual es utilizada como referencia teórica en el presente trabajo.

Aunque existen referencias dispersas que mencionan las caracteriza-

ciones que aquí se estudian, no se encuentran presentadas de forma conjunta y con demostraciones completas, lo que justifica la pertinencia del presente trabajo.

2.2 Marco conceptual

El presente marco conceptual reúne las definiciones, proposiciones y resultados necesarios para desarrollar las demostraciones de las caracterizaciones equivalentes de adjunciones que se estudian en esta investigación. Se introducen conceptos fundamentales como categorías, funtores, transformaciones naturales, bifuntores, categorías coma y funtores opuestos, siguiendo la presentación estándar utilizada en la literatura especializada.

Cada definición se acompaña de ejemplos que ilustran su aplicación, lo que permitirá establecer posteriormente las propiedades que vinculan estos conceptos con la noción de adjunción.

2.2.1 Definiciones previas

Definición 2.2.1. Una categoría \mathfrak{C} consta de:

1. una colección, denotada por $Ob(\mathfrak{C})$, donde los elementos de $Ob(\mathfrak{C})$ son llamados objetos, dichos elementos suelen ser denotados por A, B, C, D, \dots
2. conjuntos denotados por $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ para cualesquiera $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$. Los elementos de $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ son llamados flechas o morfismos y suelen ser denotados por $f : A \longrightarrow B$.
3. aplicaciones llamadas composiciones de morfismos denotadas por:

$$\begin{aligned} \circ : Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) \times Mor_{\mathfrak{C}}(B, C) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

para cada terna $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$ que satisface las siguientes condiciones:

- (a) Para cualesquiera $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$ y $h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, D)$ se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Por tanto, la composición de morfismos es asociativa.
- (b) Para cada $A \in Ob(\mathfrak{C})$, existe un morfismo $1_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, A)$ llamado morfismo identidad, tal que para cualesquiera $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, A)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ tenemos $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$.

- Ejemplos 2.2.2.**
1. La categoría de conjuntos **Set** cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones.
 2. La categoría de grupos abelianos **Ab** cuyos objetos son los grupos abelianos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos abelianos.
 3. La categoría de anillos conmutativos con unidad **CRing** cuyos objetos son los anillos conmutativos con unidad y cuyos morfismos son los homomorfismos de anillos conmutativos que respetan la unidad.
 4. Sea R un anillo con unidad. La categoría de módulos a izquierda **R-Mod** cuyos objetos son módulos a izquierda y cuyos morfismos son los homomorfismos de R -módulos a izquierda. También tenemos la categoría de módulos a derecha **Mod-R** cuyos objetos son los R -módulos a derecha y cuyos morfismos son los homomorfismos de R -módulos a derecha.
 5. Si \mathbb{K} es un cuerpo, tenemos la categoría de los \mathbb{K} -espacios vectoriales **Vect $_{\mathbb{K}}$** cuyos objetos son los \mathbb{K} -espacios vectoriales y cuyos morfismos son las transformaciones lineales.
 6. La categoría de espacios topológicos **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son aplicaciones continuas entre espacios topológicos.

7. La **categoría opuesta** \mathfrak{C}^{op} de una categoría \mathfrak{C} tiene los mismos objetos que \mathfrak{C} y para cada morfismo $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, A)$ se tiene que $f^{op} \in Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A, B)$.

Para cada terna $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C}^{op})$ definimos la composición

$$\begin{aligned} \circ : Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A, B) \times Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(B, C) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A, C) \\ (f^{op}, g^{op}) &\longmapsto g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op} \end{aligned}$$

y si suponemos que $1_A^{op} = 1_A$ entonces \mathfrak{C}^{op} es una categoría.

8. Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías. La **categoría producto** de \mathfrak{C} y \mathfrak{D} denotada por $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tiene como objetos a los pares (A, B) donde $A \in \mathfrak{C}, B \in \mathfrak{D}$ y sus morfismos son de la forma $(f, g) : (A, C) \longrightarrow (B, D)$ donde $f : A \longrightarrow B \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $g : C \longrightarrow D \in Mor_{\mathfrak{D}}(C, D)$. La composición se define coordenada a coordenada y si suponemos que $1_{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}} = (1_{\mathfrak{C}}, 1_{\mathfrak{D}})$ entonces $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es una categoría.
9. La categoría de categorías denotada por **Cat**, donde los objetos son categorías y las flechas son funtores.

Estos ejemplos y otros más, los pueden encontrar en el famoso libro de MacLane [3] y los libros [2] y [4].

Definición 2.2.3. Un **functor covariante** o simplemente un **functor** \mathcal{F} que va de \mathfrak{C} a \mathfrak{D} se denota $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y por definición cumple que:

1. Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}A \in \mathfrak{D}$.
2. Para cada par de objetos $A, B \in \mathfrak{C}$ y para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en \mathfrak{C} tenemos que $\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}B$ es un morfismo en \mathfrak{D} tal que:
 - i) Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$.
 - ii) Para cada $A, B, C \in \mathfrak{C}$ y $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ morfismos en \mathfrak{C} se tiene que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f$.

Si $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un funtor, nombraremos a \mathfrak{C} dominio y a \mathfrak{D} codominio.

Ejemplo 2.2.1. Toda categoría \mathfrak{C} define un funtor $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $A \in \mathfrak{C}$ tenemos que $1_{\mathfrak{C}}A := A \in \mathfrak{C}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en \mathfrak{C} tenemos que el morfismo $1_{\mathfrak{C}}f := f$ está en \mathfrak{C} .

Así definido $1_{\mathfrak{C}}$ es un funtor llamado **functor identidad**.

Ejemplo 2.2.2. Dado $X \in \mathfrak{D}$ fijo. Definimos $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $A \in \mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}A := X \in \mathfrak{D}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en \mathfrak{C} tenemos que el morfismo $\mathcal{F}f := 1_X$ está en \mathfrak{D} .

Así definido \mathcal{F} es un funtor llamado **functor constante**.

Ejemplo 2.2.3. Definimos $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $G \in \mathbf{Ab}$ tenemos que $\mathcal{F}G := G \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $h : G_1 \longrightarrow G_2$ en \mathbf{Ab} tenemos que el morfismo $\mathcal{F}h := h$ está en \mathbf{Set} . Así definido \mathcal{F} es un funtor, llamado **functor de olvido**.

Estos ejemplos y otros más, los pueden ver en [1] y si tienen curiosidad por saber que son los funtores contravariantes ver [2].

Definición 2.2.4. Un **bifunctor** es un funtor cuyo dominio es alguna categoría producto.

Observación 2.2.5. Consideremos el bifunctor $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y el morfismo $(h, j) \circ (f, g) : (B_1, C_1) \xrightarrow{(f, g)} (B_2, C_2) \xrightarrow{(h, j)} (B_3, C_3)$ en $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, entonces $\mathcal{F}((h, j) \circ (f, g)) := \mathcal{F}(h \circ f, j \circ g) = \mathcal{F}(h, j) \circ \mathcal{F}(f, g)$ pues \mathcal{F} es funtor.

Observación 2.2.6. Si $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un bifunctor entonces para cada $B \in \mathfrak{B}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(B, -) : \quad \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ C &\longmapsto \mathcal{F}(B, C) \\ C_1 \xrightarrow{g} C_2 &\longmapsto \mathcal{F}(1_B, g) \end{aligned}$$

es un funtor, pues dada el morfismo $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3$ tenemos que $\mathcal{F}(1_B, g) \circ \mathcal{F}(1_B, f) = \mathcal{F}(1_B \circ 1_B, g \circ f) = \mathcal{F}(1_B, g \circ f)$.

Observación 2.2.7. Si $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un bifunctor, entonces para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-, C) : \quad \mathfrak{B} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ B &\longmapsto \mathcal{F}(B, C) \\ B_1 \xrightarrow{h} B_2 &\longmapsto \mathcal{F}(h, 1_C) \end{aligned}$$

es un funtor.

Para los siguientes ejemplos vamos a considerar los funtores de la forma $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$.

Ejemplo 2.2.4. Definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue:

En objetos: para cada objeto $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1) &\xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)} Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D_2) \\ q &\longmapsto Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)(q) := \mathcal{G}g \circ q \circ f \end{aligned}$$

está en \mathbf{Set} . Así definido $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-)$ es un bifunctor. Vamos a enumerar la última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)(q) := \mathcal{G}g \circ q \circ f \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.2.5. Definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue:

En objetos: Para cada objeto $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) &\xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2) \\ q &\longmapsto Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)(q) := g \circ q \circ \mathcal{F}f \end{aligned}$$

está en \mathbf{Set} . Así definido $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es un bifunctor. Vamos a enumerar la última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)(q) := g \circ q \circ \mathcal{F}f \quad (2.2)$$

La definición de bifunctor y los ejemplos dados arriba se pueden encontrar en [14] de manera más detallada.

Definición 2.2.8. Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ dos funtores. Una **transformación natural** que va de \mathcal{F} a \mathcal{G} es denotada por $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ y por definición asigna a cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ un morfismo $\tau_A : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{G}A$ en \mathfrak{D} tal que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en \mathfrak{C} el siguiente diagrama conmuta en \mathfrak{D}

$$\begin{array}{ccccc} A & & \mathcal{F}A & \xrightarrow{\quad \tau_A \quad} & \mathcal{G}A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f & & \mathcal{F}f & & \mathcal{G}f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & & \mathcal{F}B & \xrightarrow{\quad \tau_B \quad} & \mathcal{G}B \end{array}$$

Ejemplo 2.2.6.

Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un funtor. Definimos $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que asigna a cada $A \in \mathfrak{C}$ el morfismo identidad $\tau_A = 1_{\mathcal{F}A} : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}A$ en \mathfrak{D} . Así definida τ es una transformación natural.

Ejemplo 2.2.7.

Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{J} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tres funtores. Si $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}, \eta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}$ son transformaciones naturales, entonces definimos $\eta \circ \tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que asigna a cada $A \in \mathfrak{C}$ el morfismo $(\eta \circ \tau)_A := \eta_A \circ \tau_A$. Así definida $\eta \circ \tau$ es una transformación natural.

Para profundizar más esta última parte ver [4].

Definición 2.2.9. Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ funtores. Una transformación natural $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un **isomorfismo natural de funtores** o simplemente un **isomorfismo natural** si para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\tau_A : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{G}A$ es un isomorfismo en \mathfrak{D} . En este caso tenemos una transformación natural $\tau^{-1} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ definida por $(\tau^{-1})_A := (\tau_A)^{-1}$ para cada $A \in \mathfrak{C}$. Denotaremos $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ para decir que \mathcal{F} y \mathcal{G} son naturalmente isomorfos.

La definición de arriba se puede ver en [14] y también una definición equivalente a esta última.

2.2.2 Categoría coma

Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{B}$ funtores. Vamos a definir la categoría coma $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$ de la siguiente manera:

En objetos: los objetos son ternas (C, D, f) donde $C \in \mathfrak{C}, D \in \mathfrak{D}$ y $f : \mathcal{F}C \longrightarrow \mathcal{G}D$ una flecha en \mathfrak{B} .

En flechas: las flechas son pares $(i, j) : (C, D, f) \longrightarrow (\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{f})$, donde $i : C \longrightarrow \tilde{C}, j : D \longrightarrow \tilde{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}C & \xrightarrow{\mathcal{F}i} & \mathcal{F}\tilde{C} \\
\downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\
\mathcal{G}D & \xrightarrow{g_j} & \mathcal{G}\tilde{D}
\end{array}$$

Así definido $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$ es una categoría.

2.2.3 Casos especiales de la categoría coma

Caso 3: Si $\mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ funtores. Definimos la categoría coma $(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ de la siguiente manera:

En objetos: los objetos son ternas (C, D, f) donde $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$ y $f : 1_{\mathfrak{C}}C = C \rightarrow \mathcal{G}D$ una flecha en \mathfrak{C} .

En flechas: las flechas son pares $(i, j) : (C, D, f) \rightarrow (\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{f})$, donde $i : C \rightarrow \tilde{C}$, $j : D \rightarrow \tilde{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
1_{\mathfrak{C}}C = C & \xrightarrow{1_{\mathfrak{C}}i=i} & 1_{\mathfrak{C}}\tilde{C} = \tilde{C} \\
\downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\
\mathcal{G}D & \xrightarrow{g_j} & \mathcal{G}\tilde{D}
\end{array}$$

Caso 4: Si $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ funtores. Definimos la categoría coma $(\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$ de la siguiente manera:

En objetos: los objetos son ternas (C, D, f) donde $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$ y $f : \mathcal{F}C \rightarrow 1_{\mathfrak{D}}D = D$ una flecha en \mathfrak{D} .

En flechas: las flechas son pares $(i, j) : (C, D, f) \rightarrow (\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{f})$, donde $i : C \rightarrow \tilde{C}$, $j : D \rightarrow \tilde{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{FC} & \xrightarrow{\mathcal{F}i} & \mathcal{F}\tilde{C} \\
\downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\
1_{\mathfrak{D}}D = D & \xrightarrow{1_{\mathfrak{D}}j=j} & 1_{\mathfrak{D}}\tilde{D} = \tilde{D}
\end{array}$$

Esta última definición se puede ver en [14] y en [2], así como también algunos ejemplos. Para algunas propiedades de estas últimas categorías ver [1].

2.2.4 Funtores importantes I

De las observaciones 2.2.6, 2.2.7 y de los bifuntores

$$Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

se obtienen los siguientes funtores:

1. Para cada $D \in \mathfrak{D}$, definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ en \mathfrak{C}^{op} se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned}
Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)} Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D) \\
q & \longmapsto Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q) := q \circ f
\end{aligned}$$

está en \mathbf{Set} . Vamos a enumerar a esta última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q) := q \circ f. \quad (2.3)$$

2. Para cada $C \in \mathfrak{C}$, definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $D \in \mathfrak{D}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f : D_1 \longrightarrow D_2$ en \mathfrak{D} se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_1) &\xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)} Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_2) \\ q &\longmapsto Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q) := \mathcal{G}f \circ q \end{aligned}$$

está en \mathbf{Set} . Vamos a enumerar a esta última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q) := \mathcal{G}f \circ q. \quad (2.4)$$

3. Para cada $C \in \mathfrak{C}$ definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -) : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $D \in \mathfrak{D}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f : D_1 \longrightarrow D_2$ en \mathfrak{D} se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D_1) &\xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D_2) \\ q &\longmapsto Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q) := f \circ q \end{aligned}$$

está en \mathbf{Set} . Vamos a enumerar a esta última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q) := f \circ q. \quad (2.5)$$

4. Para cada $D \in \mathfrak{D}$ definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in \mathbf{Set}$.

En morfismos: Para cada morfismo $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ en \mathfrak{C}^{op} se tiene que morfismo

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D) &\xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D) \\ q &\longmapsto Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q) := q \circ \mathcal{F}f \end{aligned}$$

está en **Set**. Vamos a enumerar la última igualdad.

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q) := q \circ \mathcal{F}f. \quad (2.6)$$

Ver [10] para profundizar esta última parte.

2.2.5 Adjunciones

Definición 2.2.10. Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ funtores y

$$\tau = \tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$$

una transformación natural. Decimos que \mathcal{F} y \mathcal{G} son **funtores adjuntos** o que el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un **par adjunto** si τ es un isomorfismo natural.

El siguiente teorema nos ayudará a caracterizar lo que es un par adjunto.

Teorema 2.2.1. Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.

$$\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$$

es isomorfismo natural si y solo si para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$, $D \in \mathfrak{D}$ se tiene que

$$\tau_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\tau_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son isomorfismos naturales.

Prueba. La demostración de este resultado puede encontrarse en [5]. ■

2.2.6 Funtor opuesto

Ahora veremos lo que es el funtor opuesto, este funtor es importante para nuestra segunda caracterización de par adjunto.

Proposición 2.2.11. $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un funtor si y solo si $\mathcal{F}^{op} : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathfrak{D}^{op}$ es un funtor. Este último funtor es llamado **funtor opuesto** de \mathcal{F} .

Prueba. [\implies] Definimos $\mathcal{F}^{op} : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathfrak{D}^{op}$ de la siguiente manera:

En objetos: para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ tenemos que $\mathcal{F}^{op}C := \mathcal{F}C \in \mathfrak{D}^{op}$

En flechas: para cada flecha f^{op} en \mathfrak{C}^{op} tenemos que la flecha $\mathcal{F}^{op}f^{op} := (\mathcal{F}f)^{op}$ está en \mathfrak{D}^{op} . Sean $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ y $g^{op} : C_2 \longrightarrow C_3$ flechas en \mathfrak{C}^{op} . Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{op}(g^{op} \circ f^{op}) &= \mathcal{F}^{op}(f \circ g)^{op} := (\mathcal{F}(f \circ g))^{op} = (\mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g)^{op} \\ &:= (\mathcal{F}g)^{op} \circ (\mathcal{F}f)^{op} \\ &= \mathcal{F}^{op}g^{op} \circ \mathcal{F}^{op}f^{op} \end{aligned}$$

[\impliedby] Definimos $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ de la siguiente manera:

En objetos: para cada $C \in \mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}C := \mathcal{F}^{op}C \in \mathfrak{D}$

En flechas: para cada flecha f en \mathfrak{C} tenemos que la flecha $\mathcal{F}f := (\mathcal{F}^{op}f^{op})^{op}$ está en \mathfrak{D} . Sean $f : C_1 \longrightarrow C_2$ y $g : C_2 \longrightarrow C_3$ flechas en \mathfrak{C} . Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g \circ f) &:= (\mathcal{F}^{op}(g \circ f)^{op})^{op} = (\mathcal{F}^{op}(f^{op} \circ g^{op}))^{op} \\ &= (\mathcal{F}^{op}f^{op} \circ \mathcal{F}^{op}g^{op})^{op} \\ &= (\mathcal{F}^{op}g^{op})^{op} \circ (\mathcal{F}^{op}f^{op})^{op} \\ &:= \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f \end{aligned}$$

Ver [2] y [3].

A continuación vamos a definir que el par $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es un par adjunto, así como lo hicimos para el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en la definición 2.2.10.

2.2.7 Par adjunto con funtores opuestos

Ahora vamos a definir par adjunto para funtores opuestos.

Definición 2.2.12. Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores. El par $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es un par adjunto si y solo si

$$\eta_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, -)$$

es isomorfismo natural.

Observación 2.2.13. El dominio y codominio de los funtores $Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}-)$ y $Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, -)$ son respectivamente $\mathfrak{D} \times \mathfrak{C}^{op}$ y **Set**.

También es importante mostrar el dominio y codominio de los siguientes funtores, que se obtienen a partir de los funtores $Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}-)$ y $Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, -)$:

$$Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}-) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, -) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, C) : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}C) : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$.

2.2.8 Funtores importantes II

Así como obtuvimos las ecuaciones 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6, también vamos enumerar las siguientes ecuaciones:

$$\text{Mor}_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op} f^{op})(q) := \mathcal{F}^{op} f^{op} \circ q. \quad (2.7)$$

$$\text{Mor}_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op} D, f^{op})(q) := f^{op} \circ q. \quad (2.8)$$

$$\text{Mor}_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op} C)(q) := q \circ f^{op}. \quad (2.9)$$

$$\text{Mor}_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op} f, C)(q) := q \circ \mathcal{G}^{op} f^{op}. \quad (2.10)$$

2.3 Hipótesis central de la investigación

Como punto de partida del presente trabajo, se establece que la noción de adjunción entre funtores puede describirse de manera equivalente mediante construcciones categóricas asociadas a categorías coma y al paso a categorías opuestas. Bajo este marco, se plantea que dichas descripciones proporcionan caracterizaciones estructurales equivalentes de la adjunción, las cuales pueden formularse y demostrarse rigurosamente dentro de la teoría de categorías.

2.4 Variables e indicadores de la investigación

Dado el carácter teórico de la presente investigación, las variables se interpretan en sentido conceptual:

Variable independiente: **las categorías.**

Variable dependiente: **las adjunciones entre funtores mediante transformaciones naturales.**

2.5 Métodos de la investigación

El método de investigación utilizado es el **método hipotético-deductivo**, en el sentido de que los resultados se obtienen a partir de la formulación de enunciados teóricos dentro de un marco axiomático y su demostración mediante razonamientos lógicos deductivos.

Como es propio de la investigación matemática, los resultados se alcanzan mediante procedimientos estrictamente formales, basados en definiciones, proposiciones, teoremas y demostraciones.

Asimismo, la investigación es de tipo **básica o pura**, ya que busca aportar resultados teóricos dentro de la teoría de categorías, con potencial aplicación en otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la topología y la lógica matemática.

De acuerdo con el grado de manipulación de variables, la investigación es **no experimental**, y por el horizonte temporal, es una investigación de tipo **transversal**, ya que se apoya en el análisis sistemático de literatura especializada durante el desarrollo del trabajo.

2.6 Diseño o esquema de la investigación

El diseño de la investigación es de tipo **teórico-formal**, basado en el desarrollo lógico-deductivo de definiciones, proposiciones y demostraciones, estableciendo relaciones entre la variable independiente (las categorías) y la variable dependiente (las adjunciones caracterizadas mediante transformaciones naturales).

2.7 Población y muestra

Dada la naturaleza teórica del estudio, se considera como **población** a las categorías, mientras que la **muestra** está constituida por los pares de funtores adjuntos analizados en el desarrollo de la investigación.

2.8 Actividades del proceso de investigación

1. FASE INICIAL

En esta fase se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y herramientas a estudiar. Luego se recopiló la información de manera más completa de revistas y/o artículos especializados, que permitió describir el método de estudio y las herramientas que se utilizaron para el presente trabajo de investigación.

2. FASE INTERMEDIA

En esta fase se enunció el teorema 2.2.1 que es una caracterización de isomorfismos naturales, este teorema fue demostrado y publicado en la revista "Selecciones Matemáticas", ver [5], como requisito para obtener el título de doctor.

3. FASE FINAL

Se utilizó la caracterización del isomorfismo natural, (teorema 2.2.1), las definiciones de funtores adjuntos (2.2.10), funtores adjuntos opuestos (2.2.12) y funtor opuesto (2.2.11), así como también algunos funtores especiales (2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 y 2.10).

2.9 Técnicas e instrumentos de la investigación

La técnica principal utilizada fue la **revisión documental**, a través del estudio de libros, artículos científicos y revistas especializadas en teoría de categorías.

Para la variable independiente (las categorías), se revisaron los fundamentos teóricos correspondientes a la teoría de categorías, funtores y transformaciones naturales.

Para la variable dependiente (las adjunciones), se analizaron sus caracterizaciones mediante isomorfismos naturales y construcciones categóricas.

La validación de los resultados se realizó mediante razonamiento algebraico y categórico, garantizando la coherencia formal de las demostraciones.

2.10 Procedimiento para la recolección de datos (validación y confiabilidad de los instrumentos)

La recolección de información se realizó mediante la revisión de libros, artículos y revistas especializadas en teoría de categorías y áreas afines. La confiabilidad de los resultados se sustenta en el uso de fuentes reconocidas y en la verificación formal de cada proposición mediante demostraciones rigurosas.

La investigación se desarrolla en el marco institucional de la Universidad Nacional del Santa, licenciada por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU).

2.11 Técnicas de procesamiento y análisis de datos

Para el procesamiento y análisis de los datos tomados respecto a las variables: se han considerado básicamente en la búsqueda de los métodos de demostración mediante la revisión de bibliografía especializada, es decir libros y artículos de la materia, utilizando resultados de la teoría de categorías y el álgebra. Se ha trabajado con categorías bien conocidas y se ha conseguido que la caracterización funcione bien.

Capítulo 3

Resultados

Antes de enunciar los resultados principales de este capítulo, observamos que las caracterizaciones equivalentes de los funtores adjuntos que se estudian a continuación, tanto aquellas formuladas mediante categorías coma como aquellas relacionadas con funtores opuestos, aparecen de manera implícita en la literatura clásica de teoría de categorías; véase, por ejemplo, [1, 2, 3, 4].

Sin embargo, en las referencias consultadas no se ha encontrado una presentación explícita y autónoma de estos resultados acompañada de demostraciones detalladas. Las demostraciones que se desarrollan en este trabajo constituyen un aporte propio, y se presentan de manera completa y auto-contenida.

3.1 Resultado 1

Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.

$\mathcal{J} : (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$ es isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{J}} & (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}}) \\
& \searrow \pi_{12} & \swarrow \pi_{12} \\
& \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} &
\end{array}$$

si y solo si $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto.

Prueba. [\Leftarrow] Por hipótesis $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto, luego

$$\tau_{(-,-)} : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$$

es isomorfismo natural, es decir

$$\tau_{(C,D)} : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D)$$

es isomorfismo para cualesquiera $C \in \mathfrak{C}$ y $D \in \mathfrak{D}$.

Definimos el functor $\mathcal{J} : (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$ de la siguiente manera:
 En objetos: para cada $(C, D, f) \in (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ tenemos que $\mathcal{J}(C, D, f) := (C, D, \tau_{(C,D)}(f)) \in (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$.

En flechas: para cada flecha $(i, j) : (C, D, f) \longrightarrow (\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{f})$ tenemos que $\mathcal{J}(i, j) = (i, j)$.

Veamos que \mathcal{J} esté bien definido en las flechas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{i} & \tilde{C} \\
\downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\
\mathcal{G}D & \xrightarrow{g_j} & \mathcal{G}\tilde{D}
\end{array}$$

$$g_j \circ f = \tilde{f} \circ i. \quad (3.1)$$

entonces el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}C & \xrightarrow{\mathcal{F}i} & \mathcal{F}\tilde{C} \\
\downarrow \tau_{(C,D)}(f) & & \downarrow \tau_{(\tilde{C},\tilde{D})}(\tilde{f}) \\
D & \xrightarrow{j} & \tilde{D}
\end{array}$$

$$j \circ \tau_{(C,D)}(f) = \tau_{(\tilde{C},\tilde{D})}(\tilde{f}) \circ \mathcal{F}i. \quad (3.2)$$

para esto, consideremos la flecha $j : D \rightarrow \tilde{D}$ y dado que $\tau_{(C,-)}$ es transformación natural, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
D & & f \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(C,D)}} & \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \\
\downarrow j & & \downarrow \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}j) & & \downarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, j) \\
\tilde{D} & & \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}\tilde{D}) & \xrightarrow{\tau_{(C,\tilde{D})}} & \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \tilde{D})
\end{array}
\quad (I)$$

por otro lado, dado que $\tilde{D} \in \mathfrak{D}$ entonces $\tau_{(-, \tilde{D})}$ es transformación natural y si consideramos la flecha $i^{op} : \tilde{C} \rightarrow C$ entonces el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{C} & & \tilde{f} \in Mor_{\mathfrak{C}}(\tilde{C}, \mathcal{G}\tilde{D}) & \xrightarrow{\tau_{(\tilde{C}, \tilde{D})}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}\tilde{C}, \tilde{D}) \\
 \downarrow i^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}}(i^{op}, \mathcal{G}\tilde{D}) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}i^{op}, \tilde{D}) \\
 C & & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}\tilde{D}) & \xrightarrow{\tau_{(C, \tilde{D})}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \tilde{D})
 \end{array}
 \quad (II)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
 \tau_{(\tilde{C}, \tilde{D})}(\tilde{f}) \circ \mathcal{F}i &\stackrel{2.6}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}i^{op}, \tilde{D})(\tau_{(\tilde{C}, \tilde{D})}(\tilde{f})) \\
 &\stackrel{(II)}{=} \tau_{(C, \tilde{D})}(Mor_{\mathfrak{C}}(i^{op}, \mathcal{G}\tilde{D})(\tilde{f})) \\
 &\stackrel{2.3}{=} \tau_{(C, \tilde{D})}(\tilde{f} \circ i) \\
 &\stackrel{3.1}{=} \tau_{(C, \tilde{D})}(\mathcal{G}j \circ f) \\
 &\stackrel{2.4}{=} \tau_{(C, \tilde{D})}(Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}j)(f)) \\
 &\stackrel{(I)}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, j)(\tau_{(C, D)}(f)) \\
 &\stackrel{2.5}{=} j \circ \tau_{(C, D)}(f)
 \end{aligned}$$

por tanto conseguimos 3.2, es decir \mathcal{J} está bien definido en flechas.

Es fácil ver que \mathcal{J} es un isomorfismo pues la flecha $\tau_{(C,D)}$ es isomorfismo.

[\implies] Primero veamos que gracias al diagrama conmutativo se tiene que $\pi_{12}(\mathcal{J}(C, D, f)) = \pi_{12}(C, D, f) = (C, D)$, es decir existe un único $g : \mathcal{F}C \longrightarrow D$ tal que para cada $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$, $f : C \longrightarrow \mathcal{G}D$ se tiene que

$$\mathcal{J}(C, D, f) = (C, D, g).$$

En efecto: sean $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$, $f : C \longrightarrow \mathcal{G}D$ y $(C, D, f) \in (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$, entonces existe un único $(A, B, g) \in (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}})$ tal que

$$\mathcal{J}^{-1}(A, B, g) = (C, D, f)$$

Tenemos $(\pi_{12} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^{-1})(A, B, g) = \pi_{12}(A, B, g) = (A, B)$, por otro lado, $(\pi_{12} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^{-1})(A, B, g) = (\pi_{12} \circ \mathcal{J})(C, D, f) = \pi_{12}(C, D, f) = (C, D)$, luego $A = C$ y $B = D$. Por tanto existe un único $g : \mathcal{F}C \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{J}(C, D, f) = (C, D, g)$.

Probaremos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto, es decir $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es isomorfismo natural. Primero veamos que τ es isomorfismo y luego una transformación natural. En efecto, para cualesquiera $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$, definimos

$$\tau_{(C,D)}(f) := \pi_3(\mathcal{J}(C, D, f)) \tag{3.3}$$

$$\zeta_{(C,D)}(g) := \pi_3(\mathcal{J}^{-1}(C, D, g)) \tag{3.4}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\tau_{(C,D)}(\zeta_{(C,D)}(g)) &\stackrel{3.4}{=} \tau_{(C,D)}(\pi_3(\mathcal{J}^{-1}(C, D, g))) \\
&\stackrel{3.3}{=} \pi_3(\mathcal{J}(C, D, \pi_3(\mathcal{J}^{-1}(C, D, g)))) \\
&= \pi_3(\mathcal{J}(\mathcal{J}^{-1}(C, D, g))) \\
&= \pi_3(C, D, g) \\
&= g
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\zeta_{(C,D)}(\tau_{(C,D)}(f)) &\stackrel{3.3}{=} \zeta_{(C,D)}(\pi_3(\mathcal{J}(C, D, f))) \\
&\stackrel{3.4}{=} \pi_3(\mathcal{J}^{-1}(C, D, \pi_3(\mathcal{J}(C, D, f)))) \\
&= \pi_3(\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(C, D, f))) \\
&= \pi_3(C, D, f) \\
&= f
\end{aligned}$$

Por tanto $\tau_{(-,-)}$ es isomorfismo.

Ahora veamos que $\tau_{(-,-)}$ es transformación natural. Por teorema 2.2.1, $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es transformación natural si y solo si $\tau_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$ y $\tau_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$ son transformaciones naturales, para cualesquiera $C \in \mathfrak{C}$ y $D \in \mathfrak{D}$.

Afirmación 1: $\tau_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$ es transformación natural, es decir para cada $f : D \rightarrow \widetilde{D}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
D & & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(C,D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \\
\downarrow f & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f) \\
\widetilde{D} & & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}\widetilde{D}) & \xrightarrow{\tau_{(C,\widetilde{D})}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \widetilde{D})
\end{array}$$

En efecto, para cada $f : D \rightarrow \widetilde{D}$ y para cada $q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D)$ queremos mostrar

$$\left(\tau_{(C,\widetilde{D})} \circ Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f) \right)(q) = \left(Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f) \circ \tau_{(C,D)} \right)(q)$$

si y solo si

$$\tau_{(C,\widetilde{D})}(\mathcal{G}f \circ q) = f \circ \tau_{(C,D)}(q).$$

Para esto, observemos que la flecha $(1_C, f) : (C, D, q) \rightarrow (C, \widetilde{D}, \mathcal{G}f \circ q)$ está en $(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ pues el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{1_C} & C \\
\downarrow q & & \downarrow \mathcal{G}f \circ q \\
\mathcal{G}D & \xrightarrow{\mathcal{G}f} & \mathcal{G}\widetilde{D}
\end{array}$$

Ahora, por definición de \mathcal{J} , tenemos

$$\mathcal{J}(1_C, f) := (1_C, f) : (C, D, \tau_{(C,D)}(q)) \rightarrow (C, \widetilde{D}, \tau_{(C,\widetilde{D})}(\mathcal{G}f \circ q))$$

es decir el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}C & \xrightarrow{1_{\mathcal{F}C}} & \mathcal{F}C \\
\downarrow \tau_{(C,D)}(q) & & \downarrow \tau_{(C,\tilde{D})}(\mathcal{F}f \circ q) \\
D & \xrightarrow{f} & \tilde{D}
\end{array}$$

Por tanto $\tau_{(C,-)}$ es transformación natural.

Afirmación 2: $\tau_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{E}}(-, \mathcal{G}D) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$ es transformación natural, es decir para cada $g^{op} : C \rightarrow \tilde{C}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
C & & p \in Mor_{\mathfrak{E}}(C, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(C,D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \\
\downarrow g^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{E}}(g^{op}, \mathcal{G}D) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}g^{op}, D) \\
\tilde{C} & & Mor_{\mathfrak{E}}(\tilde{C}, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(\tilde{C},D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}\tilde{C}, D)
\end{array}$$

En efecto, para cada $g^{op} : C \rightarrow \tilde{C}$ y para cada $p \in Mor_{\mathfrak{E}}(C, \mathcal{G}D)$ queremos mostrar

$$(\tau_{(\tilde{C},D)} \circ Mor_{\mathfrak{E}}(g^{op}, \mathcal{G}D))(p) = (Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}g^{op}, D) \circ \tau_{(C,D)})(p)$$

si y solo si

$$\tau_{(\tilde{C},D)}(p \circ g) = \tau_{(C,D)}(p) \circ \mathcal{F}g.$$

Para obtener la última igualdad de arriba, observemos que la flecha $(g, 1_D) : (\tilde{C}, D, p \circ g) \longrightarrow (C, D, p)$ está en $(1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G})$ pues el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{C} & \xrightarrow{g} & C \\
 \downarrow p \circ g & & \downarrow p \\
 \mathcal{G}D & \xrightarrow{1_{\mathcal{G}D}} & \mathcal{G}D
 \end{array}$$

Ahora por definición de \mathcal{J} , tenemos

$$\mathcal{J}(g, 1_D) := (g, 1_D) : (\tilde{C}, D, \tau_{(\tilde{C}, D)}(p \circ g)) \longrightarrow (C, D, \tau_{(C, D)}(p))$$

es decir el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}\tilde{C} & \xrightarrow{\mathcal{F}g} & \mathcal{F}C \\
 \downarrow \tau_{(\tilde{C}, D)}(p \circ g) & & \downarrow \tau_{(C, D)}(p) \\
 D & \xrightarrow{1_D} & D
 \end{array}$$

Por tanto $\tau_{(-, D)}$ es transformación natural. ■

3.2 Resultado 2

Sean $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores. El par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto si y solo si $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es par adjunto.

Prueba. [\Leftarrow] Sabemos que el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto si $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es isomorfismo natural.

Afirmación 1: $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$ es isomorfismo natural para cualesquiera $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$. En efecto, dado un $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$, definimos

$$\tau_{(C,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D)$$

tal que

$$\tau_{(C,D)}(f) := [\eta_{(D,C)}^{-1}(f^{op})]^{op} \quad (\spadesuit)$$

para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$, donde

$$\eta_{(D,C)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C) \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C)$$

es isomorfismo. Ahora veamos como se origina $\eta_{(D,C)}^{-1}$: dado que $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es par adjunto entonces

$$\eta_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}-) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, -)$$

es isomorfismo natural, luego tiene inversa, la cual será denotada por $\eta_{(-,-)}^{-1}$ y dado que $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$, se consigue $\eta_{(D,C)}^{-1}$. Es fácil ver que $\tau_{(-,-)}$ es isomorfismo, pues $\tau_{(C,D)}$ tiene inversa definida abajo

$$\tau_{(C,D)}^{-1}(g) := [\eta_{(D,C)} \circ g^{op}]^{op}.$$

Afirmación 2: $\tau_{(-,-)}$ es transformación natural. En efecto: Sabemos que $\tau_{(-,-)}$ es transformación natural si y solo si $\tau_{(C,-)}$ y $\tau_{(-,D)}$ son transformaciones naturales para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$.

★ Veamos que $\tau_{(C,-)}$ es transformación natural, para eso consideremos $f : D \rightarrow \widetilde{D}$ en \mathfrak{D} y tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
D & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(C,D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \\
\downarrow f & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f) \\
\widetilde{D} & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}\widetilde{D}) & \xrightarrow{\tau_{(C,\widetilde{D})}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \widetilde{D})
\end{array}$$

es decir

$$\tau_{(C,\widetilde{D})}(Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q)) = Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(\tau_{(C,D)}(q)).$$

Para obtener dicha conmutatividad, consideremos

$$\eta_{(-,C)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, C) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}C)$$

y dado que $f : D \longrightarrow \widetilde{D}$ está en \mathfrak{D} el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
D & q^{op} \in Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C) & \xrightarrow{\eta_{(D,C)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C) \\
\downarrow f & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C) \\
\widetilde{D} & Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}\widetilde{D}, C) & \xrightarrow{\eta_{(\widetilde{D},C)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(\widetilde{D}, \mathcal{F}^{op}C)
\end{array}$$

es decir

$$\eta_{(\widetilde{D},C)}^{-1}(Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C)(q^{op})) = Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C)(\eta_{(D,C)}^{-1}(q^{op})) \quad (\clubsuit)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\tau_{(C, \tilde{D})}(Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q)) &\stackrel{2.4}{=} \tau_{(C, \tilde{D})}(\mathcal{G}f \circ q) \\
&\stackrel{(\spadesuit)}{=} [\eta_{(\tilde{D}, C)}^{-1}(\mathcal{G}f \circ q)^{op}]^{op} \\
&= [\eta_{(\tilde{D}, C)}^{-1}(q^{op} \circ (\mathcal{G}f)^{op})]^{op} \\
&\stackrel{2.10}{=} [\eta_{(\tilde{D}, C)}^{-1}(Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C)(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{(\clubsuit)}{=} [Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C)(\eta_{(\tilde{D}, C)}^{-1}(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{2.9}{=} [\eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op}) \circ f^{op}]^{op} \\
&= f \circ [\eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op})]^{op} \\
&\stackrel{(\spadesuit)}{=} f \circ \tau_{(C, D)}(q) \\
&\stackrel{2.5}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(\tau_{(C, D)}(q))
\end{aligned}$$

★ Veamos que $\tau_{(-, D)}$ es transformación natural, para eso consideremos $f^{op} : C \rightarrow \tilde{C}$ en \mathfrak{C}^{op} y tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
C & & q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(C, D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \\
\downarrow f^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D) \\
\tilde{C} & & Mor_{\mathfrak{C}}(\tilde{C}, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{\tau_{(\tilde{C}, D)}} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}\tilde{C}, D)
\end{array}$$

es decir

$$\tau_{(\tilde{C}, D)}(Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q)) = Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(\tau_{(C, D)}(q)).$$

Para obtener dicha conmutatividad, consideremos

$$\eta_{(D,-)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, -) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}-)$$

y dado que $f^{op} : C \longrightarrow \tilde{C}$ está en \mathfrak{C}^{op} , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 C & & q^{op} \in Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C) & \xrightarrow{\eta_{(D,C)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C) \\
 \downarrow f^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f^{op}) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op}) \\
 \tilde{C} & & Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, \tilde{C}) & \xrightarrow{\eta_{(D,\tilde{C})}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}\tilde{C})
 \end{array}$$

es decir

$$\eta_{(D,\tilde{C})}^{-1}(Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f^{op})(q^{op})) = Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op})(\eta_{(D,C)}^{-1}(q^{op}))$$

(♣♣♣)

Tenemos

$$\begin{aligned}
\tau_{(\tilde{C}, D)}(Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q)) &\stackrel{2.3}{=} \tau_{(\tilde{C}, D)}(q \circ f^{op}) \\
&\stackrel{(\spadesuit)}{=} [\eta_{(D, \tilde{C})}^{-1}(q \circ f^{op})^{op}]^{op} \\
&= [\eta_{(D, \tilde{C})}^{-1}(f \circ q^{op})]^{op} \\
&\stackrel{2.8}{=} [\eta_{(D, \tilde{C})}^{-1}(Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f)(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{(\clubsuit\clubsuit)}{=} [Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op})(\eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{2.7}{=} [\mathcal{F}^{op}f^{op} \circ \eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op})]^{op} \\
&= [\eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op})]^{op} \circ (\mathcal{F}^{op}f^{op})^{op} \\
&= [\eta_{(D, C)}^{-1}(q^{op})]^{op} \circ \mathcal{F}f \\
&\stackrel{(\spadesuit)}{=} \tau_{(C, D)}(q) \circ \mathcal{F}f \\
&\stackrel{2.6}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(\tau_{(C, D)}(q))
\end{aligned}$$

[\implies] Sabemos que el par $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es par adjunto si

$$\eta_{(-, -)} : Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(-, \mathcal{F}^{op}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}-, -)$$

es isomorfismo natural.

Afirmación 1: $\eta_{(-, -)}$ es isomorfismo natural para cualesquiera $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$. En efecto, dado un $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$, definimos

$$\eta_{(D, C)} : Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C)$$

tal que

$$\eta_{(D, C)}(f) := [\tau_{(C, D)}^{-1}(f^{op})]^{op} \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

donde

$$\tau_{(C,D)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D)$$

es isomorfismo. Ahora veamos como se origina $\tau_{(C,D)}^{-1}$: dado que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es par adjunto, entonces

$$\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$$

es isomorfismo natural, luego tiene inversa, la cual será denotada por $\tau_{(-,-)}^{-1}$ y dado que $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$, se consigue $\tau_{(C,D)}^{-1}$. Es fácil ver que $\eta_{(-,-)}$ es isomorfismo, pues $\eta_{(D,C)}$ tiene inversa definida abajo

$$\eta_{(D,C)}^{-1}(g) := [\tau_{(C,D)}(g^{op})]^{op}.$$

Afirmación 2: $\eta_{(-,-)}$ es transformación natural. En efecto: Sabemos que $\eta_{(-,-)}$ es transformación natural si y solo si $\eta_{(C,-)}$ y $\eta_{(-,D)}$ son transformaciones naturales para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ y $D \in \mathfrak{D}$.

★ Veamos que $\eta_{(C,-)}$ es transformación natural, para eso consideremos $f : D \longrightarrow \widetilde{D}$ en \mathfrak{D} y tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

es decir

$$\eta_{(\widetilde{D},C)}(Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C)(q)) = Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C)(\eta_{(D,C)}(q)).$$

Para obtener dicha conmutatividad, consideremos

$$\tau_{(C,-)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-)$$

y dado que $f : D \longrightarrow \widetilde{D}$ está en \mathfrak{D} el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
D & q^{op} \in Mor_{\mathfrak{E}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C) & \xrightarrow{\eta_{(D,C)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C) \\
\downarrow f & \downarrow Mor_{\mathfrak{E}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C) \\
\widetilde{D} & Mor_{\mathfrak{E}^{op}}(\mathcal{G}^{op}\widetilde{D}, C) & \xrightarrow{\eta_{(\widetilde{D},C)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(\widetilde{D}, \mathcal{F}^{op}C)
\end{array}$$

es decir

$$\tau_{(C,\widetilde{D})}^{-1}(Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q^{op})) = Mor_{\mathfrak{E}}(C, \mathcal{G}f)(\tau_{(C,D)}^{-1}(q^{op})) \quad (\blacklozenge)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\eta_{(\widetilde{D},C)}(Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(f, \mathcal{F}^{op}C)(q)) &\stackrel{2.9}{=} \eta_{(\widetilde{D},C)}(q \circ f^{op}) \\
&\stackrel{(\blackspadesuit)}{=} [\tau_{(C,\widetilde{D})}^{-1}(q \circ f^{op})^{op}]^{op} \\
&= [\tau_{(C,\widetilde{D})}^{-1}(f \circ q^{op})]^{op} \\
&\stackrel{2.5}{=} [\tau_{(C,\widetilde{D})}^{-1}(Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{(\blacklozenge)}{=} [Mor_{\mathfrak{E}}(C, \mathcal{G}f)(\tau_{(C,D)}^{-1}(q^{op}))]^{op} \\
&\stackrel{2.4}{=} [\mathcal{G}f \circ \tau_{(C,D)}^{-1}(q^{op})]^{op} \\
&= [\tau_{(C,D)}^{-1}(q^{op})]^{op} \circ (\mathcal{G}f)^{op} \\
&\stackrel{(\blackspadesuit)}{=} \eta_{(D,C)}(q) \circ \mathcal{G}^{op}f^{op} \\
&\stackrel{2.10}{=} Mor_{\mathfrak{E}^{op}}(\mathcal{G}^{op}f, C)(\eta_{(D,C)}(q))
\end{aligned}$$

★ Veamos que $\eta_{(D,-)}$ es transformación natural, para eso consideremos $f^{op} : C \rightarrow \tilde{C}$ en \mathfrak{C}^{op} y tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
C & & q \in Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}C) & \xrightarrow{\eta_{(D,C)}} & Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, C) \\
\downarrow f^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op}) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f^{op}) \\
\tilde{C} & & Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}\tilde{C}) & \xrightarrow{\eta_{(D,\tilde{C})}} & Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, \tilde{C})
\end{array}$$

es decir

$$\eta_{(D,\tilde{C})}(Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op})(q)) = Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f^{op})(\eta_{(D,C)}(q)).$$

Para obtener dicha conmutatividad, consideremos

$$\tau_{(-,D)}^{-1} : Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D)$$

y dado que $f^{op} : C \rightarrow \tilde{C}$ está en \mathfrak{C}^{op} , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
C & & q^{op} \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) & \xrightarrow{\tau_{(C,D)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \\
\downarrow f^{op} & & \downarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D) & & \downarrow Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D) \\
\tilde{C} & & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}\tilde{C}, D) & \xrightarrow{\tau_{(\tilde{C},D)}^{-1}} & Mor_{\mathfrak{C}}(\tilde{C}, \mathcal{G}D)
\end{array}$$

es decir

$$\tau_{(\tilde{C}, D)}^{-1}(Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q^{op})) = Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(\tau_{(C, D)}^{-1}(q^{op})) \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \eta_{(D, \tilde{C})}(Mor_{\mathfrak{D}^{op}}(D, \mathcal{F}^{op}f^{op})(q)) &\stackrel{2.7}{=} \eta_{(D, \tilde{C})}(\mathcal{F}^{op}f^{op} \circ q) \\ &\stackrel{(\spadesuit\spadesuit)}{=} [\tau_{(\tilde{C}, D)}^{-1}(\mathcal{F}^{op}f^{op} \circ q)^{op}]^{op} \\ &= [\tau_{(\tilde{C}, D)}^{-1}(q^{op} \circ \mathcal{F}f)]^{op} \\ &\stackrel{2.6}{=} [\tau_{(\tilde{C}, D)}^{-1}(Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q^{op}))]^{op} \\ &\stackrel{(\spadesuit\spadesuit)}{=} [Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(\tau_{(C, D)}^{-1}(q^{op}))]^{op} \\ &\stackrel{2.3}{=} [\tau_{(C, D)}^{-1}(q^{op}) \circ f]^{op} \\ &= f^{op} \circ [\tau_{(C, D)}^{-1}(q^{op})]^{op} \\ &\stackrel{(\spadesuit\spadesuit)}{=} f^{op} \circ \eta_{(D, C)}(q) \\ &\stackrel{2.8}{=} Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(\mathcal{G}^{op}D, f^{op})(\eta_{(D, C)}(q)) \end{aligned}$$

■

3.3 Aplicaciones

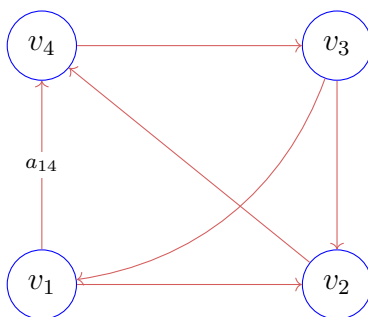
Las siguientes aplicaciones han sido escritas de manera detallada y pueden verse en [1, 2, 3, 4, 12].

3.3.1 Aplicaciones en la teoría de grafos

Definición 3.3.1. Un **digrafo** o también llamado orientado es un cuarteto $G = (V_G, A_G, i_G, f_G)$ donde V_G es el conjunto de vértices del grafo

G , A_G el conjunto de aristas del grafo G , la función $\mathbf{i}_G : A \rightarrow V$ asigna a cada arista su vértice inicial y la función $\mathbf{f}_G : A \rightarrow V$ asigna a cada arista su vértice final. Podemos denotar a las aristas por $a_{ij} : v_i \rightarrow v_j$ donde $\mathbf{i}(a_{ij}) = v_i$ y $\mathbf{f}(a_{ij}) = v_j$.

Ejemplo 3.3.1. Si consideramos el digrafo G de abajo



vemos que $\mathbf{i}_G(a_{14}) = v_1$ y $\mathbf{f}_G(a_{14}) = v_4$.

Definición 3.3.2. Sean $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G)$, $H = (V_H, A_H, \mathbf{i}_H, \mathbf{f}_H)$ digrafos. Un **homomorfismo de digrafos** $\mathcal{F} : G \rightarrow H$ es un par de operaciones $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_V, \mathcal{F}_A)$ tales que

1. $\mathcal{F}_V : V_G \rightarrow V_H$ asocia a cada vértice $v_i \in V_G$ un vértice $\mathcal{F}_V(v_i) \in V_H$.
2. $\mathcal{F}_A : A_G \rightarrow A_H$ asocia a cada arista $a_{ij} : v_i \rightarrow v_j$ en A_G una arista $\mathcal{F}_A(a_{ij}) : \mathcal{F}_V(v_i) \rightarrow \mathcal{F}_V(v_j)$ en A_H .
3. $\mathbf{i}_H \circ \mathcal{F}_A = \mathcal{F}_V \circ \mathbf{i}_G$ y $\mathbf{f}_H \circ \mathcal{F}_A = \mathcal{F}_V \circ \mathbf{f}_G$.

Ejemplo 3.3.2. Sean $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G)$, $H = (V_H, A_H, \mathbf{i}_H, \mathbf{f}_H)$ digrafos, donde $V_G = \{v_1, v_2, v_3\}$, $A_G = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3)\}$, $V_H = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $A_H = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_3)\}$. Vamos a definir el homomorfismo $\mathcal{F} : G \rightarrow H$ de la siguiente manera: $\mathcal{F}_V(v_1) = w_1$, $\mathcal{F}_V(v_2) = w_2$, $\mathcal{F}_V(v_3) = w_3$, $\mathcal{F}_A(v_1, v_2) = (w_1, w_2)$, $\mathcal{F}_A(v_2, v_3) = (w_2, w_3)$ y $\mathcal{F}_A(v_1, v_3) = (w_1, w_3)$, Así definido \mathcal{F} es homomorfismo.

Definición 3.3.3. Sean $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G)$, $H = (V_H, A_H, \mathbf{i}_H, \mathbf{f}_H)$, $L = (V_L, A_L, \mathbf{i}_L, \mathbf{f}_L)$ digrafos y los homomorfismos de digrafos $\mathcal{F} : G \rightarrow H$, $\mathcal{G} : H \rightarrow L$. La **composición de homomorfismos de digrafos** $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : G \rightarrow L$ es dada por $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = (\mathcal{G}_V \circ \mathcal{F}_V, \mathcal{G}_A \circ \mathcal{F}_A)$. Es fácil ver que la composición de homomorfismos de digrafos es un homomorfismo de digrafos.

Definición 3.3.4. La categoría de los digrafos será denotada por **DiGraph**, los objetos son los digrafos y las flechas son los homomorfismos de digrafos. La operación de composición es la operación de composición de homomorfismos de digrafos.

Si $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G)$ es un objeto de **DiGraph**, el morfismo identidad $1_G : G \rightarrow G$ es el homomorfismo de digrafos $1_G = ((1_G)_V, (1_G)_A)$ donde,

1. $(1_G)_V : V_G \rightarrow V_G$ es tal que $(1_G)_V(v) = v$, para cada $v \in V_G$.
2. $(1_G)_A : A_G \rightarrow A_G$ es tal que $(1_G)_A(a) = a$, para cada $a : v \rightarrow u \in A_G$.

Ahora definiremos los funtores \mathcal{F} y \mathcal{G} .

Definimos $\mathcal{F} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{DiGraph}$ como sigue:

En objetos: para cada objeto $\mathfrak{C} \in \mathbf{Cat}$, tenemos que $\mathcal{F}(\mathfrak{C}) := G_{\mathfrak{C}} = (Ob(\mathfrak{C}), Mor_{\mathfrak{C}}, Dom_{\mathfrak{C}}, Cod_{\mathfrak{C}}) \in \mathbf{DiGraph}$.

En flechas: para cada flecha $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D} \in \mathbf{Cat}$, tenemos que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) : G_{\mathfrak{C}} \rightarrow G_{\mathfrak{D}}$ es una flecha en **DiGraph**.

Afirmación: $\mathcal{F}(\mathcal{H}) : G_{\mathfrak{C}} \rightarrow G_{\mathfrak{D}}$ es un homomorfismo de grafos, donde $G_{\mathfrak{C}} = (Ob(\mathfrak{C}), Mor_{\mathfrak{C}}, Dom_{\mathfrak{C}}, Cod_{\mathfrak{C}})$, $G_{\mathfrak{D}} = (Ob(\mathfrak{D}), Mor_{\mathfrak{D}}, Dom_{\mathfrak{D}}, Cod_{\mathfrak{D}})$, $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = (\mathcal{F}(\mathcal{H})_{Ob}, \mathcal{F}(\mathcal{H})_{Mor})$, $\mathcal{F}(\mathcal{H})_{Ob} : Ob(\mathfrak{C}) \rightarrow Ob(\mathfrak{D})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{H})_{Mor} : Mor_{\mathfrak{C}} \rightarrow Mor_{\mathfrak{D}}$ tales que $\mathcal{F}(\mathcal{H})_{Ob}(C) = \mathcal{H}C$, $\mathcal{F}(\mathcal{H})_{Mor}(f) = \mathcal{H}f$. En efecto, sea $f : C \rightarrow \tilde{C}$ una flecha en \mathfrak{C} , luego $Dom_{\mathfrak{D}} \circ \mathcal{F}(\mathcal{H})_{Mor}(f) = Dom_{\mathfrak{D}}(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{H}C = \mathcal{F}(\mathcal{H})_{Ob} \circ Dom_{\mathfrak{C}}(f)$ y también $Cod_{\mathfrak{D}} \circ \mathcal{F}(\mathcal{H})_{Mor}(f) = Cod_{\mathfrak{D}}(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{H}C = \mathcal{F}(\mathcal{H})_{Ob} \circ Cod_{\mathfrak{C}}(f)$

Definimos $\mathcal{G} : \mathbf{DiGraph} \rightarrow \mathbf{Cat}$ como sigue: **En objetos:** para cada objeto $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G) \in \mathbf{DiGraph}$ tenemos que $\mathcal{G}(G) := \mathfrak{C}_G \in \mathbf{Cat}$. La categoría obtenida tiene por objetos a los vértices de G y sus flechas son las aristas entre los vértices de G . **En flechas:** para cada flecha $\mathcal{F} : G \rightarrow H$ en $\mathbf{DiGraph}$ tenemos la flecha $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{C}_G \rightarrow \mathfrak{C}_H$ en \mathbf{Cat} que es un funtor. Por ejemplo, si $G = (V_G, A_G, \mathbf{i}_G, \mathbf{f}_G)$, $H = (V_H, A_H, \mathbf{i}_H, \mathbf{f}_H)$ digrafos, donde $V_G = \{v_1, v_2, v_3\}$, $A_G = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3)\}$, $V_H = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $A_H = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_3)\}$. Vamos a definir el homomorfismo $\mathcal{F} : G \rightarrow H$ de la siguiente manera: $\mathcal{F}_V(v_1) = w_1$, $\mathcal{F}_V(v_2) = w_2$, $\mathcal{F}_V(v_3) = w_3$, $\mathcal{F}_A(v_1, v_2) = (w_1, w_2)$, $\mathcal{F}_A(v_2, v_3) = (w_2, w_3)$ y $\mathcal{F}_A(v_1, v_3) = (w_1, w_3)$. Los objetos de la categoría \mathfrak{C}_G son v_1, v_2 y v_3 , además las flechas de dicha categoría son $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, v_1 \rightarrow v_3, 1_{v_1}, 1_{v_2}, 1_{v_3}$ y una composición $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$. El funtor $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{C}_G \rightarrow \mathfrak{C}_H$ en \mathbf{Cat} envía objetos en objetos y flechas en flechas como sigue:

$$\mathcal{C}_G \xrightarrow{g_{\mathcal{F}}} \mathcal{C}_H$$

$$v_1 \longrightarrow w_1$$

$$v_2 \longrightarrow w_2$$

$$v_3 \longrightarrow w_3$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto (w_1, w_2)$$

$$(v_2, v_3) \longmapsto (w_2, w_3)$$

$$(v_1, v_3) \longmapsto (w_1, w_3)$$

3.3.2 Aplicaciones a la teoría de exponentes con conjuntos

Recordemos que en teoría de exponentes tenemos algunas propiedades, como por ejemplo: $X^{Y \times Z} = (X^Y)^Z$, donde X, Y, Z son números. ¿Pero que pasaría si X, Y, Z son conjuntos? Antes de responder la pregunta anterior, vamos a fijar algunas notaciones. Al conjunto de funciones de que van de X a Y , lo denotaremos por $Y^X := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ función}\}$ y recordemos $Mor_{\text{Set}}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ función}\}$, luego

$$Y^X = Mor_{\text{Set}}(X, Y).$$

Dado $X \in \mathbf{Set}$ fijo, definimos el funtor $\mathcal{F}_X : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ tal que $\mathcal{F}_X Y := X \times Y$. También vamos a definir el funtor $\mathcal{G}_X : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

En objetos: Para cada $Y \in \mathbf{Set}$ se tiene $\mathcal{G}_X Y := Y^X$.

En flechas: Para cada flecha $f : Y \rightarrow Z$ en \mathbf{Set} se tiene que la flecha $Y^X = \{g : X \rightarrow Y \mid g \text{ función}\} \xrightarrow{\mathcal{G}_X f} Z^X = \{g : X \rightarrow Z \mid g \text{ función}\}$

$$q \longmapsto \mathcal{G}_X f(q) := f \circ q$$

Si conseguimos que $(\mathcal{F}_X, \mathcal{G}_X)$ sea un par adjunto, es decir

$$\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}_X -, -) \stackrel{\tau_{(-,-)}}{\cong} \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(-, \mathcal{G}_X -)$$

entonces para cada $Y, Z \in \mathbf{Set}$ se tiene

$$\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}_X Y, Z) \stackrel{\tau_{(Y,Z)}}{\cong} \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(Y, \mathcal{G}_X Z)$$

luego

$$Z^{X \times Y} = \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}_X Y, Z) \stackrel{\tau_{(Y,Z)}}{\cong} \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(Y, \mathcal{G}_X Z) = (Z^X)^Y$$

por tanto

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$$

Respondiendo la pregunta anterior, podemos concluir que si X, Y, Z son conjuntos, obtenemos un isomorfismo, como el de arriba.

Capítulo 4

Conclusiones y sugerencias

4.1 Conclusiones

En esta tesis se establecen dos caracterizaciones equivalentes del concepto de adjunción. En particular, se concluye que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. El par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par adjunto.
2. El par $(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ es un par adjunto.
3. Existe un isomorfismo de categorías

$$\mathcal{J} : (1_{\mathcal{C}} \downarrow \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathcal{D}})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (1_{\mathfrak{C}} \downarrow \mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{J}} & (\mathcal{F} \downarrow 1_{\mathfrak{D}}) \\
 & \searrow \pi_{12} & \swarrow \pi_{12} \\
 & \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} &
 \end{array}$$

4. Para todo $C \in \mathfrak{C}$ y $D \in \mathfrak{D}$, las transformaciones naturales

$$\tau_{(C,-)} : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\tau_{(-,D)} : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son isomorfismos naturales.

Estos resultados muestran que el concepto de adjunción puede comprenderse desde distintas perspectivas estructurales dentro de la teoría de categorías, lo que refuerza su papel central como herramienta unificadora en diversas áreas de las matemáticas.

4.2 Sugerencias

1. Se sugiere demostrar los resultados 1 y 2 en el caso de funtores contravariantes.
2. Se sugiere analizar si es posible obtener otras propiedades de la teoría de exponentes para conjuntos.

3. Se sugiere estudiar si el resultado 1 se cumple para categorías cociente.

Bibliografía

- [1] Awodey S. Category Theory, Lecture Notes. Departments of Philosophy and Mathematics, Carnegie Mellon University. 2010.
- [2] Leinster T. Basic Category Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 143, Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-04424-1, 2014.
- [3] MacLane S. Categories for the working mathematician. Second Ed, Department of Mathematics, University of Chicago. Springer - Verlag, 1998.
- [4] Riehl E. Category Theory in Context. Department of Mathematics, Johns Hopkins University, 2016.
- [5] Mejía Alemán C, Cortez Gutierrez M, Taípe Huamaní E. characterization of the natural isomorphism of bifunctors. Revista Selecciones Matemáticas, Vol. 10 No. 02 (2023): August - December. DOI: <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.15>.
- [6] Mejía Alemán C, Núñez Rodríguez I, Pino Romero N. A Demonstration of the Cayley Theorem for Groups. Revista Selecciones Matematicas. Vol. 8 No. 01 (2021): January-July. DOI: <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2021.01.09>.

- [7] Fernando dos Reis Naves, Orientador: John William MacQuarrie, “Adjunções entre Categorias de Álgebras e Extensões de Quociente Bifinito”. Tesis de doctorado. UFMG-ICEX. 2022.
- [8] Giovanni de Felice, Alexis Toumi, Bob Coecke. DisCoPy: Monoidal Categories in Python. Department of Computer Science, University of Oxford. Cambridge Quantum Computing Ltd. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.02975>
- [9] Mihai Drăgănescu, Categories and functors for the structural-phenomenological modeling. From Proceedings of the Romanian Academy, Series A, Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Science, Vol.1, No.2, 2000.
- [10] D.M. Kan, Adjoint functors, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 87, núm. 2, 1958, 294–329, DOI:<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1958-0131451-0>.
- [11] K. Garcia, F. Marmolejo, El irrazonable poder definatorio de las adjunciones. Miscelanea Matemática 77 (2023) 79-86, DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7705>.
- [12] Jan Foniok, Claude Tardif, Adjoint functors in graph theory. Mth.CO 2013, DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.2215>.
- [13] Chen, Hongxing, Applications of hyperhomology to adjoint functors, 2022, DOI:<https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1949019>.
- [14] Bruno Stonek, Orientador: Walter Ferrer Santos, Functores adjuntos y teoremas de adjunción. Universidad de la República Facultad de Ciencias 2012. Link: <https://bruno.stonek.com/monografia.pdf>