

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Perturbación de un modelo de control biológico de la
malaria considerando competencia de especies**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática**

Autor:

Mg. Tamariz Milla, Marco Antonio
Código ORCID: 0000-0001-7316-9016

Asesora:

Dra. López Cruz, Roxana
Código ORCID: 0000-0002-7703-5784
DNI N° 10798114

Línea de Investigación
**Modelado matemático de fenómenos naturales, sociales
y de procesos industriales**

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE LA TESIS

Yo, Dra. Roxana López Cruz, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis de doctorado titulada: "Perturbación de un modelo de control biológico de la malaria considerando competencia de especies", elaborado por el doctorando Marco Antonio Tamariz Milla, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, setiembre de 2025

Dra. Roxana López Cruz

ASESORA

CODIGO ORCID 0000-0001-7316-9016

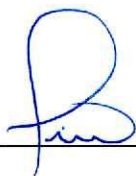
DNI N° 10798114

AVAL DEL JURADO EVALUADOR

**“Perturbación de un modelo de control biológico de la malaria
considerando competencia de especies”**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:



Dr. Morales Marchena, Herón Juan
Presidente

Código ORCID: 0000-0002-5394-0958
DNI: N° 32837715



Dr. Cedrón León, Ernesto Antonio
Secretario

Código ORCID: 0000-0002-3198-831X
DNI: N° 32966495



Dr. Moore Flores Teodoro
Vocal

Código ORCID: 0000-0002-1755-3459
DNI: N° 32763522



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los doce días del mes de setiembre del año 2025, siendo las 12:00 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 557-2025-EPG-UNS de fecha 09.06.2025, conformado por los docentes: Dr. Herón Juan Morales Marchena (Presidente), Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Secretario), Dra. Roxana López Cruz (Vocal) y Dr. Teodoro Moore Flores (Accesitario); con la finalidad de evaluar la tesis titulada: "***PERTURBACIÓN DE UN MODELO DE CONTROL BIOLÓGICO DE LA MALARIA CONSIDERANDO COMPETENCIA DE ESPECIES***"; presentado por el tesista **Mg. Marco Antonio Tamariz Milla**, egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Que, por ausencia de la Dra. Roxana López Cruz asume la función de vocal el Dr. Teodoro Moore Flores.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 797-2025-EPG-UNS de fecha 05 de setiembre de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de Diecinueve.

Siendo las 13:10 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Herón Juan Morales Marchena
Presidente

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Secretario

Dr. Teodoro Moore Flores
Vocal/Asesor

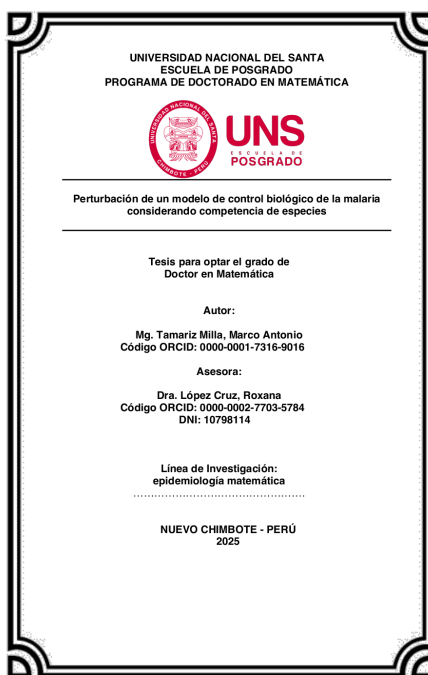


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Roxana Lopez Cruz
Título del ejercicio: Informe Parcial
Título de la entrega: Tesis
Nombre del archivo: Tesis_Marco_Tamariz.pdf
Tamaño del archivo: 4.76M
Total páginas: 123
Total de palabras: 24,825
Total de caracteres: 108,832
Fecha de entrega: 04-jun.-2025 05:30p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2692297566



Tesis

INFORME DE ORIGINALIDAD

15%

INDICE DE SIMILITUD

13%

FUENTES DE INTERNET

6%

PUBLICACIONES

4%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

hdl.handle.net

Fuente de Internet

3%

2

repositorio.uns.edu.pe

Fuente de Internet

1%

3

www.bdigital.unal.edu.co

Fuente de Internet

1%

4

W. D. POHLE. "DETERMINATION OF IRON IN FOODS AND FOOD PRODUCTS", Journal of Food Science, 5/1947

Publicación

1%

5

es.scribd.com

Fuente de Internet

1%

6

www.unsis.edu.mx

Fuente de Internet

<1%

7

tesis.ipn.mx

Fuente de Internet

<1%

8

idoc.pub

Fuente de Internet

<1%

DEDICATORIA

A la memoria de mis padres, Yolanda Milla C. y Alberto Tamariz S. por el infinito amor que me dieron y guían mi camino. Las gracias eternas.

AGRADECIMIENTOS

Un especial reconocimiento a mi asesora la Dra. Roxana López Cruz, por disposición permanente, su tiempo, paciencia, valiosas orientaciones y asesoramiento académico.

A la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional del Santa y a sus ilustres maestros, por la formación y enseñanza que me brindaron.

¡Gracias por todo!

ÍNDICE GENERAL

CERTIFICACIÓN DEL ASESOR.....	ii
AVAL DEL JURADO.....	iii
RESUMEN.....	viii
ABSTRACT.....	ix
I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1.1 Descripción y formulación del problema.....	1
1.1.2 Antecedentes de la investigación	5
1.1.3 Formulación del problema de investigación	7
1.1.4 Objetivos de la investigación	7
1.1.5 Justificación e importancia de la investigación	8
1.1.6 Limitaciones	8
II. MARCO TEÓRICO	9
2.1 Aspectos epidemiológicos de la malaria	9
2.1.1 El mosquito transmisor	9
2.1.2 El parásito	10
2.1.3 Ciclo vital	10
2.1.4 Control.....	11
2.2 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	12
2.3 Intervalo maximal de existencia de una EDO.....	13
2.4 Estabilidad local en sistemas de primer orden	14
2.5 Estabilidad mediante linealización.....	15
2.6 Funciones de Lyapunov y principio de invariancia de LaSalle	16
2.7 Comportamiento global asintótico en algunos sistemas de ecuaciones diferenciales cooperativos.....	19
2.8 Sistemas dinámicos	20
2.9 Cadena transitiva y atractividad	21
2.10 Numero básico de reproducción.....	22
2.11 Sistema de competencia entre especies.....	24
III. MARCO METODOLÓGICO	27
3.1 Hipótesis de investigación.....	27
3.1.1 Hipótesis general.....	27
3.1.2 Hipótesis específicas.....	27
3.2 Variables e indicadores de la investigación.....	27
3.2.1 Variable dependiente	27
3.2.2 Variables independientes	28

3.3 Métodos de la investigación	28
3.4 Diseño o esquema de la investigación	28
3.5 Población y muestra	28
3.6 Actividades del proceso investigativo	28
3.6.1 Fase inicial	28
3.6.2 Fase intermedia.....	28
3.6.3 Fase final.....	28
3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación	29
3.7.1 Procesamiento para la recolección de datos	29
3.7.2 Técnicas y procesamiento y análisis de datos	29
IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	30
4.1 Existencia y unicidad de soluciones del modelo.....	30
4.2 existencia del punto libre de infección	38
4.3 número reproductivo básico R_0	43
4.4 existencia del punto de equilibrio endémico	45
4.5 Estabilidad local	56
4.6 Estabilidad global del punto de equilibrio libre de infección	79
V. SIMULACIÓN NÚMÉRICA	96
5.1 Evolución de las poblaciones L, P, N_v y N_h para cuando $R_0 < 1$ y cuando $R_0 > 1$	96
5.2 Evolución de las poblaciones de infectados I_v e I_h variando m_v y/o m_h	101
5.3 Evolución de R_0 variando m_v y/o m_h	105
5.4 Evolución de R_0 y I_h del punto de equilibrio variando β	108
VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	110
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y VIRTUALES	112
VIII. ANEXOS: Códigos en Python.....	114

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 <i>Descripción de las variables del modelo</i>	3
Tabla 2 <i>Descripción de los parámetros del modelo</i>	4
Tabla 3 <i>Variables y parámetros en el modelo de Ross-MacDonald</i>	25
Tabla 4 <i>Valores de los parámetros para el punto libre de infección D</i>	96
Tabla 5 <i>Valores de los parámetros para el punto de equilibrio endémico E</i>	99

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 <i>Distribución de casos de malaria a nivel mundial en el 2017</i>	1
Figura 2 <i>Etapas de vida del mosquito Anopheles</i>	10
Figura 3 <i>Ciclo vital del parásito de la malaria</i>	11
Figura 4 <i>Punto de equilibrio localmente estable</i>	14
Figura 5 <i>Punto de equilibrio localmente asintóticamente estable</i>	15
Figura 6 <i>Soluciones y plano fase XY del sistema (2.5)</i>	18
Figura 7 <i>Grafica del polinomio p con $R_0 < 1$ tomando los valores de los parámetros de la tabla 4</i>	54
Figura 8 <i>Grafica del polinomio p con $R_0 \geq 1$ tomando los valores de los parámetros de la tabla 5</i>	55
Figura 9 <i>Gráfica de las poblaciones con el tiempo en días cuando $R_0 < 1$</i>	97
Figura 10 <i>Planos fase, punto de equilibrio libre de infección y campo de direcciones</i>	97
Figura 11 <i>Gráfica de las poblaciones con el tiempo en días cuando $R_0 > 1$</i>	100
Figura 12 <i>Planos fase, punto de equilibrio endémico y campo de direcciones</i>	100
Figura 13 <i>Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_v</i>	102
Figura 14 <i>Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_h</i>	103
Figura 15 <i>Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_v y m_h</i>	104
Figura 16 <i>Gráfica de R_0 variando los valores de m_h</i>	105
Figura 17 <i>Gráfica de R_0 variando los valores de m_v</i>	106
Figura 18 <i>Gráfica de R_0 variando los valores de m_h y m_v</i>	107
Figura 19 <i>Grafica de R_0 e I_h del punto de equilibrio variando los valores de β</i>	108

RESUMEN

En la investigación se analizan aspectos cualitativos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden no lineales, que modelan la dinámica de la malaria en una población, considerando un control biológico (peces larvívoros) de los vectores transmisores de la enfermedad (mosquitos hembra) y la competencia intraespecífica entre humanos y entre mosquitos.

Para el sistema planteado se encuentra un conjunto compacto atractor. Verificamos la existencia y unicidad de los puntos de equilibrio libre de infección D y endémico E ; además, analizamos la estabilidad asintótica local de los mismos, para lo cual se determina el umbral epidemiológico R_0 . Si $R_0 \leq 1$ el punto libre de infección D es localmente asintóticamente estable. Si $R_0 > 1$ el punto libre de infección D es inestable y el punto de equilibrio endémico E pasa a ser localmente asintóticamente estable. También, se demuestra que el punto libre de infección D tiene estabilidad global asintótica cuando $R_0 < 1$. Finalmente se muestra la dinámica del modelo a través de simulaciones en Python, presentando la gráfica de las poblaciones de humanos, mosquitos, peces larvívoros y larvas de mosquitos, planos fases con los flujos y la implicancia de las variaciones de los parámetros de competencia intraespecífica en la dinámica de la malaria.

Palabras clave: sistemas EDO, malaria, puntos de equilibrio, estabilidad local, estabilidad global, número reproductivo básico, competencia intraespecífica.

ABSTRACT

The research analyzes qualitative aspects of a system of first-order nonlinear ordinary differential equations (ODEs) that model the dynamics of malaria in a population, considering a biological control (larvivorous fish) of the disease-transmitting vectors (female mosquitoes) and intraspecific competition among humans and among mosquitoes.

For the proposed system, a compact attracting set is found. We verify the existence and uniqueness of the disease-free equilibrium point D and the endemic equilibrium point E . In addition, we analyze their local asymptotic stability, for which the epidemiological threshold R_0 is determined. If $R_0 \leq 1$, the disease-free equilibrium point D is locally asymptotically stable, and if $R_0 > 1$ the disease-free point D becomes unstable, and the endemic equilibrium point E becomes asymptotically stable. It is also shown that the disease-free point D has global asymptotic stability when $R_0 < 1$. Finally, the dynamics of the model are illustrated through simulations in Python, presenting graphs of the populations of humans, mosquitoes, larvivorous fish, and mosquito larvae, phase planes with flow diagrams, and the implications of variations in intraspecific competition parameters on the dynamics of malaria.

Keywords: ODE systems, malaria, equilibrium points, local stability, global stability, basic reproduction number, intraspecific competition.

I. INTRODUCCIÓN

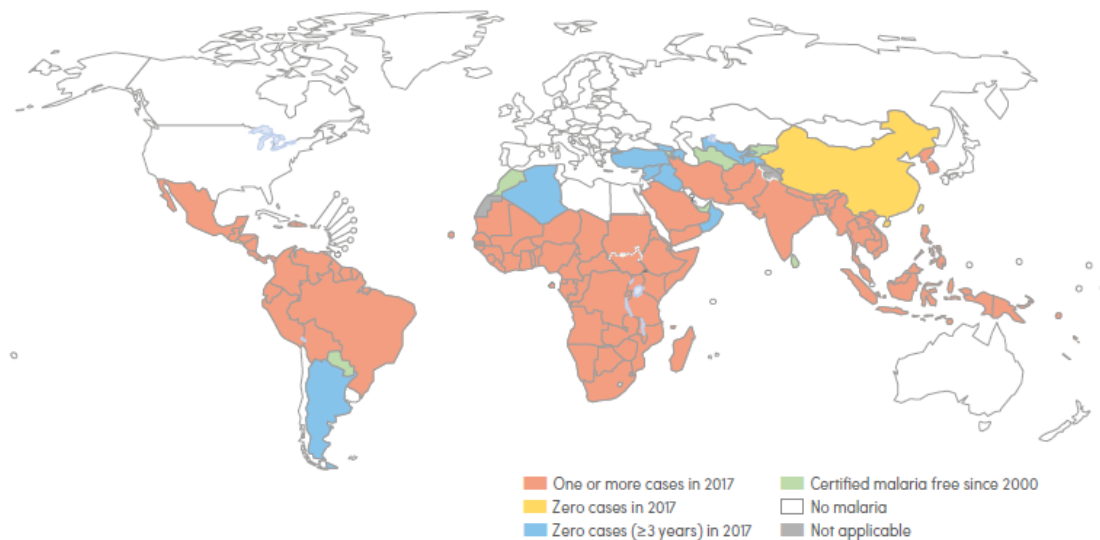
1.1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.1 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se calcula que en 2017 hubo 219 millones de casos de malaria, en comparación con los 217 millones del 2016. La cifra estimada de muertes por malaria se mantuvo en 435 000 en el 2017 muy similar al 2016 (OMS, 2018). En la figura 1 se muestra la distribución de la malaria en el mundo en el 2017.

Figura 1

Distribución de casos de malaria a nivel mundial en el 2017



Nota. Tomado de “World malaria report 2018” por World Health Organization, 2018.

La malaria se puede controlar a través de medicamentos o por medio de la disminución de los contactos entre humanos y mosquitos. Para lograr la disminución de los contactos que generan la transmisión de la enfermedad entre los humanos y mosquitos ha sido común el uso de redes protectoras y la aplicación de insecticidas en aerosol dentro y fuera de las casas. También ha sido común la implementación de otro tipo de estrategias como el tratamiento y drenaje de estancamientos de agua que sirven como zonas de cría. El control de una epidemia de malaria por medio de estos mecanismos no ha sido suficiente debido a la

creciente resistencia del parásito a los medicamentos y de los mosquitos a los insecticidas (Chandra et al., 2008).

Actualmente, se manejan estrategias de control biológico, como el uso especies para controlar la población de la especie vector (mosquito). En esta investigación se analiza la dinámica de la enfermedad mediante el uso de peces larvívoros que consumen larvas del mosquito *Anopheles* y la consideración de competencia intraespecífica de especies.

Basados en la propuesta de Ghosh et al. (2013) planteamos un modelo matemático que describe la dinámica vinculada entre la interacción humano-vector y la interacción depredador-presa para larvas de mosquito con los peces larvívoros. Adicionamos perturbaciones que modelan la competencia intraespecífica entre humanos y la competencia intraespecífica entre mosquitos en la interacción humano-vector.

Aquí como en Ghosh et al. (2013) dividiremos los sitios de reproducción en dos regiones. La región uno incluye a estanques, lagos y ríos donde también es posible el cultivo de peces y la región dos que incluye hábitats hechos por el hombre que hacen posible la cría de mosquitos, tales como tanques de agua, arrozales, zanjas, etc. que son hábitats temporales donde los peces no pueden sobrevivir por mucho tiempo. El almacenamiento de los peces larvívoros se puede hacer en la región uno y luego los peces cosechados en esta región pueden ser llevados a la región dos para controlar las larvas de mosquito.

En las tablas 1 y 2 se detalla el significado de cada símbolo para las variables y parámetros del modelo matemático. La dinámica depredador-presa de peces larvívoros y larvas de mosquitos es:

$$\frac{dL}{dt} = gN_v - dL - d_1L^2 - \lambda_vL - \alpha_1vLP - \alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP$$

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1vLP - qeP$$

Donde vL es la densidad de larvas en la región uno y $(1-v)L$ es la densidad de larvas en la en la región dos que están sujetos a la depredación por peces larvívoros, por lo que el término correspondiente a esto es α_1vLP para la región uno y el término $\alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP$ corresponde a la depredación de larvas de la región dos por los peces larvívoros cosechados con la misma tasa de depredación constante α_1 .

La fuerza de infección para mosquitos susceptibles puede ser representado como $c\beta S_v \frac{I_h}{N_h}$. Ahora basado en el número total de picaduras hechas por mosquitos es igual al número de picaduras recibido por humanos, el número promedio de picaduras por humano recibe por unidad de tiempo es $\beta \frac{N_v}{N_h}$. Si la probabilidad de transmisión por picadura de un mosquito infectado a un humano es b , la tasa de infección por un humano susceptible es

$$b\beta \frac{N_v}{N_h} \frac{I_v}{N_v} = b\beta \frac{I_v}{N_h}$$

Además $N_h = S_h + I_h$ y $N_v = S_v + I_v$. Suponiendo una interacción entrecruzada entre humanos - mosquitos y la competencia intraespecífica en ambas poblaciones, la dinámica vector - huésped de humanos y mosquitos se rige por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dS_v(t)}{dt} = \lambda_v L - c\beta S_v \frac{I_h}{N_h} - d_v S_v - m_v S_v N_v$$

$$\frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta S_v \frac{I_h}{N_h} - d_v I_v - m_v I_v N_v$$

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = \Gamma - b\beta S_h \frac{I_v}{N_h} - d_h S_h + \rho I_h - m_h S_h N_h$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta S_h \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu) I_h - m_h I_h N_h$$

Tabla 1

Descripción de las variables del modelo

Símbolo	Significado
$L(t)$	Es la densidad total de larvas en todas las regiones consideradas
$P(t)$	Densidad de población de los peces larvívoros en la región uno
$N_v(t)$	Es la población total de mosquitos adultos hembras
$S_v(t)$	Es la cantidad de mosquitos adultos hembras susceptibles a contraer la enfermedad

$I_v(t)$	Es la cantidad de mosquitos adultos hembras infectadas
$N_h(t)$	Es la población total de personas
$S_h(t)$	Es la cantidad de personas susceptibles a contraer la enfermedad
$I_h(t)$	Es la cantidad de personas infectadas

Tabla 2

Descripción de los parámetros del modelo

Símbolo	Significado
v	Fracción del total de los sitios de reproducción que son estanques, lagos y ríos que se consideran como la región uno
$1 - v$	Fracción del total de los sitios de reproducción que son tanques de agua, charcos, campos de arroz
d	Es la tasa de mortalidad natural de las larvas de mosquito
g	Es la tasa de puesta de huevos de los mosquitos adultos hembras
d_1	Es la tasa de mortalidad dependiente de la densidad de las larvas de mosquito
r	Es la tasa de crecimiento intrínseca de la población de peces
K	Es la capacidad de carga de reproducción de la población de peces en la región uno
α_1	Tasa de depredación de larvas por pez (constante de ataque).
α_2	Fracción de cosecha de peces criados en la región uno que se introducen en la región dos para controlar las larvas de mosquito de la región dos
q	Coeficiente de capturabilidad de los peces.
γ	Eficiencia de conversión de biomasa de larvas consumidas a biomasa de peces.

e	Esfuerzo de cosecha de peces larvÍvoros de la regi3n uno
λ_v	Es la constante de velocidad de maduraci3n, es decir, las larvas se vuelven adultas.
β	Es el promedio de picaduras por mosquito por unidad de tiempo
c	Es la probabilidad de transmisi3n de humanos infectados a mosquitos
b	Es la probabilidad de transmisi3n de mosquitos infectados a humanos
d_v	Es la tasa de mortalidad de mosquitos
Γ	Es la tasa de reclutamiento de la poblaci3n de personas
d_h	Es la tasa de mortalidad constante para la poblaci3n humana
ρ	Es la tasa de recuperaci3n en humanos
μ	Es la tasa de mortalidad relacionada con la malaria
m_v	Es la tasa de competencia intraespecÍfica de los mosquitos
m_h	Es la tasa de competencia intraespecÍfica de los humanos respectivamente
d_v	Es la tasa de mortalidad de los mosquitos

1.1.2 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACI3N

Lou y Zhao (2011) plantean un modelo donde se considera el m3todo de control de larvas mediante el uso de peces larvÍvoros. Proponen e investigan un modelo matemático que describe la dinámica vinculada entre la interacci3n hu3sped-vector y la interacci3n depredador-presa. El modelo, que consta de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias, es analizado a trav3s de teorÍas y m3todos de sistemas dinámicos. Obtienen cuatro cantidades biológicamente factibles (números de reproducci3n) que determinan completamente la composici3n de la comunidad. Sus resultados sugieren que la introducci3n de peces larvÍvoros, pueden tener consecuencias importantes para la dinámica de la malaria.

Ghosh et al. (2013) presentan un modelo matemático similar al planteado por Lou y Zhao (2011), para evaluar el impacto del control de las larvas de mosquito mediante el método de control biológico de la malaria en un área endémica, considerando poblaciones variables de humanos y de mosquitos. Se encuentran los diferentes equilibrios del modelo y la estabilidad de estos equilibrios se discute detalladamente. Además, el modelo presentado exhibe bifurcación hacia atrás bajo ciertas restricciones en los parámetros, lo que da lugar a la existencia de equilibrio endémico múltiple para el número de reproducción básico menor a 1. Esto sugiere que una estimación precisa de los parámetros y el nivel de las medidas de control son importantes para reducir la prevalencia de la infección por malaria en la región endémica y el número de reproducción básico menor a 1 no es suficiente para eliminar la enfermedad de la población bajo consideración.

En cuanto a experiencias recientes, tenemos las que sugieren que la bacteria simbiótica diseñada *Serratia* AS1 puede proporcionar un bio control novedoso, efectivo y sostenible de la malaria. Estas bacterias recombinantes pueden diseminarse rápidamente en poblaciones de mosquitos e inhibir eficazmente el desarrollo de parásitos de la malaria en mosquitos, según experimentos de laboratorio controlados. Wang y Zou (2019) desarrollan un modelo basado en la dinámica de la malaria que involucra transmisiones verticales y horizontales de la bacteria *Serratia* AS1 en la población de mosquitos. Muestran que la dinámica del sistema del modelo está totalmente determinada por la relación de reproducción del vector R_v , y La relación de reproducción básica R_0 . Si $R_v \leq 1$, entonces el estado libre de mosquitos es globalmente atractivo. Si $R_v > 1$ y $R_0 \leq 1$, entonces la solución periódica libre de enfermedad es globalmente atractiva. Si $R_v > 1$ y $R_0 > 1$, entonces la solución periódica positiva es globalmente atractiva. Numéricamente, verifican el resultado analítico obtenido y evalúan los efectos de liberar la bacteria de ingeniería *Serratia* AS1 en el campo realizando un estudio de caso para Douala, Camerún. Encontrando que idealmente, al usar *Serratia* AS1, solo se necesita al menos 25 años para eliminar la malaria de Douala. Esto implica que se necesita una inversión a largo plazo en la lucha contra la malaria y confirma la necesidad de integrar múltiples medidas de control.

1.1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.3.1. Problema general

¿Cómo la inclusión de la competencia intraespecífica (perturbación) en las poblaciones huésped (humanos) y vector (mosquitos) afecta cualitativamente y modela la dinámica de transmisión de la malaria?

1.1.3.2. Problemas específicos

- ¿Cuáles son las condiciones matemáticas que garantizan la existencia, unicidad y factibilidad biológica de los puntos de equilibrio libre de infección (D) y endémico (E) en el modelo de control biológico de la malaria con competencia intraespecífica?
- ¿Cómo se determina la estabilidad local y global de estos puntos de equilibrio, y cuál es la influencia del número reproductivo básico (R_0) en dicha estabilidad?
- Mediante simulaciones numéricas del modelo ¿se puede visualizar y analizar la evolución temporal de las poblaciones y la influencia de competencia intraespecífica en la dinámica de la malaria? ¿Qué condiciones determinan la transición de una población susceptible a un estado endémico de malaria, considerando la competencia intraespecífica?

1.1.4 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.4.1. Objetivo general

Desarrollar y analizar cualitativamente un modelo matemático de control biológico de la malaria que incorpore la dinámica de competencia intraespecífica (perturbación) entre el huésped humano y el vector mosquito

1.1.4.2. Objetivos específicos

- Establecer las condiciones para la existencia y unicidad de los puntos de equilibrio biológicamente factibles (libre de infección y endémico) del modelo propuesto
- Identificar y caracterizar los puntos de equilibrio como libres de infección o endémicos, y determinar el umbral epidemiológico (R_0) que determine su ocurrencia y estabilidad.
- Analiza la dinámica del modelo perturbado considerando su estabilidad local y global

- Realizar simulaciones numéricas utilizando Python para mostrar la dinámica del modelo propuesto, incluyendo la evolución de las poblaciones y el impacto de los parámetros de competencia intraespecífica en la prevalencia de la malaria

1.1.5 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

- En epidemiología el poder experimentar la dinámica de transmisión de las enfermedades en poblaciones, no es posible, por lo que poder modelar la dinámica de una enfermedad a través de un modelo matemático para saber sus características y así plantear estrategias de control y erradicación de enfermedades epidemiológicas como la malaria es fundamental.
- Formular un modelo matemático para la dinámica de transmisión de la malaria que involucre más variables que influyen en las poblaciones es importante, particularmente acá involucramos en el modelo la competencia intraespecífica de las poblaciones de humanos y vectores que pueden permitir estratificar estrategias de control de la malaria.
- En medio del uso de insecticidas que causan daños ecológicos, daños a poblaciones de humanas y poblaciones de otros animales, además de la resistencia que van adquiriendo los mosquitos a los insecticidas, es preponderante el uso de controles biológicos de las larvas de mosquitos, particularmente mediante el uso de peces larvívoros.

1.1.6 LIMITACIONES

- El modelo que utilizará esta investigación es SIS - SI para la interacción huésped-vector basado en los propuestos por Ross Macdonald. Existe otros modelos empleados para la malaria como SIRS- SEI, SEIRS – SEI y SEIS – SEI que no son abordados en la investigación.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 ASPECTOS EPIDEMIOLÓGICOS DE LA MALARIA

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2018), la malaria es causada por parásitos del género *Plasmodium* que se transmiten al ser humano a través de la picadura de mosquitos hembra infectados del género *Anopheles* (llamados vectores). El paludismo es una enfermedad febril aguda, que en los individuos no inmunes los síntomas se manifiestan entre los 10 y 15 días después de la picadura del mosquito infectado. Puede resultar difícil reconocer el origen palúdico de los primeros síntomas (fiebre, dolor de cabeza y escalofríos), que pueden ser leves. Si no se trata en las primeras 24 horas, el paludismo por *falciparum* puede agravarse llevando a la muerte. Las enfermedades para las cuales un mosquito es el encargado de la transmisión de la enfermedad, como el dengue, la fiebre amarilla y la malaria; constituyen uno de los problemas más grandes y de mayor impacto en la salud pública a nivel mundial.

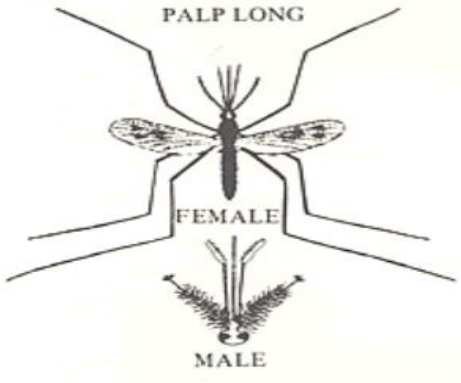
2.1.1 EL MOSQUITO TRANSMISOR

El paludismo en la mayoría de los casos se transmite por la picadura de mosquitos hembra del género *Anopheles*, de las más de 400 especies de estos mosquitos solo 30 de ellas son vectores de la malaria lo cuales pican al anochecer y al amanecer (OMS, 2018).

En el 2021 el Centers for Disease Control and Prevention (CDC) respecto del mosquito transmisor nos dice que los mosquitos hembra ingieren sangre para poder producir huevos, este acto es el que vincula al ser humano y los mosquitos huéspedes en el ciclo de vida del parásito de la malaria. La existencia de los mosquitos pasa por cuatro etapas de vida: huevo, larva, pupa y adulto. Las tres primeras son acuáticas y duran entre 7 y 14 días, según la especie y temperatura del ambiente. Los mosquitos macho no pican, por lo que no pueden transmitir la malaria ni otras enfermedades. Las hembras adultas tienen una vida corta (más de 10 días hasta un mes), la mayoría no vive más de una a dos semanas en la naturaleza. En la figura 2 se muestra las etapas de vida del mosquito *Anopheles*.

Figura 2

Etapas de vida del mosquito Anopheles

 Arriba: Huevo de Anopheles; tenga en cuenta los flotadores laterales. Abajo: Los huevos de Anopheles se ponen individualmente.	 Larva de Anopheles. Tenga en cuenta la posición, paralela a la superficie del agua.
 Pupa de Anopheles	 Adultos Anopheles

Nota. Adaptado de “About Malaria” [Fotografía], por CDC, 2021.

2.1.2 EL PARÁSITO

Los parásitos de la malaria son microorganismos que pertenecen a la familia de los plasmodium que son más de 100 especies. Estos parásitos pueden infectar a diferentes especies de animales como reptiles, aves y varios mamíferos. Los que infectan al ser humano son cuatro especies de plasmodium: falciparum, vivax, ovale y malariae (CDC, 2021).

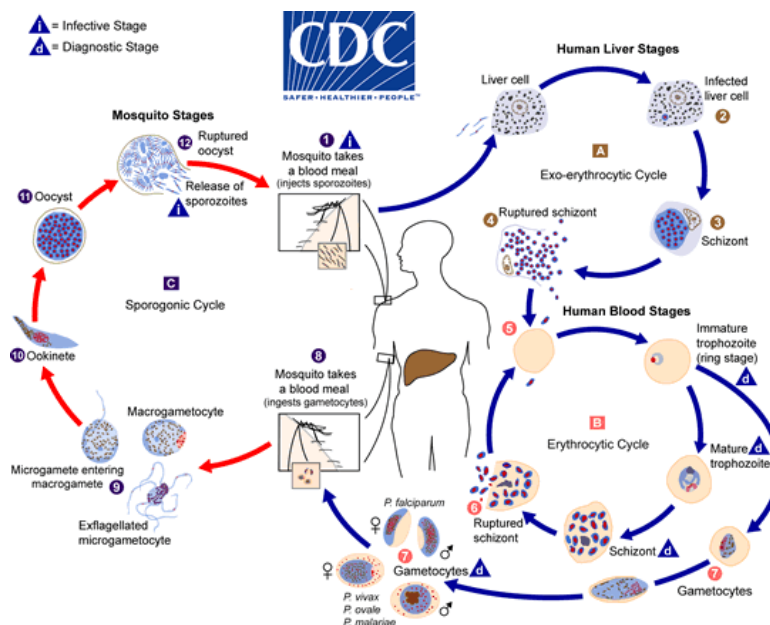
2.1.3 CICLO VITAL

En los seres humanos los parásitos de la malaria se desarrollan y multiplican primero en las células del hígado, luego pasa a la sangre invadiendo los glóbulos rojos (ver

figura 3). En la sangre los parásitos crecen dentro de los glóbulos rojos y los destruyen liberando parásitos hijos que continúan el ciclo invadiendo otros glóbulos rojos. El anopheles hembra ingiere a los parásitos al alimentarse de la sangre de individuos humanos infectados, los parásitos se aparean en el intestino del mosquito que después de 10 a 18 días, una forma del parásito llamado esporozoito migra a las glándulas salivales del mosquito. El mosquito anopheles ingiere sangre de otro ser humano e inyecta saliva anticoagulante con los esporozoitos que migran al hígado del humano comenzando un nuevo ciclo de parásito (CDC, 2021).

Figura 3

Ciclo vital del parásito de la malaria



Nota. Adaptado de “About Malaria” [Fotografía], por CDC, 2021.

2.1.4 CONTROL

La lucha anti vectorial es el medio principal para reducir la transmisión de la malaria. Si la cobertura de este tipo de intervenciones es suficiente en una zona determinada, se protegerá a toda la comunidad.

La OMS recomienda proteger a todas las personas expuestas a contraer la enfermedad mediante medidas eficaces de lucha anti vectorial. Hay dos métodos de lucha contra los vectores que son eficaces en circunstancias muy diversas: los mosquiteros tratados con insecticidas y la fumigación de interiores con insecticidas de acción residual, y también podemos considerar el uso de controles biológicos (OMS, 2018).

2.2 SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Benazic (2007) al respecto define de los siguientes conceptos:

Un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \dots (2.1)$$

En donde t es una variable independiente que denota al tiempo, $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables que dependen de t que toman valores reales. $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones de valor real definidas en un subconjunto D de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En diversas situaciones sucede que las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ solo dependen de las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ y no de la variable temporal t , en este caso (2.1) toma la forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Este sistema puede ser representado como:

$$x' = f(x) \dots (2.2)$$

Donde $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$

En donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables que dependen de t que toman valores reales.

$f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones de valor real definidas en un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$.

Decimos que (2.2) es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que (2.1) es llamado sistema no autónomo.

Una solución de (2.1) es un conjunto de n funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ con valores reales y definidas en un mismo intervalo abierto J de la recta real tales que satisfacen las dos condiciones siguientes:

- i) $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in D$, para todo $t \in J$
- ii) Cada φ_i es diferenciable en J y para cada $t \in J$ se cumple:

$$\begin{cases} \varphi'_1 = f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \varphi'_2 = f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \varphi'_n = f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases}$$

El concepto de solución se particulariza también para el sistema autónomo (2.2).

Ahora veremos acerca de la existencia y unicidad de un sistema de autónomo. Dado el PVI (problema de valores iniciales):

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \dots (2.3)$$

Donde $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $x, x_0 \in U$

Teorema 2.2.1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(U)$. Entonces para cualquier $x_0 \in U$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $\varphi(t)$ del PVI (2.3) sobre algún intervalo J , tal que $t_0 \in J$.

Para la demostración del teorema puede revisarse Benazic (2007).

2.3 INTERVALO MAXIMAL DE EXISTENCIA DE UNA EDO

Las siguientes definiciones y teoremas son desarrolladas por Perko (2013) y Barreira y Valls (2012a).

Teorema 2.3.1. Para el PVI (2.3) si la función $f \in C^1(U)$, entonces para cada $x_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ del PVI (2.3) tal que para cualquier solución $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del PVI (2.3) tenemos que $I \subset (a, b)$ y $\phi(t) = \varphi(t)$, para todo $t \in I$.

Definición 2.3.1. Bajo los requisitos del teorema 2.3.1 el *intervalo maximal* de una solución $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del PVI (2.3) es el intervalo abierto más grande (a, b) donde existe una solución que coincide con ϕ en I .

Teorema 2.3.2. Sea $f \in C^1(U)$. Si la solución $\varphi(t)$ del PVI (2.3) tiene intervalo maximal (a, b) , asumiendo $b < \infty$. Entonces para cada conjunto compacto $K \subset U$ existe $t \in (a, b)$ tal que $\varphi(t) \in U \setminus K$.

Definición 2.3.2. Si $0 \in (a, b)$ entonces $(a, 0]$ y $[0, b)$ son llamados el intervalo izquierdo e intervalo derecho maximal de existencia respectivamente.

Teorema 2.3.3 Sea $f \in C^1(U)$. Si la solución $\varphi(t)$ del PVI (2.3) y sea $[0, b)$ el intervalo derecho maximal de existencia de la solución, asumiendo $b < \infty$. Entonces para cada conjunto compacto $K \subset U$ existe $t \in (0, b)$ tal que $\varphi(t) \in U \setminus K$

Corolario 2.3.1 Sea $f \in C^1(U)$. Si la solución $\varphi(t)$ del PVI (2.3) y sea $[0, b)$ el intervalo derecho maximal de existencia de la solución, asumiendo que existe un conjunto compacto $K \subset U$ tal que

$$\{y \in \mathbb{R}^n / y = \varphi(t) \text{ para algún } t \in [0, b)\} \subset K$$

Entonces $b = \infty$. Es decir, el PVI tiene solución $\varphi(t)$ sobre $[0, \infty)$.

2.4 ESTABILIDAD LOCAL EN SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

El análisis de estabilidad es un análisis cualitativo del sistema (2.2). Aquí presentamos algunas definiciones básicas para entender el comportamiento de las soluciones del sistema (2.2) cercanas a los puntos de equilibrio que son abordadas por Perko (2013) y Barreira y Valls (2012a).

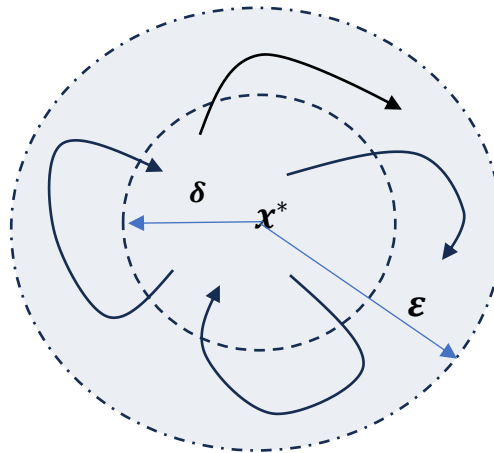
Definición 2.4.1 Un punto $x^* \in U$ con $f(x^*) = 0$ es llamado *punto crítico o de equilibrio* de la ecuación (2.2).

Definición 2.4.2

(i) Un punto de equilibrio x^* del sistema (2.3) se dice que es *localmente estable*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que para cualquier solución arbitraria $x(t)$ del sistema (2.3) que satisfaga la condición $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$, la desigualdad $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ se cumple para todos los $t \geq t_0$. Donde, $\|\cdot\|$ denota la norma del vector euclidiano.

Figura 4

Punto de equilibrio localmente estable



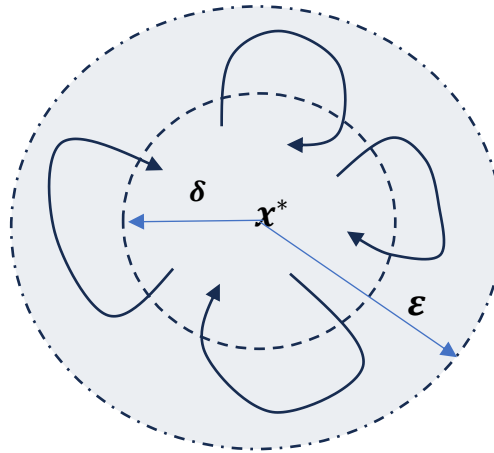
(ii) Un punto de equilibrio x^* se denomina *asintóticamente estable* si es estable y cada solución que comienza cerca del punto de equilibrio y converge a ese equilibrio punto, matemáticamente

Si $\|x(t) - x^*\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

entonces la solución x^* se denomina localmente asintóticamente estable.

Figura 5

Punto de equilibrio localmente asintóticamente estable



2.5 ESTABILIDAD MEDIANTE LINEALIZACIÓN

Consideremos el sistema autónomo (2.2) con punto crítico $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$ tal que las funciones $F_1, F_2, \dots, F_n$ son funciones de clase $C^1(U)$. Entonces:

$$F(x) = F(u) + Jf(u)(x - u) + r(x - u)$$

Al ser u un punto crítico tenemos:

$$F(x) = Jf(u)(x - u) + r(x - u)$$

Tal que $\lim_{x \rightarrow u} \frac{r(x-u)}{\|x-u\|} = 0$ y $Jf(u) = \left[\frac{\partial F_i(u)}{\partial x_j} \right]_{n \times n}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ es la matriz jacobiana.

Si $y = x - u \Rightarrow y' = x'$, el sistema linealizado entonces es de la forma:

$$y' = Jf(u)y \dots (2.4)$$

Definición 2.5.1

Un punto de equilibrio es llamado *hiperbólico* si la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana $Jf(u)$ son diferentes de cero. Si la parte real de cada autovalor de la matriz Jacobiana son iguales a cero el punto crítico es llamado *no hiperbólico*.

Teorema 2.5.1

Considerando $F \in C^1(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y el sistema (2.2) y

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$ punto de equilibrio hiperbólico del sistema:

- i. Si la parte real de todos los autovalores de $Jf(u)$ es negativa, entonces, u es localmente asintóticamente estable.

- ii. Si la parte real de algún autovalor de $Jf(u)$ es positivo, entonces, u es inestable.

Según el teorema 2.5.1 un sistema lineal estable requiere que todas las raíces de la ecuación característica tengan partes reales negativas. El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es una prueba para determinar, sin calcular las raíces, si se trata o no de que todas las raíces de un polinomio tienen partes reales negativas. El criterio de Routh-Hurwitz da las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces del polinomio característico tengan partes reales negativas, lo que implica una estabilidad local asintótica; este criterio se puede encontrar en Kiseliiov et al. (1968).

Teorema 2.5.2. (Routh-Hurwitz) Considere la ecuación característica

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

Que determina los n valores propios λ de una matriz real $n \times n$ cuadrada A , donde I es el matriz de identidad. Entonces todos los valores propios λ tienen partes reales negativas si y solo si

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0,$$

Dónde

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2k-1} & b_{2k-2} & b_{2k-3} & b_{2k-4} & b_{2k-5} & b_{2k-6} & b_{2k-7} & b_{2k-8} & \dots & b_k \end{vmatrix}$$

2.6 FUNCIONES DE LYAPUNOV Y PRINCIPIO DE INVARIANCIA DE LASALLE

Las definiciones y principales resultados presentados aquí son tratados por Perko (2013) y Barreira y Valls (2012a).

Definición 2.6.1. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contenga el origen. Una función de valores reales $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de primer orden se dice que es *definido positivo en el conjunto W* si se cumplen las siguientes condiciones:

- $V(x) > 0$ para todos los $x \in W$ con $x \neq 0$.
- $V(0) = 0$.

V se denomina *semidefinida positiva* si $V(x) > 0$ para $x \in W$.

Definición 2.6.2. Una función escalar definida positiva V con derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad abierta W del origen se denomina *función de Lyapunov* para el sistema (2.3) si $V(x) \leq 0$ para todo $x \in W \setminus \{0\}$.

Teorema 2.6.1. (Teorema de estabilidad de Lyapunov): Sin pérdida de generalidad asumimos que $x^* = 0$ es un punto del equilibrio del sistema autónomo (2.3) y sea $V : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva continuamente diferenciable en alguna vecindad W de $x^* = 0$.

- Si $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in W \setminus \{0\}$, entonces 0 es estable.
- Si $\dot{V}(x) < 0$ para $x \in W \setminus \{0\}$, entonces 0 es asintóticamente estable.
- Si $\dot{V}(x) > 0$ para $x \in W \setminus \{0\}$, entonces 0 es inestable.

Ejemplo 2.6.1

Sea la función $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Y el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \dots (2.5)$$

Se puede observar que el sistema tiene como punto de equilibrio a $(0,0)$, comprobaremos que el punto crítico es asintóticamente estable.

En efecto veamos que V es una función de Lyapunov pues

- $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ para todos los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y) \neq (0,0)$.
- $V(0,0) = 0$.

Además,

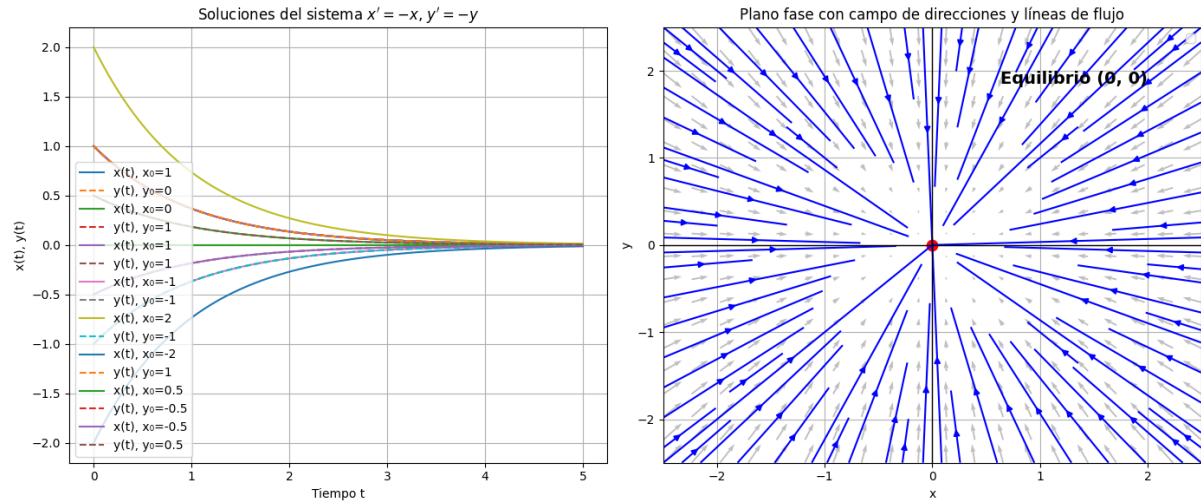
$$V'(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$V'(x(t), y(t)) = -2x^2 - 2y^2 < 0, \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Por lo cual $(0,0)$ es asintóticamente estable. A continuación, mostramos las gráficas de las soluciones del sistema (2.5) y el plano fase XY.

Figura 6

Soluciones y plano fase XY del sistema (2.5)



Definición 2.6.3. La solución de equilibrio x^* del sistema (2.3) es *globalmente asintóticamente estable*, si toda solución $x(t)$ del sistema (2.3) correspondiente a una elección arbitraria de las condiciones iniciales satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Definición 2.6.4. Se dice que el conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ es *invariante con respecto al sistema* (2.3) si para cualquier valor inicial, $x_0 \in H$ implica que la solución $x(x_0, t) \in H$ para todo el tiempo t en el dominio de la solución $x(t)$. Se dice que es positivamente invariante si $x_0 \in H$ implica que $x(x_0, t) \in H$ para $t > 0$.

Teorema 2.6.2. (Principio de invariancia de LaSalle): Sea $\Omega \subset H$ un conjunto compacto, es decir, positivamente invariante con respecto al sistema (2.3). Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable de modo que $V'(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos de Ω tales que $V'(x) = 0$. Sea M el conjunto invariante más grande de E . Entonces toda solución que comienza en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

En el teorema 2.6.2 la palabra "más grande" se entiende en el sentido de que H es la unión de todos los conjuntos invariantes.

2.7 COMPORTAMIENTO GLOBAL ASINTÓTICO EN ALGUNOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES COOPERATIVOS

Aquí mostramos un importante resultado de Zhao y Jing (1996) para el sistema autónomo

$$x'(t) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Consideremos lo siguiente:

- Sea $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
- Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ escribimos
 $x \geq y$ si $x - y \in \mathbb{R}_+^n$, es decir, $x_i - y_i \in \mathbb{R}_+$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $x > y$ si $x - y \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, es decir, $x_i - y_i \in \mathbb{R}_+$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $x_j - y_j \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $x \gg y$ si $x - y \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, es decir, $x_i - y_i \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- Los llamados *sistemas monótonos cooperativos* tienen la propiedad de que sus soluciones preservan la relación de orden parcial en $\mathbb{R}^n$, definida en el punto anterior. Esto es, si $\varphi_1(0) \leq \varphi_2(0)$, entonces $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ para toda $t \geq 0$. En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales definido en un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ con f continuamente diferenciable, existe una caracterización de cooperatividad en términos de las derivadas de f :
 f es *cooperativa sobre* $\mathbb{R}_+^n$ si y solo si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$.
- f es *irreducible* si el dígrafo asociado a la matriz de pesos de $Df(x)$ es fuertemente conexo, es decir, existe un camino entre dos vértices cualquiera de dígrafo asociado.

Teorema 2.7.1 sea $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y asumiendo que se cumple

- (1) f es cooperativa sobre $\mathbb{R}_+^n$ y $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ es irreducible para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$
- (2) $f(0) = 0$ y $f_i(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ con $x_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$
- (3) f es estrictamente sublineal sobre $\mathbb{R}_+^n$, es decir, para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ y cualquier $x \gg 0, f(\alpha x) > \alpha f(x)$.

Tenemos

- (a) Si $s(Df(0)) = \max\{\text{Re } \lambda; \det(\lambda I - Df(0)) = 0\} \leq 0$, entonces el equilibrio trivial $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable con respecto a $\mathbb{R}_+^n$

- (b) Si $s(Df(0)) > 0$ el sistema admite un único equilibrio positivo $x^* \gg 0$ que es globalmente asintóticamente estable con respecto a $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

2.8 SISTEMAS DINÁMICOS

En este apartado los conceptos y principales resultados pueden ser encontrado en Barreira y Valls (2012b) y Perko (2013).

Definición 2.8.1 Sea X un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una aplicación es llamado *sistema dinámico en tiempo discreto*.

Definimos $f^0 = Id$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Cuando f es invertible definimos $f^{-n} = (f^{-1})^n$ para $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 2.8.1 La función $f(x) = e^x + 1$ es un sistema dinámico en tiempo discreto

Definición 2.8.2 La *semiorbita positiva de x* es el conjunto

$$O_+(x) = \{f^n(x): n \in \mathbb{N}_0\} = \{x; f(x); f^2(x); f^3(x); \dots; f^n(x); \dots\}$$

Definición 2.8.3: $f: X \rightarrow X$ un sistema dinámico, $x \in X$. Un punto $y \in X$ es llamado un *punto ω -límite de x* si existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $n_k \rightarrow \infty$, tal que $f^{n_k}(x) \rightarrow y$. Esto se denota como:

$$\omega(x) = \{y \in X: \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y, \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

Definición 2.8.4 Un *semiflujo* es una familia de aplicaciones continuas

$\varphi(t, \cdot): X \rightarrow X$ con $t \geq 0$ el cual satisface:

- (i) $\varphi(0, x) = x, \forall x \in X$
- (ii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x), \forall s, t \geq 0 \text{ y } \forall x \in X$

Si $\varphi(t, \cdot): X \rightarrow X$ es una familia de aplicaciones que satisface las condiciones anteriores para todo $s, t \in \mathbb{R}$ se dice que φ es un flujo.

Decimos que la familia de aplicaciones $\varphi(t, \cdot)$ Es un *sistema dinámico en tiempo continuo* si es un flujo o semiflujo

Es usual llamar *sistema dinámico* tanto a los sistemas dinámicos en tiempo discreto como a los sistemas dinámicos en tiempo continuo.

Ejemplo 2.8.2 Dado $y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\varphi(t, x) = x + ty, \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n$$

Es un semiflujo

Ejemplo 2.8.3 Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que cada PVI

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Tiene una única solución $\varphi(t, x_0)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$ es un flujo.

Observación 2.8.1. Además, para hallar el punto de equilibrio de la ecuación diferencial tenemos

$$x' = f(x) = 0$$

Entonces $\varphi'(t, x) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(t, x) = k$

Como $\varphi(0, x) = k = x$, esto significa que hallar un punto de equilibrio de una ecuación diferencial equivale a hallar el punto fijo del flujo asociado a la ecuación diferencial.

Definición 2.8.4 Para un semiflujo $\varphi(t, \cdot)$, $t \geq 0$ dado $x \in X$ decimos que

$$O^+(x) = \{\varphi(t, x) : t \geq 0\}$$

Es una *semiorbita positiva* de x

Definición 2.8.5 Dado un semiflujo $\Phi = (\varphi(t, \cdot))_{t \geq 0}$ en X , definimos el ω -límite de un punto $x \in X$ por

$$\omega(x) = \{y \in X : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ con } t_k \rightarrow \infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y, \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

Definición 2.8.6 $A \subset X$ es *f- invariante* si $f(A) = A$. Si $f(A) \subset A$, se dice que es *f - positivamente invariante*.

2.9 CADENA TRANSITIVA Y ATRACTIVIDAD

Ahora se comentaremos algunos conceptos, lemas y teoremas que se encuentran en Zhao (2003) y en Hirsch et al. (2001). Denotaremos $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ es componer n –veces la función f . Sea X un espacio métrico con métrica d y $f : X \rightarrow X$ una función continua.

Definición 2.9.1. Sea $A \subset X$ ser un conjunto invariante no vacío (i.e., $f(A) = A$). Llamamos un *conjunto internamente cadena transitivo* si para cualquier $a, b \in A$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe una secuencia finita $x_1, \dots, x_m$ en A con $x_1 = a, x_m = b$ de tal manera que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq m - 1$. La secuencia $\{x_1, \dots, x_m\}$ se llama ε -cadena en A que conecta a y b , es decir, la distancia entre la imagen del punto actual y el siguiente punto es arbitrariamente pequeña.

Definición 2.9.2. *Órbita Precompacta* es una órbita cuya clausura es un conjunto compacto. Intuitivamente, la órbita no "escapa al infinito" y se mantiene en una región "acotada" del espacio.

Ejemplo 2.9.1.

Considerando el semiflujo $\Phi(t): X \rightarrow X$. Sea $A = \{p\}$ donde p es un punto de equilibrio ($\Phi(t)p = p$). Es un conjunto internamente cadena transitivo porque es compacto (un solo punto), es invariante ($\Phi(t)A = A$). Para verificar la transitividad interna en cadena: los únicos puntos a y b en A son $a = p$ y $b = p$. Sea cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 > 0$, debemos encontrar una cadena de p a p . Simplemente tomamos la cadena más corta posible: usamos $x_1 = p$, $x_2 = p$, entonces $d(\Phi(t_0)x_1, x_2) = d(\Phi(t_0)p, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon$.

Lema 2.9.1. Sea $\Phi(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$, un semiflujo de tiempo continuo. Entonces, el conjunto omega límite (alfa) de cualquier órbita positiva (negativa) precompacta es conjunto internamente cadena transitivo.

Lema 2.9.2. Sea $\Phi(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$, un semiflujo de tiempo continuo. Supongamos que cada punto de equilibrio del semiflujo ($\Phi(t)(x) = x, t \geq 0$) es un conjunto invariante aislado para el semiflujo, donde no hay ciclos de puntos de equilibrio, y que toda órbita positiva precompacta converge a algún punto de equilibrio. Entonces, cualquier conjunto compacto internamente cadena transitivo es necesariamente un único punto de equilibrio.

2.10 NUMERO BÁSICO DE REPRODUCCIÓN

El *número reproductivo básico* se entiende como el promedio de infecciones secundarias producidas por un caso introducido (paciente cero) en una población totalmente susceptible (Basáñez & Rodríguez, 2004).

En esta parte del marco teórico introducimos algunos conceptos, lemas y teoremas descritos en Driessche y Watmough (2002), que emplearemos en la investigación. Consideremos una población heterogénea cuyos individuos se pueden agrupar en n homogéneos Compartimientos. Sea $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, con cada $x_i \geq 0$, el estado de los individuos en cada compartimento y x_0 un punto libre de infección (sin infectados) del PVI (3.2) asociado a un modelo epidemiológico. Suponemos que los compartimentos se pueden dividir en dos tipos:

compartimentos infectados, etiquetados por $i = 1, \dots, m$, y compartimentos no infectados, etiquetados por $i = m + 1, \dots, n$. Defina X_s como el conjunto de todos los estados libres de enfermedad:

$$X_s := \{x \geq 0 : x_i = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$$

Sea la tasa de entrada de los nuevos individuos infectados en el i -ésimo compartimento es $\mathcal{F}_i(x)$. Ahora, $\mathcal{V}_i^+(x)$ es la tasa de entrada de individuos por otros medios (por ejemplo, nacimientos, inmigración), y $\mathcal{V}_i^-(t, x)$ sea la tasa de transferencia de individuos fuera del compartimento i (por ejemplo, muertes, recuperación y emigraciones). Por lo tanto, el modelo de transmisión de la enfermedad se rige por un sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x) \triangleq f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \dots \quad (2.1)$$

donde $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$. Hacemos las siguientes suposiciones:

(A1) Para cada $1 \leq i \leq n$, las funciones $\mathcal{F}_i(x)$, y $\mathcal{V}_i^+(x)$ y $\mathcal{V}_i^-(x)$ son no negativos y continuos en $\mathbb{R}_+^n$ y continuamente diferenciable con respecto a x .

(A2) Si $x_i = 0$, entonces $\mathcal{V}_i^- = 0$. En particular, si $x \in X_s$, entonces $\mathcal{V}_i^- = 0$ para $i = 1, \dots, m$.

(A3) $\mathcal{F}_i = 0$ para $i > m$.

(A4) Si $x \in X_s$, entonces $\mathcal{F}_i(x) = \mathcal{V}_i^+(x) = 0$ para $i = 1, \dots, m$.

(A5) Si $\mathcal{F}(x) = 0$, entonces todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real negativa.

Si se cumple los requisitos (A1-A5) a partir del Lema 1 de Driessche y Watmough (2002) se establece que la matriz jacobiana $Df(x_0)$ del del sistema (2.2) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$Df(x_0) = D\mathcal{F}(x_0) - D\mathcal{V}(x_0)$$

Donde

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Con F y V son matrices de $m \times m$ definidos por

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ y } V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ con } 1 \leq i, j \leq m$$

F es no negativa, V es una M-matriz no singular y todos los valores propios de J_4 tienen parte real positiva.

Según Driessche y Watmough (2002) se verifica que la matriz de la siguiente generación viene dada por

$$K = FV^{-1}$$

La entrada (i, k) de K representa el número esperado de nuevas infecciones secundarias en el compartimento i producidas por un individuo inicialmente infectado introducido en el compartimento K , durante toda su vida infecciosa, asumiendo que la población está en el punto libre de infección.

El número básico de reproducción (R_0) se define como el radio espectral (el mayor valor propio) de la matriz:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

2.11 SISTEMA DE COMPETENCIA ENTRE ESPACIES

La competencia es un fenómeno de interdependencia que se da en la interacción entre individuos ya sean individuos de especies diferentes o de la misma especie. Peralta y Magaña (2012) al respecto consideran que hay dos tipos; la *competencia intraespecífica* que se da cuando los individuos son de una misma especie y la *competencia interespecífica* cuando los individuos son de especies distintas. Continúan diciendo que la competencia intraespecífica se da cuando los individuos de una misma especie acuden a las mismas fuentes de consumo y se manifiesta más crudamente cuando las fuentes de consumo son pobres, y en la competencia interespecífica cuando individuos de distintas especies acuden a las fuentes de consumo.

Un ejemplo de un modelo de competencia interespecífica es el modelo Lotka-Volterra (Peralta & Magaña, 2012) que modela la dinámica de interacción entre una población de presas (x) y una población de depredadores (y):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(cx - d) \end{cases} \dots (2.6)$$

Donde a, b, c y d son constantes positivas.

Si en el modelo de Lotka-Volterra también consideramos competencia intraespecífica obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \lambda x - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(cx - \beta y - d) \end{cases} \dots (2.7)$$

Donde a, b, c, d, λ y β son constantes positivas.

En cuanto al modelado de la dinámica de transmisión de la malaria Basáñez y Rodríguez (2004) al respecto comentan que Sir Ronald Ross, médico y bacteriólogo que descubrió el parásito del paludismo en el estómago del mosquito del género anopheles, demostró que la transmisión de dicha enfermedad es a través de la picadura de estos mosquitos. Además, planteó un modelo, en el año 1911, que predice que la transmisión de la malaria puede ser controlada si la población de mosquitos se mantiene por debajo de un nivel crítico. En 1957 George MacDonald modificó el modelo de Ross y es el que presentamos a continuación (Basáñez & Rodríguez, 2004):

Tabla 3

Variables y parámetros en el modelo de Ross-MacDonald

Símbolo	Significado
M	Tamaño de la población del vector
N	Tamaño de la población humana
q	Densidad de mosquitos por persona (M/N)
b	Índice de antropofilia (fracción de comidas sanguíneas de origen Humano)
γ	Duración del ciclo gonadotrófico en unidades de tiempo
$1/\gamma$	Frecuencia de picada por mosquito en unidades de tiempo
a	Tasa de picada sobre humanos por mosquito (b/γ) en unidades de tiempo.
p	Probabilidad que una picada origine una infección en el humano
c	Probabilidad que una picada origine una infección en el mosquito
g	Tasa per cápita de recuperación en el humano en unidades de tiempo
$D_N = 1/g$	Duración promedio del evento malárico en el humano en unidades de tiempo
v	Tasa per cápita de mortalidad del mosquito en unidades de tiempo

$D_v = 1/v$	Expectativa de vida del mosquito (longevidad promedio del vector) en unidades de tiempo
-------------	---

La proporción de humanos susceptibles es $1 - x$ y la de mosquitos susceptibles es $1 - y$, la proporción de humanos y de mosquitos infectados es x e y , respectivamente. La ecuación para la tasa temporal de cambio en la proporción de humanos infectados es:

$$\frac{dx}{dt} = qap y(1 - x) - gx$$

La tasa temporal de cambio en la proporción de mosquitos infectados es

$$\frac{dy}{dt} = acx(1 - y) - vy$$

III. MARCO METODOLÓGICO

3.1 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

3.1.1 HIPÓTESIS GENERAL

La inclusión de la competencia intraespecífica (perturbación) en las poblaciones huésped (humanos) y vector (mosquitos) es un factor determinante en la dinámica de transmisión de la malaria, influyendo en la existencia, unicidad y estabilidad de sus puntos de equilibrio en el modelo de control biológico propuesto.

3.1.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

- El modelo de control biológico de la malaria, al considerar la competencia intraespecífica, presenta puntos de equilibrio biológicamente factibles (libre de infección D y endémico E), cuya existencia y unicidad se determinan por la interacción de los parámetros del sistema.
- La estabilidad local y global de estos puntos de equilibrio (D y E) está directamente relacionada con el valor del número reproductivo básico (R_0), siendo D asintóticamente estable si $R_0 \leq 1$ (local y globalmente) y E asintóticamente estable si $R_0 > 1$ (localmente).
- Las simulaciones numéricas, realizadas mediante un programa de cómputo, permiten visualizar la evolución de las poblaciones del modelo y demuestran cómo las variaciones en los parámetros de competencia intraespecífica, especialmente m_v y m_h , influyen en la erradicación o persistencia (endemicidad) de la malaria en la población.

3.2 VARIABLES E INDICADORES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación es netamente teórica, por lo que no se presentan indicadores, solamente se describirán las variables de estudio.

3.2.1 VARIABLE DEPENDIENTE

Puntos de equilibrio libre de infección y endémico del modelo

Estabilidad de los puntos de equilibrio libre de infección y endémico

Número reproductivo básico de la infección R_0

3.2.2 VARIABLES INDEPENDIENTES

Modelo de control biológico de la malaria considerando competencia de especies
Parámetros del modelo

3.3 MÉTODOS DE LA INVESTIGACIÓN

El método de la investigación fue deductivo-demostrativo, empleando definiciones y teoremas que conciernen a la existencia de puntos de equilibrio y también que conciernen a la estabilidad local y global de puntos equilibrio del modelo propuesto para la investigación.

3.4 DISEÑO O ESQUEMA DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño utilizado en esta investigación será del tipo no experimental, que según Hernández et al. (2014) menciona “la variable a analizar no es posible manipularlas, en el contexto más amplio son fijas o dadas”.

3.5 POBLACIÓN Y MUESTRA

Por ser este trabajo teórico, no existe población que estudiar. Sin embargo, nuestro estudio se encuentra dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias y los sistemas dinámicos.

3.6 ACTIVIDADES DEL PROCESO INVESTIGATIVO

3.6.1 FASE INICIAL

En la fase inicial se planteó el modelo a investigar y se buscó la información necesaria para la investigación tanto en libros, tesis y artículos, permitiéndonos de este modo tener una visión panorámica de las teorías a aplicar.

3.6.2 FASE INTERMEDIA

En la fase intermedia se analizó la existencia de los puntos libre de infección y punto de equilibrio endémico, además de la estabilidad local y global de estos.

3.6.3 FASE FINAL

En la fase final se realizó la simulación numérica y la contrastación de las hipótesis, llegando a darse conclusiones y recomendaciones basadas en la investigación.

3.7 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

La técnica que se utilizó para recabar la información fue el análisis documental, se recolectaron los datos de libros, revistas, páginas web y el instrumento utilizado fue la ficha de registro.

3.7.1 PROCESAMIENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Se tomaron valores para los parámetros del modelo de investigaciones que trabajaron con modelos con características similares al modelo planteado en la presente investigación. Dada la estabilidad global de los puntos de equilibrio endémico y libre de infección, se tomaron valores iniciales para el modelo planteado que pertenecían al conjunto globalmente atractivo para el sistema de ecuaciones del modelo planteado.

3.7.2 TÉCNICAS Y PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS

Respecto a la técnica de análisis de datos se realizó simulaciones numéricas en código Python corridas en la plataforma virtual de Google colab. Estas simulaciones se presentan en diversas gráficas que permiten extraer información cualitativa importante para el análisis de la dinámica de la malaria.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL MODELO

Con el fin de simplicidad en el modelo propuesto utilizamos los cambios $N_v = S_v + I_v$ y $N_h = S_h + I_h$ en el modelo planteado en el capítulo I, lo cual nos da el siguiente sistema equivalente a:

$$(4.1) \dots \begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = gN_v - dL - d_1L^2 - \lambda_vL - \alpha_1vLP - \alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP \\ \frac{dN_v(t)}{dt} = \lambda_vL - d_vN_v - m_v(N_v)^2 \\ \frac{dP(t)}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1vLP - qeP \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta(N_v - I_v) \frac{I_h}{N_h} - d_vI_v - m_vI_vN_v \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu)I_h - m_hI_hN_h \\ \frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_hN_h - \mu I_h - m_h(N_h)^2 \end{cases}$$

Con valores iniciales:

$$L(0) = L^0 \geq 0, N_v(0) = N_v^0 \geq 0, P(0) = P^0 \geq 0, I_v(0) = I_v^0 \geq 0, I_h(0) = I_h^0 \geq 0,$$

$$N_h(0) = N_h^0 > 0$$

Definimos la función $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, si $X = (L, N_v, P, I_v, I_h, N_h)$:

$$f(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X))$$

Donde:

$$f_1(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = gN_v - dL - d_1L^2 - \lambda_vL - \alpha_1vLP - \alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP$$

$$f_2(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = \lambda_vL - d_vN_v - m_v(N_v)^2$$

$$f_3(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1vLP - qeP$$

$$f_4(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = c\beta(N_v - I_v) \frac{I_h}{N_h} - d_vI_v - m_vI_vN_v$$

$$f_5(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu)I_h - m_hI_hN_h$$

$$f_6(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) = \Gamma - d_hN_h - \mu I_h - m_h(N_h)^2$$

Luego el sistema (4.1) queda como:

$$X' = f(X)$$

Se observa que el sistema (4.1) es un sistema autónomo, es decir el tiempo t es una variable implícita en el sistema. Las derivadas parciales para la función f son:

$$\frac{\partial f}{\partial L} = (-d - 2d_1L - \lambda_v - \alpha_1 vP - \alpha_1 \alpha_2 (1-v)qeP, \gamma \alpha_1 vP, 0, \lambda_v, 0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial N_v} = \left(g, 0, c\beta \frac{I_h}{N_h} - m_v I_v, -d_v - 2N_v m_v, 0, 0 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \left(-\alpha_1 vL - \alpha_1 \alpha_2 (1-v)Lqe, r \left(1 - \frac{2P}{K} \right) + \gamma \alpha_1 vL - qe, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_v} = \left(0, 0, -c\beta \frac{I_h}{N_h} - d_v - m_v N_v, 0, b\beta \frac{(N_h - I_h)}{N_h}, 0 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_h} = \left(0, 0, c\beta (N_v - I_v) \frac{1}{N_h}, 0, -b\beta \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu) - m_h N_h, -\mu \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial N_h} = \left(0, 0, -c\beta (N_v - I_v) \frac{I_h}{(N_h)^2}, 0, b\beta \frac{I_h I_v}{(N_h)^2} - m_h I_h, -d_h - 2N_h m_h \right)$$

Teorema 4.1.1

Sea $U = \{(L, N_v, P, I_v, I_h, N_h) \in \mathbb{R}^6 : L \geq 0, P \geq 0, N_v \geq 0, I_v \geq 0, N_h > 0, I_h \geq 0\}$

Si $L(0) = L^0 \geq 0, N_v(0) = N_v^0 \geq 0, P(0) = P^0 \geq 0, I_v(0) = I_v^0 \geq 0, I_h(0) = I_h^0 \geq 0,$

$N_h(0) = N_h^0 > 0$ son las condiciones iniciales del sistema (4.1), entonces las soluciones del sistema pertenecen al conjunto U .

Prueba:

Debemos probar que $L(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, por contradicción, supongamos que $\exists t_1 \geq 0$ y $\delta_1 > 0$ tal que $L(t_1) = 0, L'(t) < 0, \forall t \in [t_1, t_1 + \delta_1]$ y $N_v(t) \geq 0, \forall t \in [t_1, t_1 + \delta_1]$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t_1)}{dt} &= gN_v(t_1) - dL(t_1) - d_1L(t_1)^2 - \lambda_v L(t_1) - \alpha_1 vL(t_1)P(t_1) \\ &\quad - \alpha_1 \alpha_2 (1-v)L(t_1)qeP(t_1) \end{aligned}$$

$$\frac{dL(t_1)}{dt} = gN_v(t_1) \geq 0$$

Lo cual es una contradicción. Ahora debemos de probar que $N_v(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, por contradicción supongamos que $\exists t_2 \geq 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $N_v(t_2) = 0, N'_v(t) < 0, \forall t \in [t_2, t_2 + \delta_2]$ y $L(t) \geq 0, \forall t \in [t_2, t_2 + \delta_2]$, entonces se tiene que:

$$\frac{dN_v(t_2)}{dt} = \lambda_v L(t_2) - d_v N_v(t_2) - m_v (N_v(t_2))^2 \Rightarrow \frac{dN_v(t_2)}{dt} = \lambda_v L(t_2) \geq 0$$

Lo cual es una contradicción. Probamos que $P(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, por contradicción supongamos que $\exists t_3 \geq 0$ y $\delta_3 > 0$ tal que $P(t_3) = 0$ y $P'(t) < 0, \forall t \in [t_3, t_3 + \delta_3]$, entonces se tiene que:

$$\frac{dP(t_3)}{dt} = rP(t_3) \left(1 - \frac{P(t_3)}{K}\right) + \gamma \alpha_1 v L(t_3) P(t_3) - qeP(t_3) \Rightarrow \frac{dP(t_3)}{dt} = 0$$

Lo cual es una contradicción. Luego probamos que $I_v(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, por contradicción supongamos que $\exists t_4 \geq 0$ y $\delta_4 > 0$ tal que $I_v(t_4) = 0, I'_v(t) < 0, \forall t \in [t_4, t_4 + \delta_4]$, $N_h(t) > 0$ y $I_h(t) \geq 0, \forall t \in [t_4, t_4 + \delta_4]$, entonces se tiene que:

$$\frac{dI_v(t_4)}{dt} = c\beta(N_v(t_4) - I_v(t_4)) \frac{I_h(t_4)}{N_h(t_4)} - d_v I_v(t_4) - m_v I_v(t_4) N_v(t_4)$$

$$\frac{dI_v(t_4)}{dt} = c\beta(N_v(t_4)) \frac{I_h(t_4)}{N_h(t_4)} \geq 0$$

Lo cual contradice lo supuesto. Ahora probamos que $I_h(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, por contradicción supongamos que $\exists t_5 \geq 0$ y $\delta_5 > 0$ tal que $I_h(t_5) = 0, I'_h(t) < 0, \forall t \in [t_5, t_5 + \delta_5]$ y $I_v(t) \geq 0, \forall t \in [t_5, t_5 + \delta_5]$, luego:

$$\frac{dI_h(t_5)}{dt} = b\beta(N_h(t_5) - I_h(t_5)) \frac{I_v(t_5)}{N_h(t_5)} - (d_h + \rho + \mu)I_h(t_5) - m_h I_h(t_5) N_h(t_5)$$

$$\frac{dI_h(t_5)}{dt} = b\beta I_v(t_5) \geq 0$$

Esto contradice lo supuesto. Debemos probar que $N_h(t) > 0, \forall t \geq 0$, por contradicción supongamos que $\exists t_6 \geq 0$ y $\delta_6 > 0$ tal que $N_h(t_6) = 0, N'_h(t) < 0, \forall t \in [t_6, t_6 + \delta_6]$ y $\frac{\Gamma}{\mu} \geq I_h(t) \geq 0, \forall t \in [t_6, t_6 + \delta_6]$, luego:

$$\frac{dN_h(t_6)}{dt} = \Gamma - d_h N_h(t_6) - \mu I_h(t_6) - m_h (N_h(t_6))^2$$

$$\frac{dN_h(t_6)}{dt} = \Gamma - \mu I_h(t_6) \geq 0. \quad \text{Esto contradice lo supuesto.} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.1.2

El sistema (4.1) tiene una única solución acotada con valor inicial $x^0 = (L^0, N_v^0, P^0, I_v^0, I_h^0, N_h^0) \in W = \{(L, N_v, P, I_v, I_h, N_h) \in U: I_v \leq N_v, I_h \leq N_h\}$. Además, el conjunto compacto:

$$\Omega = \left\{ (L, N_v, P, I_v, I_h, N_h) \in W: L \leq \frac{g\lambda_v}{d_1 d_v}, P \leq \frac{K}{r} \left(\gamma \alpha_1 v \frac{g\lambda_v}{d_v d_1} + (r - qe) \right), \right. \\ \left. N_v \leq \frac{g}{d_1} \left(\frac{\lambda_v}{d_v} \right)^2, N_h \leq \frac{\Gamma}{d_h}, I_h \leq N_h, I_v \leq N_v \right\}$$

Atrae a todas las soluciones positivas en W .

Prueba:

Para cualquier $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in W$. Definimos

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x))$$

Donde

$$f_1(x) = gx_2 - dx_1 - d_1 x_1^2 - \lambda_v x_1 - \alpha_1 v x_1 x_3 - \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) q e x_1 x_3$$

$$f_2(x) = \lambda_v x_1 - d_v x_2 - m_v x_2^2$$

$$f_3(x) = r x_3 \left(1 - \frac{x_3}{K} \right) + \gamma \alpha_1 v x_1 x_3 - q e x_3$$

$$f_4(x) = \beta (x_2 - x_4) \frac{x_5}{x_6} - d_v x_4 - m_v x_4 x_2$$

$$f_5(x) = b \beta (x_6 - x_5) \frac{x_4}{x_6} - (d_h + \rho + \mu) x_5 - m_h x_6 x_5$$

$$f_6(x) = \Gamma - d_h x_6 - \mu x_5 - m_h x_6^2$$

Desde que $f \in C^1(\text{int}(U))$ se sigue que el sistema (4.1) tiene una única solución $u(t, x)$ sobre su intervalo maximal de existencia $]a, b[$ con $0 \in]a, b[$ y $u(0) = x$ por el teorema 2.3.1. Sea $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x), u_4(t, x), u_5(t, x), u_6(t, x)) \in \mathbb{R}_+^6$. para todo $t \in]a, b[$, con $u_5(t, x) \leq u_6(t, x)$ y $u_4(t, x) \leq x_2(t, x)$. En efecto para todo $t \in]a, b[$ se cumple $I_v(t, x) \leq N_v(t, x)$. Por contradicción supongamos que

existe que $\exists t_1 \geq 0$ y $\delta_1 > 0$ tal que $I_v(t_1, x) = N_v(t_1, x)$ y $I_v(t, x) > N_v(t, x)$, $\forall t \in]t_1, t_1 + \delta_1[$, entonces:

$$\frac{dI_v(t_1)}{dt} = c\beta(N_v(t_1) - I_v(t_1)) \frac{I_h(t_1)}{N_h(t_1)} - d_v I_v(t_1) - m_v I_v(t_1) N_v(t_1)$$

$$\frac{dI_v(t_1)}{dt} = -d_v I_v(t_1) - m_v I_v(t_1) N_v(t_1)$$

$$\frac{dI_v(t_1)}{dt} = -d_v N_v(t_1) - m_v (N_v(t_1))^2 \leq \lambda_v L(t_1) - d_v N_v(t_1) - m_v (N_v(t_1))^2$$

$$\frac{dN_v(t_1)}{dt} = \lambda_v L(t_1) - d_v N_v(t_1) - m_v (N_v(t_1))^2 \Rightarrow \frac{dI_v(t_1)}{dt} \leq \frac{dN_v(t_1)}{dt}$$

Existe $\epsilon_1 \in]0, \delta_1[$ tal que $I_v(t) \leq N_v(t)$, $\forall t \in]t_1, t_1 + \epsilon_1[$ lo cual es una contradicción. Ahora probaremos que $I_h(t, x) \leq N_h(t, x)$, $\forall t \in]a, b[$. Por contradicción supongamos que existe que $\exists t_2 \geq 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $I_v(t_2, x) = N_v(t_2, x)$ y $I_v(t, x) > N_v(t, x)$, $\forall t \in]t_2, t_2 + \delta_2[$, entonces:

$$\frac{dI_h(t_2)}{dt} = b\beta(N_h(t_2) - I_h(t_2)) \frac{I_v(t_2)}{N_h(t_2)} - (d_h + \rho + \mu)I_h(t_2) - m_h I_h(t_2) N_h(t_2)$$

$$\frac{dI_h(t_2)}{dt} = -(d_h + \rho + \mu)I_h(t_2) - m_h I_h(t_2) N_h(t_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_h(t_2)}{dt} &= -\rho N_h(t_2) - d_h N_h(t_2) - \mu N_h(t_2) - m_h (N_h(t_2))^2 \\ &< \Gamma - d_h N_h(t_2) - \mu N_h(t_2) - m_h (N_h(t_2))^2 = \frac{dN_h(t_2)}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{dI_h(t_2)}{dt} < \frac{dN_h(t_2)}{dt}$$

Existe $\epsilon_2 \in]0, \delta_2[$ tal que $I_h(t) \leq N_h(t)$, $\forall t \in]t_2, t_2 + \epsilon_2[$ lo cual es una contradicción, con esto queda probado que $u(t, x) \in W$. Ahora probamos que la solución

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x), u_4(t, x), u_5(t, x), u_6(x))$$

es acotada sobre $\in]a, b[$. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{du_1}{dt} = gu_2 - d_1 u_1^2$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = \lambda_v u_1 - d_v u_2$$

Definimos la función:

$$f(u_1, u_2) = (gu_2 - d_1 u_1^2; \lambda_v u_1 - d_v u_2)$$

$$Df(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} -2d_1 u_1 & g \\ \lambda_v & -d_v \end{bmatrix}$$

- f es cooperativo sobre $\mathbb{R}_+^2$ ($\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \geq 0, 1 \leq i, j \leq 2, i \neq j$) y $Df(u_1, u_2)$ es irreducible para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$ (el dígrafo asociado a la matriz de pesos de $Df(u_1, u_2)$ es fuertemente conexo)
- $f(0,0) = (0,0)$ y $f_i(u_1, u_2) \geq 0, \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2$ con $u_i = 0; i = 1, 2$
- f es estrictamente subhomogénea sobre $\mathbb{R}_+^2$, es decir $f(p(u_1, u_2)) > pf(u_1, u_2)$ para cualquier $p \in]0,1[$ y $(u_1, u_2) \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$, verificando esto
 $f(pu_1, pu_2) = (gpu_2 - d_1 p^2 u_1^2; \lambda_v pu_1 - d_v pu_2)$
 $pf(u_1, u_2) = (pgu_2 - pd_1 u_1^2; p\lambda_v u_1 - pd_v u_2)$

Se puede observar que f es estrictamente subhomogénea.

Ahora evaluamos la matriz jacobiana en $(0,0)$

$$Df(u_1, u_2)|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ \lambda_v & -d_v \end{bmatrix}$$

El radio espectral de $Df(0,0)$ es definido como

$$\rho(Df(0,0)) = \max\{Re \lambda; \det(\lambda I - Df(0,0)) = 0\}$$

la ecuación característica es:

$$(-x)(-d_v - x) - \lambda_v g = 0$$

$$x^2 + xd_v - \lambda_v g = 0$$

$$x = \frac{-d_v \pm \sqrt{d_v^2 + 4\lambda_v g}}{2} \Rightarrow \rho(Df(0,0)) > 0$$

Entonces, de acuerdo con el teorema 2.7.1, el sistema tiene un punto de equilibrio

$\left(\frac{g\lambda_v}{d_v d_1}; \frac{g}{d_1} \left(\frac{\lambda_v}{d_v}\right)^2\right)$ globalmente asintóticamente estable con respecto a todos los

valores iniciales en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$

Ahora tenemos

$$\frac{dL}{dt} \leq gN_v - d_1 L^2$$

$$\frac{dN_v(t)}{dt} \leq \lambda_v L - d_v N_v$$

Acorde al principio de comparación existe M_1 y M_2 tal que:

$$L_v(t) \leq M_1, \quad N_v(t) \leq M_2, \forall t \in [0, \sigma_x[$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1 vLP - qeP$$

$$\frac{dP(t)}{dt} \leq rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1 vM_1 P - qeP$$

$$K \frac{dP(t)}{dt} \leq (r(K - P) + K\gamma\alpha_1 vM_1 - Kqe)P$$

$$K \frac{dP(t)}{dt} \leq (K\gamma\alpha_1 vM_1 + K(r - qe) - rP)P$$

Primero suponemos que

$$0 \leq K\gamma\alpha_1 vM_1 + K(r - qe) - rP \Rightarrow P \leq \frac{K}{r}(\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe))$$

De donde obtenemos directamente que

$$P \leq \frac{K}{r} \left(\gamma\alpha_1 v \frac{g\lambda_v}{d_v d_1} + (r - qe) \right)$$

Ahora vamos a suponer que

$$0 > K\gamma\alpha_1 vM_1 + K(r - qe) - rP \Rightarrow P > \frac{K}{r}(\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe))$$

$$K \frac{dP(t)}{dt} \leq (K\gamma\alpha_1 vM_1 + K(r - qe) - rP)P$$

$$K \frac{1}{(rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe))P} \frac{dP(t)}{dt} \leq -1$$

$$\frac{1}{\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe)} \left(\frac{r}{rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)} - \frac{1}{P} \right) \frac{dP(t)}{dt} \leq -1$$

$$\frac{1}{\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe)} (\ln|rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)| - \ln|P| - \ln|rP(0) - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)| + \ln|P(0)|) \leq -t$$

$$\left(\ln \left| \frac{rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)}{P} \right| + \ln \left| \frac{P(0)}{rP(0) - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)} \right| \right) \leq -t(\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe))$$

$$\left(\frac{rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)}{P} \right) \left(\frac{P(0)}{rP(0) - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)} \right) \leq e^{-t(\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe))}$$

$$\frac{rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)}{P} \leq e^{-t(\gamma\alpha_1 vM_1 + (r - qe))} \left(\frac{rP(0) - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)}{P(0)} \right)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\frac{rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe)}{P} \leq 0$$

$$rP - K\gamma\alpha_1 vM_1 - K(r - qe) \leq 0$$

$$rP \leq K\gamma\alpha_1 vM_1 + K(r - qe)$$

$$rP \leq K\gamma\alpha_1 v \frac{g\lambda_v}{d_v d_1} + K(r - qe)$$

Por lo que en ambos casos concluimos que

$$P \leq \frac{K}{r} \left(\gamma\alpha_1 v \frac{g\lambda_v}{d_v d_1} + (r - qe) \right)$$

Por los argumentos previos tenemos que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (L_v(t), N_v(t)) \leq \left(\frac{g\lambda_v}{d_v d_1}; \frac{g}{d_1} \left(\frac{\lambda_v}{d_v} \right)^2 \right)$$

Además

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P(t) \leq \frac{K}{r} \left(\gamma\alpha_1 v \frac{g\lambda_v}{d_v d_1} + (r - qe) \right)$$

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h N_h - \mu I_h - m_h (N_h)^2 \leq \Gamma - d_h N_h$$

$$\frac{dN_h(t)}{dt} + d_h N_h \leq \Gamma \Rightarrow e^{d_h t} \left(\frac{dN_h(t)}{dt} + d_h N_h \right) \leq \Gamma e^{d_h t}$$

$$(e^{d_h t} N_h)' \leq \Gamma e^{d_h t}$$

$$e^{d_h t} N_h - N_h(0) \leq \Gamma \int_0^t e^{d_h s} ds$$

$$e^{d_h t} N_h - N_h(0) \leq \Gamma \left(\frac{e^{d_h t}}{d_h} - \frac{1}{d_h} \right)$$

$$N_h \leq \Gamma \left(\frac{1}{d_h} - \frac{e^{-d_h t}}{d_h} \right) + N_h(0) e^{-d_h t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$N_h \leq \frac{\Gamma}{d_h}$$

Por lo tanto Ω es globalmente atractivo, además la solución $u(t, x)$ es acotada en $[0, b[$ así tenemos que $b = \infty$ (ver el teorema 2.3.2 y corolario 2.3.1) ■

4.2 EXISTENCIA DEL PUNTO LIBRE DE INFECCIÓN

Teorema 4.2.1:

El sistema (4.1) tiene un único punto de equilibrio libre de infección:

$$D(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)$$

Con $N_v^* \neq 0, P^* \neq 0$ tal que:

$$\frac{d_v r(d + \lambda_v + (\alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2(1 - v)qe)K)}{(\alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2(1 - v)qe)Kqed_v + rg\lambda_v} < 1 \quad , \quad d_v N_v^* + m_v(N_v^*)^2 > \frac{(qe - r)\lambda_v}{\gamma \alpha_1 v}$$

Y N_v^* es la raíz real positiva de la ecuación

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde:

$$a_3 = d_1(m_v)^2 + \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(m_v)^2$$

$$a_2 = 2d_1 d_v m_v + 2\frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v m_v d_v$$

$$a_1 = d_1(d_v)^2 + (d + \lambda_v)\lambda_v m_v + AK\lambda_v m_v + \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 - \frac{AK}{r}\lambda_v qe m_v$$

$$a_0 = -g(\lambda_v)^2 + d\lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK\lambda_v d_v - \frac{AK}{r}\lambda_v qe d_v$$

$$A = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2(1 - v)qe$$

$$P^* = \frac{K}{r} \left(r + \gamma\alpha_1 v \left(\frac{d_v N_v^* + m_v(N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) - qe \right)$$

$$L^* = \frac{d_v N_v^* + m_v(N_v^*)^2}{\lambda_v}$$

$$N_h^* = \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h} = \frac{2\Gamma}{d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}$$

Prueba:

Reemplazando $I_h = 0$ e $I_v = 0$ en el sistema de ecuaciones diferenciales (4.1) e igualando a cero cada ecuación, tenemos:

$$\frac{dL}{dt} = gN_v - dL - d_1 L^2 - \lambda_v L - \alpha_1 v LP - \alpha_1 \alpha_2(1 - v)LqeP = 0 \dots (i)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1 vLP - qeP = 0 \dots (ii)$$

$$\frac{dI_v(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dN_v(t)}{dt} = \lambda_v L - d_v N_v - m_v (N_v)^2 = 0 \dots (iii)$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h N_h - m_h (N_h)^2 = 0 \dots (iv)$$

De la ecuación (iii) se tiene

$$L^* = \frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v}$$

De la ecuación (ii) tenemos:

$$P \left[r \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1 vL - qe \right] = 0$$

$$\text{Si } P^* \neq 0 \Rightarrow P^* = \frac{(r + \gamma\alpha_1 vL^* - qe)K}{r}; \text{ con } L^* > \frac{qe - r}{\gamma\alpha_1 v}$$

$$P^* = \frac{K}{r} \left(r + \gamma\alpha_1 v \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) - qe \right)$$

Si $A = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1 - v)qe$. Reemplazando L^* y P^* en la ecuación (i):

$$\begin{aligned} gN_v^* - d_1 \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right)^2 - (d + \lambda_v) \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) \\ - A \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) \left(\frac{K}{r} \right) \left(r + \gamma\alpha_1 v \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) - qe \right) = 0 \end{aligned}$$

Si $N_v^* \neq 0$:

$$\Rightarrow g - \frac{d_1}{\lambda_v^2} (d_v^2 N_v^* + 2d_v m_v (N_v^*)^2 + m_v^2 (N_v^*)^3) - (d + \lambda_v) \left(\frac{d_v + m_v N_v^*}{\lambda_v} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -A \left(\frac{d_v + m_v N_v^*}{\lambda_v} \right) \left(\frac{K}{r} \right) \left(r + \gamma \alpha_1 v \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) - qe \right) = 0 \\
& \Rightarrow g - \frac{d_1}{\lambda_v^2} (d_v^2 N_v^* + 2d_v m_v (N_v^*)^2 + m_v^2 (N_v^*)^3) - (d + \lambda_v) \left(\frac{d_v}{\lambda_v} \right) - (d + \lambda_v) \left(\frac{m_v N_v^*}{\lambda_v} \right) \\
& -A \left(\frac{d_v + m_v N_v^*}{\lambda_v} \right) K - A \left(\frac{d_v + m_v N_v^*}{\lambda_v} \right) \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v \left(\frac{d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2}{\lambda_v} \right) \\
& + A \left(\frac{d_v + m_v N_v^*}{\lambda_v} \right) \left(\frac{K}{r} \right) qe = 0 \\
& \Rightarrow g \lambda_v^2 - d_1 (d_v^2 N_v^* + 2d_v m_v (N_v^*)^2 + m_v^2 (N_v^*)^3) - (d + \lambda_v) d_v \lambda_v - (d + \lambda_v) m_v N_v^* \lambda_v \\
& - \lambda_v A (d_v + m_v N_v^*) K - A (d_v + m_v N_v^*) \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v (d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2) \\
& + A \lambda_v (d_v + m_v N_v^*) \left(\frac{K}{r} \right) qe = 0 \\
& \Rightarrow g \lambda_v^2 - d_1 (d_v^2 N_v^* + 2d_v m_v (N_v^*)^2 + m_v^2 (N_v^*)^3) - (d + \lambda_v) d_v \lambda_v - (d + \lambda_v) m_v N_v^* \lambda_v \\
& - \lambda_v A (d_v + m_v N_v^*) K - A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v [(d_v)^2 + 2d_v m_v N_v^* + (m_v)^2 (N_v^*)^2] N_v^* \\
& + A \lambda_v (d_v + m_v N_v^*) \left(\frac{K}{r} \right) qe = 0 \\
& \Rightarrow g \lambda_v^2 - d_1 d_v^2 N_v^* - 2d_1 d_v m_v (N_v^*)^2 - d_1 m_v^2 (N_v^*)^3 - (d + \lambda_v) d_v \lambda_v - (d \\
& \quad + \lambda_v) \lambda_v m_v N_v^* \\
& - d_v \lambda_v A K - m_v \lambda_v A K N_v^* - A \left(\frac{K}{r} \right) N_v^* \gamma \alpha_1 v (d_v)^2 - 2A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v d_v m_v (N_v^*)^2 \\
& - A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v (m_v)^2 (N_v^*)^3 + A \frac{K}{r} \lambda_v qe d_v + A \frac{K}{r} \lambda_v qe m_v N_v^* = 0 \\
& \Rightarrow g \lambda_v^2 - d_1 d_v^2 N_v^* - 2d_1 d_v m_v (N_v^*)^2 - d_1 m_v^2 (N_v^*)^3 - (d + \lambda_v) d_v \lambda_v - (d \\
& \quad + \lambda_v) \lambda_v m_v N_v^* \\
& - d_v \lambda_v A K - m_v \lambda_v A K N_v^* - A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v (d_v)^2 N_v^* - 2A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v d_v m_v (N_v^*)^2
\end{aligned}$$

$$-A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v(m_v)^2(N_v^*)^3 + A\frac{K}{r}\lambda_v qed_v + A\frac{K}{r}\lambda_v qem_v N_v^* = 0$$

$$\Rightarrow \left(d_1 m_v^2 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v(m_v)^2\right)(N_v^*)^3 + \left(2d_1 d_v m_v + 2A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v d_v m_v\right)(N_v^*)^2$$

$$+ \left(d_1 d_v^2 + (d + \lambda_v)\lambda_v m_v + m_v \lambda_v AK + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 - A\frac{K}{r}\lambda_v qem_v\right)N_v^*$$

$$+ (-g\lambda_v^2 + (d + \lambda_v)d_v \lambda_v + d_v \lambda_v AK - A\frac{K}{r}\lambda_v qed_v) = 0$$

$$\begin{aligned} q(x) = (m_v)^2 & \left(d_1 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v\right)x^3 + 2d_v m_v \left(d_1 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v\right)x^2 \\ & + \left(d_1 d_v^2 + (d + \lambda_v)\lambda_v m_v + m_v \lambda_v AK + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 - A\frac{K}{r}\lambda_v qem_v\right)x \\ & + (-g\lambda_v^2 + (d + \lambda_v)d_v \lambda_v + d_v \lambda_v AK - A\frac{K}{r}\lambda_v qed_v) \end{aligned}$$

Calculemos la primera y segunda derivada de $q(x)$

$$\begin{aligned} q'(x) = 3(m_v)^2 & \left(d_1 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v\right)x^2 + 4d_v m_v \left(d_1 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v\right)x \\ & + \left(d_1 d_v^2 + (d + \lambda_v)\lambda_v m_v + m_v \lambda_v AK + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 - A\frac{K}{r}\lambda_v qem_v\right) \end{aligned}$$

$$q''(x) = 6(m_v)^2 \left(d_1 + A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v\right)x + 2 \left(2d_1 d_v m_v + 2A\left(\frac{K}{r}\right)\gamma\alpha_1 v d_v m_v\right)$$

Se puede notar que $q''(x) > 0, \forall x \in [0, \infty[$, es decir el polinomio es cóncavo hacia arriba en $[0, \infty[$. Para que el polinomio $q(x)$ tenga una raíz real positiva se pueden presentar lo siguiente.

Caso I:

$$d\lambda_v m_v + d_1(d_v)^2 + (\lambda_v)^2 m_v + \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 + AK\lambda_v m_v - \frac{AK}{r}\lambda_v qem_v < 0$$

y

$$-g(\lambda_v)^2 + d\lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK\lambda_v d_v - \frac{AK}{r}\lambda_v qed_v < 0$$

$$\Rightarrow r(dd_v + \lambda_v d_v + AKd_v) < AKqed_v + rg\lambda_v$$

$$\Rightarrow \frac{d_v r(d + \lambda_v + AK)}{AKqed_v + rg\lambda_v} < 1$$

Caso II:

$$\lambda_v m_v + d_1(d_v)^2 + (\lambda_v)^2 m_v + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v(d_v)^2 + AK \lambda_v m_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e m_v > 0$$

$$-g(\lambda_v)^2 + d \lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK \lambda_v d_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e d_v < 0$$

$$\Rightarrow d_v r(d + \lambda_v + AK) < AK q e d_v + r g \lambda_v$$

$$\frac{d_v r(d + \lambda_v + AK)}{AK q e d_v + r g \lambda_v} < 1$$

Por lo tanto, para que haya una raíz real positiva se debe cumplir la condición:

$$\frac{d_v r(d + \lambda_v + AK)}{AK q e d_v + r g \lambda_v} < 1$$

Para que el polinomio $q(x)$ tenga dos raíces reales positivas se debe cumplir las condiciones:

$$d \lambda_v m_v + d_1(d_v)^2 + (\lambda_v)^2 m_v + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v(d_v)^2 + AK \lambda_v m_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e m_v < 0 \dots (v)$$

$$-g(\lambda_v)^2 + d \lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK \lambda_v d_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e d_v > 0 \dots (vi)$$

De la ecuación (vi):

$$-\frac{g(\lambda_v)^2}{d_v} + d \lambda_v + (\lambda_v)^2 + AK \lambda_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e > 0 \dots (vi)$$

$$-\frac{AK}{r} \lambda_v q e m_v > \frac{g(\lambda_v)^2 m_v}{d_v} - d \lambda_v m_v - (\lambda_v)^2 m_v - AK \lambda_v m_v$$

Reemplazamos en la ecuación (v):

$$\cancel{d \lambda_v m_v} + d_1(d_v)^2 + \cancel{(\lambda_v)^2 m_v} + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v(d_v)^2 + \cancel{AK \lambda_v m_v} + \frac{g(\lambda_v)^2 m_v}{d_v} - \cancel{d \lambda_v m_v} \\ - \cancel{(\lambda_v)^2 m_v} - \cancel{AK \lambda_v m_v}$$

$$< d \lambda_v m_v + d_1(d_v)^2 + (\lambda_v)^2 m_v + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v(d_v)^2 + AK \lambda_v m_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e m_v < 0$$

$$\Rightarrow d_1(d_v)^2 + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v (d_v)^2 + \frac{g(\lambda_v)^2 m_v}{d_v} < 0$$

Lo cual es un absurdo. Además, el polinomio $q(x)$ al ser cóncavo hacia arriba en $[0, \infty[$ solo puede tener una raíz real positiva.

De la ecuación (iv):

$$N_h^* = \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h}$$

El punto de equilibrio libre de infección es único (solución única). ■

4.3 NÚMERO REPRODUCTIVO BÁSICO R_0

El sistema de los infectados es:

$$\frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta(N_v - I_v) \frac{I_h}{N_h} - d_v I_v - m_v I_v N_v$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu) I_h - m_h I_h N_h$$

El número básico de reproducción, según el procedimiento visto en la sección 2.10, se define como el número de infecciones secundarias generadas por un individuo infectado típico en una población libre de enfermedad. El número de reproducción para nuestro modelo se calcula usando las matrices $\mathcal{F}$ y $\mathcal{V}$ que están dadas por:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} c\beta(N_v - I_v) \frac{I_h}{N_h} \\ b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} d_v I_v + m_v I_v N_v \\ (d_h + \rho + \mu) I_h + m_h I_h N_h \end{bmatrix}$$

Definimos las matrices F y V como las matrices de las derivadas parciales con respecto a las variables I_v e I_h de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{V}$ evaluados en el punto libre de infección $D(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)$, Con

$$N_h^* = \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h} \text{ y } \frac{d_v(d + \lambda_v + AK)}{g\lambda_v} < 1, A = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) qe$$

Tenemos:

$$F = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_h} \right|_D \\ \left. \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_h} \right|_D \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_h} \right|_D \\ \left. \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_h} \right|_D \end{bmatrix}$$

Calculando y evaluando en el punto D se obtiene

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c\beta N_v^*}{N_h^*} \\ b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} d_v + m_v N_v^* & 0 \\ 0 & d_h + \rho + \mu + m_h N_h^* \end{bmatrix}$$

La matriz de la próxima generación viene a ser dado por

$$FV^{-1}$$

Haciendo los cálculos necesarios

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_v + m_v N_v^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*} \end{bmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c\beta N_v^*}{(d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*)N_h^*} \\ \frac{b\beta}{N_v^* m_v + d_v} & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el radio espectral de la matriz FV^{-1} es el número reproductivo básico R_0 , así:

$$R_0 = \sqrt{\frac{bc\beta^2 N_v^*}{(N_v^* m_v + d_v)(d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*)N_h^*}}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{bc\beta^2 N_v^*}{(N_v^* m_v + d_v)(\rho N_h^* + \mu N_h^* + d_h N_h^* + m_h N_h^{*2})}}$$

Como $\Gamma - d_h N_h - m_h (N_h)^2 = 0 \Rightarrow \Gamma = d_h N_h^* + m_h (N_h^*)^2$ se tiene que

$$R_0 = \sqrt{\frac{bc\beta^2 N_v^*}{(N_v^* m_v + d_v)(\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma)}}$$

También

$$R_0^2 = \frac{bc\beta^2(N_v^*)}{(\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma)(d_v + m_v N_v^*)}$$

$$R_0^2 = \frac{bc\beta^2(N_v^*)}{(\rho + \mu + d_h + m_h N_h^*)(d_v + m_v N_v^*)N_h^*}$$

4.4 EXISTENCIA DEL PUNTO DE EQUILIBRIO ENDÉMICO

Teorema 4.4.1

El sistema (4.1) tiene por lo menos un punto de equilibrio endémico:

$$E(\hat{L}, \hat{N}_v, \hat{P}, \hat{I}_v, \hat{I}_h, \hat{N}_h)$$

Con , $\hat{N}_v \neq 0, \hat{P} \neq 0$ tal que:

$$\frac{d_v r(d + \lambda_v + (\alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2(1 - v)qe)K)}{(\alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2(1 - v)qe)K q e d_v + r g \lambda_v} < 1 \quad y \quad d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2 > \frac{(qe - r)\lambda_v}{\gamma \alpha_1 v}$$

$$\frac{-(d_h + \mu) + \sqrt{(d_h + \mu)^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h} < \hat{N}_h \leq \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h}$$

$\hat{N}_v$ es la única raíz real positiva de la ecuación

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$\hat{N}_h$ es una de las raíces reales positivas de la ecuación

$$b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

Donde:

$$a_3 = d_1(m_v)^2 + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v (m_v)^2$$

$$a_2 = 2d_1 d_v m_v + 2 \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v m_v d_v$$

$$a_1 = d_1(d_v)^2 + (d + \lambda_v)\lambda_v m_v + AK\lambda_v m_v + \frac{AK}{r} \gamma \alpha_1 v (d_v)^2 - \frac{AK}{r} \lambda_v q e m_v$$

$$a_0 = -g(\lambda_v)^2 + d\lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK\lambda_v d_v - \frac{AK}{r} \lambda_v q e d_v$$

$$b_4 = c\beta(m_h)^2$$

$$b_3 = m_h c \beta (d_h + \rho + \mu) + d_h c \beta m_h - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)$$

$$b_2 = m_h b c \beta^2 \hat{N}_v + d_h c \beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c \beta m_h$$

$$b_1 = \mu b c \beta^2 \hat{N}_v + d_h b c \beta^2 \hat{N}_v - \Gamma c \beta (d_h + \rho + \mu)$$

$$b_0 = -\Gamma b c \beta^2 \hat{N}_v$$

$$\hat{L} = \frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v}$$

$$\hat{P} = \frac{K}{r} \left(r - qe + \gamma \alpha_1 v \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) \right)$$

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) (\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2) \hat{N}_h}{b \beta (\mu \hat{N}_h + d_h \hat{N}_h + m_h (\hat{N}_h)^2 - \Gamma)}$$

$$\hat{I}_h = \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu}$$

Además, Si $R_0 > 1$ y

$$\begin{aligned} & 3c^2 \beta^2 (d_h + \rho + \mu)^2 + 3\mu^2 (d_v + m_v \hat{N}_v)^2 + 3c^2 \beta^2 d_h^2 + 2c^2 \beta^2 d_h (d_h + \rho + \mu) \\ & \quad + 4m_h \Gamma c^2 \beta^2 \\ & < 2c\beta\mu (d_h + \rho + \mu) (d_v + m_v \hat{N}_v) + 4m_h b c^2 \beta^3 \hat{N}_v + 2c\beta\mu d_h (d_v \\ & \quad + m_v \hat{N}_v) m_h \end{aligned}$$

Entonces, $\hat{N}_h$ tiene un único valor real positivo; es decir, E es único.

Prueba:

En el sistema de ecuaciones diferenciales (4.1) igualando a cero cada ecuación, tenemos:

$$gN_v - dL - d_1 L^2 - \lambda_v L - \alpha_1 v LP - \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) L q e P = 0 \dots (i)$$

$$rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) + \gamma \alpha_1 v LP - qeP = 0 \dots (ii)$$

$$\lambda_v L - d_v N_v - m_v (N_v)^2 = 0 \dots (iii)$$

$$c\beta(N_v - I_v)\frac{I_h}{N_h} - d_v I_v - m_v I_v N_v = 0 \dots (iv)$$

$$b\beta(N_h - I_h)\frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu)I_h - m_h I_h N_h = 0 \dots (v)$$

$$\Gamma - d_h N_h - \mu I_h - m_h (N_h)^2 = 0 \dots (vi)$$

De la ecuación (ii)

$$\hat{P} \neq 0 \Rightarrow r \left(1 - \frac{\hat{P}}{K}\right) + \gamma \alpha_1 v \hat{L} - qe = 0 \Rightarrow \hat{P} = K \left(\frac{r - qe + \gamma \alpha_1 v \hat{L}}{r} \right), \quad \hat{L} > \frac{qe - r}{\gamma \alpha_1 v}$$

De la ecuación (iii) se obtiene

$$\hat{L} = \frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \Rightarrow \frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} > \frac{qe - r}{\gamma \alpha_1 v} \Rightarrow d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2 > \frac{(qe - r) \lambda_v}{\gamma \alpha_1 v}$$

Ahora

$$\hat{P} = \frac{K}{r} \left(r - qe + \gamma \alpha_1 v \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) \right)$$

Si $A = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) qe$, reemplazando en la ecuación (i):

$$g \hat{N}_v - d \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) - d_1 \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right)^2 - \lambda_v \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) - A \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) \left(\frac{K}{r} \left(r - qe + \gamma \alpha_1 v \left(\frac{d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2}{\lambda_v} \right) \right) \right) = 0$$

Si $\hat{N}_v \neq 0$ entonces

$$g - d \left(\frac{d_v + m_v \hat{N}_v}{\lambda_v} \right) - d_1 \hat{N}_v \left(\frac{d_v + m_v \hat{N}_v}{\lambda_v} \right)^2 - \lambda_v \left(\frac{d_v + m_v \hat{N}_v}{\lambda_v} \right) - AK \left(\frac{d_v + m_v \hat{N}_v}{\lambda_v} \right) \left(\frac{r \lambda_v - \lambda_v qe + \gamma \alpha_1 v (d_v \hat{N}_v + m_v (\hat{N}_v)^2)}{r \lambda_v} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g(\lambda_v)^2 - d\lambda_v(d_v + m_v\hat{N}_v) - d_1\hat{N}_v(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - (\lambda_v)^2(d_v + m_v\hat{N}_v) \\
&\quad - \frac{AK}{r}(d_v + m_v\hat{N}_v)\left(r\lambda_v - \lambda_v qe + \gamma\alpha_1 v(d_v\hat{N}_v + m_v(\hat{N}_v)^2)\right) = 0 \\
&\Rightarrow g(\lambda_v)^2 - d\lambda_v(d_v + m_v\hat{N}_v) - d_1\hat{N}_v(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - (\lambda_v)^2(d_v + m_v\hat{N}_v) \\
&\quad - \left(d_v\frac{AK}{r} + m_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v\right)\left(r\lambda_v - \lambda_v qe + \gamma\alpha_1 v d_v\hat{N}_v + \gamma\alpha_1 v m_v(\hat{N}_v)^2\right) = 0 \\
&\Rightarrow g(\lambda_v)^2 - d\lambda_v(d_v + m_v\hat{N}_v) - d_1\hat{N}_v(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - (\lambda_v)^2(d_v + m_v\hat{N}_v) \\
&\quad - [r\lambda_v d_v\frac{AK}{r} - \lambda_v qe d_v\frac{AK}{r} + \gamma\alpha_1 v d_v d_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v + \gamma\alpha_1 v m_v d_v\frac{AK}{r}(\hat{N}_v)^2 + r\lambda_v m_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v \\
&\quad - \lambda_v qe m_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v + \gamma\alpha_1 v d_v m_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v\hat{N}_v + \gamma\alpha_1 v m_v m_v\frac{AK}{r}\hat{N}_v(\hat{N}_v)^2] = 0 \\
&\Rightarrow g(\lambda_v)^2 - d\lambda_v d_v - d\lambda_v m_v\hat{N}_v - d_1\hat{N}_v(d_v)^2 - 2d_1 d_v m_v(\hat{N}_v)^2 - d_1(\hat{N}_v)^3(m_v)^2 \\
&\quad - (\lambda_v)^2 d_v - (\lambda_v)^2 m_v\hat{N}_v - AK\lambda_v d_v + \frac{AK}{r}\lambda_v qe d_v - \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v\hat{N}_v(d_v)^2 \\
&\quad - \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v m_v d_v(\hat{N}_v)^2 - AK\lambda_v m_v\hat{N}_v + \frac{AK}{r}\lambda_v qe m_v\hat{N}_v \\
&\quad - \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v d_v m_v(\hat{N}_v)^2 - \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(m_v)^2(\hat{N}_v)^3 = 0 \\
&\Rightarrow \left(d_1(m_v)^2 + \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(m_v)^2\right)(\hat{N}_v)^3 + \left(2d_1 d_v m_v + 2\frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v m_v d_v\right)(\hat{N}_v)^2 \\
&\quad + \left(d\lambda_v m_v + (\lambda_v)^2 m_v + d_1(d_v)^2 + \frac{AK}{r}\gamma\alpha_1 v(d_v)^2 + AK\lambda_v m_v - \frac{AK}{r}\lambda_v qe m_v\right)\hat{N}_v \\
&\quad + \left(-g(\lambda_v)^2 + d\lambda_v d_v + (\lambda_v)^2 d_v + AK\lambda_v d_v - \frac{AK}{r}\lambda_v qe d_v\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) = & (m_v)^2 \left(d_1 + A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v \right) x^3 + 2d_v m_v \left(d_1 + A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v \right) x^2 \\
& + \left(d_1 d_v^2 + (d + \lambda_v) \lambda_v m_v + m_v \lambda_v A K + A \left(\frac{K}{r} \right) \gamma \alpha_1 v (d_v)^2 - A \frac{K}{r} \lambda_v q e m_v \right) x \\
& + (-g \lambda_v^2 + (d + \lambda_v) d_v \lambda_v + d_v \lambda_v A K - A \frac{K}{r} \lambda_v q e d_v)
\end{aligned}$$

Tenemos que $\hat{N}_v$ y N_v^* son raíces positivas de la misma ecuación, por lo cual $\hat{N}_v = N_v^*$. Como ya se probó en el teorema 4.4.1 el polinomio $q(x)$ tiene única raíz real positiva $\hat{N}_v$.

Ahora despejando $\hat{I}_h$ de la ecuación (vi):

$$\hat{I}_h = \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu}$$

Despejando $\hat{I}_v$ de la ecuación (v):

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) \hat{I}_h \hat{N}_h}{b\beta (\hat{N}_h - \hat{I}_h)}$$

Reemplazando $\bar{I}_h$ en $\hat{I}_v$:

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) \left(\frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu} \right) \bar{N}_h}{b\beta \left(\hat{N}_h - \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu} \right)}$$

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) (\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2) \hat{N}_h}{b\beta (\mu \hat{N}_h + d_h \hat{N}_h + m_h (\hat{N}_h)^2 - \Gamma)}$$

Para la positividad de $\hat{I}_v$ se tiene las siguientes condiciones

$$\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2 \geq 0 \Rightarrow m_h (\hat{N}_h)^2 + d_h \hat{N}_h - \Gamma \leq 0$$

Las raíces del polinomio son $\frac{-d_h \pm \sqrt{(d_h)^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h}$. Luego:

$$0 < \hat{N}_h \leq N_h^* = \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h}$$

y

$$\mu\hat{N}_h + d_h\hat{N}_h + m_h(\hat{N}_h)^2 - \Gamma > 0 \Rightarrow m_h(\hat{N}_h)^2 + (\mu + d_h)\hat{N}_h - \Gamma > 0$$

Caso contrario se llegaría a una contradicción ($\mu\hat{N}_h < 0$), entonces

$$\hat{N}_h > \frac{-(d_h + \mu) + \sqrt{(d_h + \mu)^2 + 4m_h\Gamma}}{2m_h}; \hat{N}_h < \frac{-(d_h + \mu) - \sqrt{(d_h + \mu)^2 + 4m_h\Gamma}}{2m_h}$$

Podemos concluir que:

$$0 < \frac{-(d_h + \mu) + \sqrt{(d_h + \mu)^2 + 4m_h\Gamma}}{2m_h} < \hat{N}_h \leq \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h\Gamma}}{2m_h}$$

Esto implica que

$$N_h^* - \frac{\mu}{2m_h} < \hat{N}_h \leq N_h^*$$

Despejando $\hat{I}_h$ de la ecuación (iv):

$$\hat{I}_h = \frac{(d_v + m_v\hat{N}_v)\hat{I}_v\hat{N}_h}{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}$$

A partir de las ecuaciones construimos una ecuación en términos de $\hat{N}_v$ y $\hat{N}_h$:

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h\hat{N}_h) \frac{(d_v + m_v\hat{N}_v)\hat{I}_v\hat{N}_h}{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)} \hat{N}_h}{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(d_v + m_v\hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h\hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2}{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}$$

$$\Rightarrow c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h) = (d_v + m_v\hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h\hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \dots (I)$$

Reemplazando $\hat{I}_v$ que se obtuvo en la ecuación (I):

$$\begin{aligned} c\beta \left(\hat{N}_v - \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h\hat{N}_h)\hat{I}_h\hat{N}_h}{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)} \right) b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h) \\ = (d_v + m_v\hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h\hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow c\beta \left(\hat{N}_v b\beta (\hat{N}_h - \hat{I}_h) - b\beta (\hat{N}_h - \hat{I}_h) \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) \hat{I}_h \hat{N}_h}{b\beta (\hat{N}_h - \hat{I}_h)} \right) \\
&\quad = (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \\
&\Rightarrow c\beta (\hat{N}_v b\beta (\hat{N}_h - \hat{I}_h) - (d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) \hat{I}_h \hat{N}_h) \\
&\quad = (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \\
&\Rightarrow (bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h - bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h - c\beta (d_h + \rho + \mu) \hat{I}_h \hat{N}_h - c\beta m_h \hat{I}_h (\hat{N}_h)^2) \\
&\quad = (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \dots \text{(II)}
\end{aligned}$$

Reemplazando $\hat{I}_h$ que se obtuvo en la ecuación (II):

$$\begin{aligned}
&\left(bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h - bc\beta^2 \hat{N}_v \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu} \right. \\
&\quad - c\beta (d_h + \rho + \mu) \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu} \hat{N}_h \\
&\quad \left. - c\beta m_h \frac{\Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2}{\mu} (\hat{N}_h)^2 \right) \\
&\quad = (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h)(\hat{N}_h)^2 \\
&\Rightarrow (\mu bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h - (-d_h bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h - m_h bc\beta^2 \hat{N}_v (\hat{N}_h)^2 + \Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v) \\
&\quad - (-d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) \hat{N}_h \hat{N}_h - m_h c\beta (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^3 \\
&\quad + \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu) \hat{N}_h) - c\beta m_h (-d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2 + \Gamma) \hat{N}_h \hat{N}_h) \\
&\quad = (\mu (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^2 + m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (\hat{N}_h)^3) \\
&\Rightarrow \mu bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h + d_h bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h + m_h bc\beta^2 \hat{N}_v (\hat{N}_h)^2 - \Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v \\
&\quad + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^2 + m_h c\beta (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^3 \\
&\quad - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu) \hat{N}_h \\
&\quad - (-d_h c\beta m_h (\hat{N}_h)^3 - c\beta (m_h)^2 (\hat{N}_h)^4 + \Gamma c\beta m_h (\hat{N}_h)^2) \\
&\quad = \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)(d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^2 + m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (\hat{N}_h)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \mu bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h + d_h bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{N}_h + m_h bc\beta^2 \hat{N}_v (\hat{N}_h)^2 - \Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^2 \\ & + m_h c\beta (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^3 - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu) \hat{N}_h + d_h c\beta m_h (\hat{N}_h)^3 + \\ & c\beta (m_h)^2 (\hat{N}_h)^4 - \Gamma c\beta m_h (\hat{N}_h)^2 = \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) (\hat{N}_h)^2 + m_h \mu (d_v + \\ & m_v \hat{N}_v) (\hat{N}_h)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & c\beta (m_h)^2 (\hat{N}_h)^4 + [m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)] (\hat{N}_h)^3 + [m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ & + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h] (\hat{N}_h)^2 \\ & + [bc\beta^2 \hat{N}_v (\mu + d_h) - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu)] \hat{N}_h - \Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = & c\beta (m_h)^2 x^4 + [m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)] x^3 + [m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ & + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h] x^2 \\ & + [bc\beta^2 \hat{N}_v (\mu + d_h) - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu)] x - \Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v \dots \text{(III)} \end{aligned}$$

Evaluando $p(x)$ en 0 se tiene

$$p(0) = -\Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v = b_0 < 0$$

Como el coeficiente de x^4 es positivo, entonces, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$; esto implica que por lo menos hay una raíz real positiva del polinomio (III) y que será un valor para $\hat{N}_h$.

Ahora, analizaremos condiciones para la unicidad de la raíz real positiva del polinomio (III). Obtenemos la primera y segunda derivada del polinomio $p(x)$

$$\begin{aligned} p'(x) = & 4c\beta (m_h)^2 x^3 + 3[m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)] x^2 + 2[m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ & + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h] x \\ & + [bc\beta^2 \hat{N}_v (\mu + d_h) - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p''(x) = & 12c\beta (m_h)^2 x^2 + 6[m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)] x + [m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ & + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h] \end{aligned}$$

Evaluamos $p(x)$ en N_h^* y usamos que $\hat{N}_v = N_v^*$

$$\begin{aligned}\Rightarrow p(N_h^*) &= \mu bc\beta^2 \hat{N}_v N_h^* + bc\beta^2 N_v^* (m_h (N_h^*)^2 + d_h N_h^*) - \Gamma bc\beta^2 N_v^* \\ &\quad + c\beta (d_h + \rho + \mu) N_h^* (m_h (N_h^*)^2 + d_h N_h^*) - \Gamma c\beta (d_h + \rho + \mu) N_h^* \\ &\quad + c\beta m_h N_h^{*2} (m_h (N_h^*)^2 + d_h N_h^*) - \Gamma c\beta m_h N_h^{*2} - \mu (d_v \\ &\quad + m_v N_v^*) N_h^* (m_h (N_h^*)^2 + d_h N_h^*) - \mu (d_v + m_v N_v^*) (\rho + \mu) N_h^{*2}\end{aligned}$$

$$p(N_h^*) = \mu N_h^* [bc\beta^2 N_v^* - (d_v + m_v N_v^*) (\Gamma + \rho N_h^* + \mu N_h^*)]$$

$$p(N_h^*) = \mu N_h^* [R_0^2 - 1]$$

Además, recordemos que se debe cumplir la desigualdad

$$0 < \hat{N}_h \leq N_h^*$$

Como $p(0) = -\Gamma bc\beta^2 \hat{N}_v < 0$, entonces para la ecuación $p(x) = 0$ se pueden presentar los siguientes casos para x :

- Si $R_0 \geq 1$ entonces $p(N_h^*) \geq 0$, entonces el polinomio $p(x)$ corta al eje x en algún $x = \hat{N}_h \in]0, N_h^*]$
- Si $R_0 < 1$ entonces $p(N_h^*) < 0$, entonces $x > N_h^*$ (ver la figura 7)

Si se cumple el primer caso, necesitamos que la gráfica de $p(x)$ sea cóncava hacia arriba en el intervalo $]0, \infty[$ para unicidad de su raíz (ver figura 8). Esto es si $p''(x) > 0, \forall x \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned}p''(x) &= 12c\beta (m_h)^2 x^2 + 6[m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)]x + [m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ &\quad + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h]\end{aligned}$$

Al ser $p''(x)$ un polinomio de grado 2 para que sea positivo se debe cumplir que su discriminante $\Delta < 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= 36[m_h c\beta (2d_h + \rho + \mu) - m_h \mu (d_v + m_v \hat{N}_v)]^2 - 48c\beta (m_h)^2 [m_h bc\beta^2 \hat{N}_v \\ &\quad + d_h c\beta (d_h + \rho + \mu) - \mu (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) - \Gamma c\beta m_h]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 36m_h^2 c^2 \beta^2 (2d_h + \rho + \mu)^2 + 36m_h^2 \mu^2 (d_v + m_v \hat{N}_v)^2 - 72m_h^2 c\beta \mu (2d_h + \rho + \mu) (d_v \\ &\quad + m_v \hat{N}_v) - 48m_h^3 bc^2 \beta^3 \hat{N}_v - 48d_h c^2 \beta^2 m_h^2 (d_h + \rho + \mu) \\ &\quad + 48\mu c\beta (m_h)^2 (d_v + m_v \hat{N}_v) (d_h + \rho + \mu) + 48\Gamma c^2 \beta^2 m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2[(d_h + d_h + \rho + \mu)^2 - d_h(d_h + \rho + \mu)] + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 \\ & - 24m_h^2c\beta\mu(2d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v \\ & - 12d_hc^2\beta^2m_h^2(d_h + \rho + \mu) + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2[(d_h + \rho + \mu)^2 + d_h^2 + 2d_h(d_h + \rho + \mu) - d_h(d_h + \rho + \mu)] \\ & + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - 24m_h^2c\beta\mu(2d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) \\ & - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v - 12d_hc^2\beta^2m_h^2(d_h + \rho + \mu) + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2(d_h + \rho + \mu)^2 + 36m_h^2c^2\beta^2d_h^2 + 36m_h^2c^2\beta^2d_h(d_h + \rho + \mu) \\ & + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - 24m_h^2c\beta\mu(2d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) \\ & - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v - 12d_hc^2\beta^2m_h^2(d_h + \rho + \mu) + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2(d_h + \rho + \mu)^2 + 36m_h^2c^2\beta^2d_h^2 + 24m_h^2c^2\beta^2d_h(d_h + \rho + \mu) \\ & + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - 24m_h^2c\beta\mu(d_h + d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) \\ & - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2(d_h + \rho + \mu)^2 + 36m_h^2c^2\beta^2d_h^2 + 24m_h^2c^2\beta^2d_h(d_h + \rho + \mu) \\ & + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 \\ & - (24m_h^2c\beta\mu d_h(d_v + m_v\hat{N}_v) + 24m_h^2c\beta\mu(d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v)) \\ & - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = & 36m_h^2c^2\beta^2(d_h + \rho + \mu)^2 + 36m_h^2c^2\beta^2d_h^2 + 24m_h^2c^2\beta^2d_h(d_h + \rho + \mu) \\ & + 36m_h^2\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 - 24m_h^2c\beta\mu d_h(d_v + m_v\hat{N}_v) \\ & - 24m_h^2c\beta\mu(d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) - 48m_h^3bc^2\beta^3\hat{N}_v + 48\Gamma c^2\beta^2m_h^3 \\ & < 0\end{aligned}$$

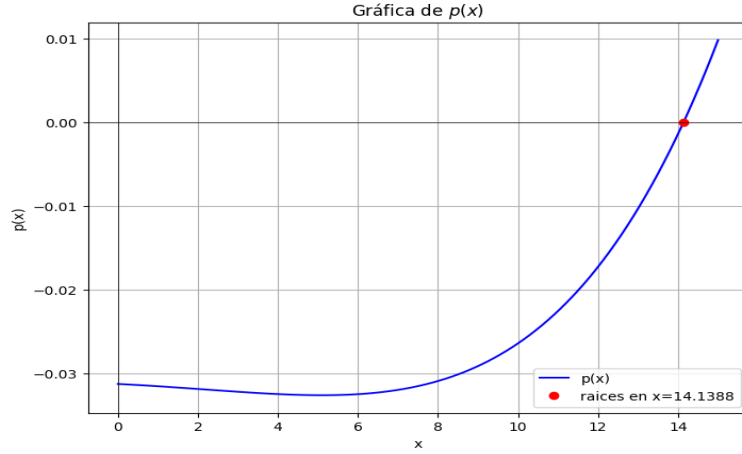
Entonces la condición es

$$\begin{aligned}3c^2\beta^2(d_h + \rho + \mu)^2 + 3\mu^2(d_v + m_v\hat{N}_v)^2 + 3c^2\beta^2d_h^2 + 2c^2\beta^2d_h(d_h + \rho + \mu) \\ + 4m_h\Gamma c^2\beta^2 \\ < 2c\beta\mu(d_h + \rho + \mu)(d_v + m_v\hat{N}_v) + 4m_hbc^2\beta^3\hat{N}_v + 2c\beta\mu d_h(d_v \\ + m_v\hat{N}_v)m_h\end{aligned}$$

Con esto se garantiza la unicidad de la raíz real positiva del polinomio (III) ■

Figura 7

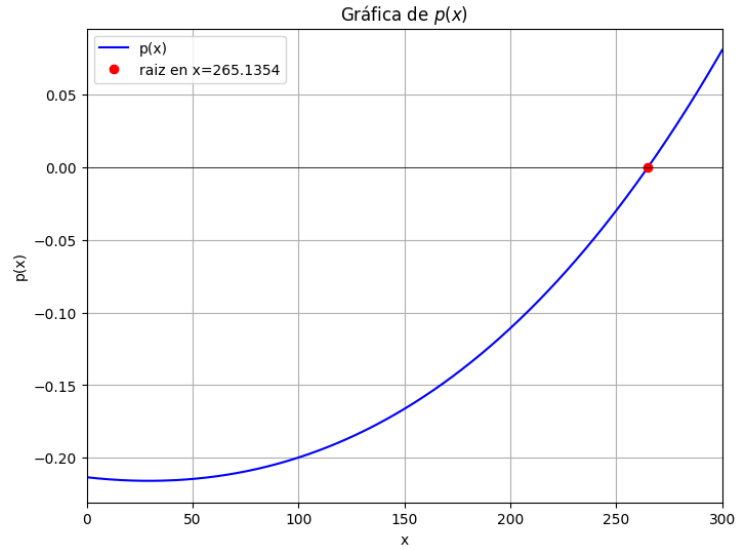
Grafica del polinomio p con $R_0 < 1$ tomando los valores de los parámetros de la tabla 4



Nota. Se tiene que $N_h^* = 14.1372$, así $N_h^* = 14.1372 < \hat{N}_v = 14.1388$

Figura 8

Grafica del polinomio p con $R_0 \geq 1$ tomando los valores de los parámetros de la tabla 5



Nota. Se tiene que $N_h^* = 269.0137$, así $0 < \hat{N}_v = 265.1354 \leq N_h^* = 269.0137$

Observación 4.4.1: De los procesos y ecuaciones obtenidas para hallar el punto libre de infección $D(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)$ y el punto de equilibrio endémico $E(\hat{L}, \hat{N}_v, \hat{P}, \hat{I}_v, \hat{I}_h, \hat{N}_h)$ se observa que $L^* = \hat{L}$, $P^* = \hat{P}$ y $N_v^* = \hat{N}_v$, además $\hat{N}_h \leq N_h^*$.

4.5 ESTABILIDAD LOCAL

En esta sección haremos un análisis cualitativo local del sistema (4.1), para lo cual definimos la función vectorial $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$$

Donde

$$f_1(x) = gx_2 - dx_1 - d_1x_1^2 - \lambda_v x_1 - \alpha_1 v x_1 x_3 - \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) q e x_1 x_3$$

$$f_2(x) = \lambda_v x_1 - d_v x_2 - m_v x_2^2$$

$$f_3(x) = r x_3 \left(1 - \frac{x_3}{K}\right) + \gamma \alpha_1 v x_1 x_3 - q e x_3$$

$$f_4(x) = \beta(x_2 - x_4) \frac{x_5}{x_6} - d_v x_4 - m_v x_4 x_2$$

$$f_5(x) = b\beta(x_6 - x_5) \frac{x_4}{x_6} - (d_h + \rho + \mu)x_5 - m_h x_6 x_5$$

$$f_6(x) = \Gamma - d_h x_6 - \mu x_5 - m_h x_6^2$$

La matriz jacobiana es:

$$J = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}$$

Donde $m_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Teorema 4.5.1:

El punto libre de infección $D(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)$ es localmente asintóticamente estable si $R_0 < 1$ y es localmente inestable si $R_0 > 1$, con $N_v^* \neq 0$, $P^* \neq 0$.

Prueba:

Evaluando la matriz jacobiana J en el punto libre de infección D:

$$J(D) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}$$

Donde

$$m_{11} = -d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^*; m_{12} = g; m_{13} = -AL^*; m_{21} = \lambda_v;$$

$$m_{22} = -d_v - 2m_vN_v^*; m_{31} = \gamma\alpha_1vP^*; m_{33} = r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe;$$

$$m_{44} = -d_v - m_vN_v^*; m_{45} = c\beta\frac{N_v^*}{N_h^*}; m_{54} = b\beta; m_{55} = -(d_h + \rho + \mu) - m_hN_h^*;$$

$$m_{65} = -\mu; m_{66} = -d_h - 2m_hN_h^*$$

Aquí $A = \alpha_1v + \alpha_1\alpha_2(1 - v)qe$. Además, todos los valores restantes de $J(D)$ son ceros. Luego el polinomio característico de la matriz jacobiana J es:

$$P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)$$

Donde

$$P_1(x) = (-d_v - 2N_v^*m_v - x)$$

$$P_2(x) = (b\beta)\left(-c\beta\frac{N_v^*}{N_h^*}\right) + (d_h + \rho + \mu + m_hN_h^* + x)(d_v + N_v^*m_v + x)$$

$P_3(x)$ es el polinomio carácterístico de la matriz:

$$\begin{bmatrix} -d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* & -AL^* & g \\ \gamma\alpha_1vP^* & r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe & 0 \\ \lambda_v & 0 & -d_v - 2m_vN_v^* \end{bmatrix}$$

Vemos que P_1 tiene raíz real negativa. Ahora, expandiendo el polinomio $P_2(x)$:

$$P_2(x) = x^2 + (d_h + \rho + \mu + m_hN_h^* + d_v + N_v^*m_v)x + (d_h + \rho + \mu + m_hN_h^*)(d_v + N_v^*m_v) + \left(-bc\beta^2\frac{N_v^*}{N_h^*}\right)$$

$$P_2(x) = x^2 + (d_h + \rho + \mu + m_h N_h^* + d_v + N_v^* m_v)x + (d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*)(d_v + N_v^* m_v) \left[1 - \frac{bc\beta^2 N_v^*}{(d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*)(d_v + N_v^* m_v)N_h^*} \right]$$

Del R_0 que se obtuvo tenemos:

$$R_0^2 = \frac{bc\beta^2(N_v^*)}{(\rho + \mu + d_h + m_h N_h^*)(d_v + m_v N_v^*)N_h^*}$$

Reemplazando en el termino independiente del polinomio $P_2(x)$ y analizamos su signo:

$$P_2(x) = x^2 + (d_h + \rho + \mu + m_h N_h^* + d_v + N_v^* m_v)x + (d_h + \rho + \mu + m_h N_h^*)(d_v + N_v^* m_v)[1 - R_0^2]$$

Si $R_0 < 1$, entonces, P_2 tiene dos raices reales negativas

Si $R_0 > 1$, entonces, P_2 tiene una raiz real positiva (inestable)

Expandiendo el polinomio $P_3(x)$:

$$P_3(x) = -g\lambda_v \left(r \left(1 - \frac{2P^*}{K} \right) + \gamma\alpha_1 vL^* - qe - x \right) + (-d_v - 2N_v^* m_v - x) \left((-d - 2d_1 L^* - \lambda_v - AP - x) \left(r \left(1 - \frac{2P^*}{K} \right) + \gamma\alpha_1 vL^* - qe - x \right) + \gamma\alpha_1 vAL^* P^* \right)$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & -x^3 + \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* + r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe - d_v - 2N_v^*m_v\right)x^2 \\
& + x \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \left(r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right) - \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right. \\
& + (d_v + 2N_v^*m_v) \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* + r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right) \\
& \left. + g\lambda_v \right] \\
& + \left[(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^*) \left(r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right) \right. \\
& \left. + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right] (-d_v - 2N_v^*m_v) - g\lambda_v \left(r\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right)
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$rP^* \left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^*P^* - qeP^* = 0 \Rightarrow r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe = 0$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & -x^3 + \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* - \frac{rP^*}{K} + r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe - d_v \right. \\
& \left. - 2N_v^*m_v\right)x^2 \\
& + x \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \left(-\frac{rP^*}{K} + r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right) \right. \\
& \left. - \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right. \\
& + (d_v + 2N_v^*m_v) \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* - \frac{rP^*}{K} + r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* \right. \\
& \left. - qe\right) + g\lambda_v \left] \right. \\
& + \left[(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^*) \left(-\frac{rP^*}{K} + r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right) \right. \\
& \left. + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right] (-d_v - 2N_v^*m_v) - g\lambda_v \left(-\frac{rP^*}{K} + r\left(1 - \frac{P^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vL^* - qe\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & -x^3 + \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* - \frac{rP^*}{K} - d_v - 2N_v^*m_v\right)x^2 \\
& + x \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \left(-\frac{rP^*}{K}\right) - \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right. \\
& + (d_v + 2N_v^*m_v) \left(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^* - \frac{rP^*}{K}\right) + g\lambda_v \Big] \\
& + \left[(-d - 2d_1L^* - \lambda_v - AP^*) \left(-\frac{rP^*}{K}\right) + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right] (-d_v - 2N_v^*m_v) \\
& - g\lambda_v \left(-\frac{rP^*}{K}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & -x^3 - \left(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^* + \frac{rP^*}{K} + d_v + 2N_v^*m_v\right)x^2 \\
& + x \left[-(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \frac{rP^*}{K} - \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right. \\
& - (d_v + 2N_v^*m_v) \left(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^* + \frac{rP^*}{K}\right) + g\lambda_v \Big] \\
& - \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \frac{rP^*}{K} + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right] (d_v + 2N_v^*m_v) + g\lambda_v \frac{rP^*}{K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_3(x) = & x^3 + \left(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^* + \frac{rP^*}{K} + d_v + 2N_v^*m_v\right)x^2 \\
& + x \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \frac{rP^*}{K} + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right. \\
& + (d_v + 2N_v^*m_v) \left(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^* + \frac{rP^*}{K}\right) - g\lambda_v \Big] \\
& + \left[(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*) \frac{rP^*}{K} + \gamma\alpha_1vAL^*P^* \right] (d_v + 2N_v^*m_v) - g\lambda_v \frac{rP^*}{K}
\end{aligned}$$

En el punto de equilibrio D se cumple:

$$gN_v^* - dL^* - d_1L^{*2} - \lambda_vL^* - AL^*P^* = 0 \Rightarrow g\lambda_v = \frac{\lambda_vL^*(d + d_1L^* + \lambda_v + AP^*)}{N_v^*}$$

$$\lambda_vL^* - d_vN_v^* - m_v(N_v^*)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_vL^* = d_vN_v^* + m_v(N_v^*)^2$$

$$g\lambda_v = \frac{(d_vN_v^* + m_v(N_v^*)^2)(d + d_1L^* + \lambda_v + AP^*)}{N_v^*}$$

$$g\lambda_v = (d_v + m_vN_v^*)(d + d_1L^* + \lambda_v + AP^*) < (d_v + 2N_v^*m_v)(d + 2d_1L^* + \lambda_v + AP^*)$$

Por lo que $\widetilde{P}_3$ tendría todos sus coeficientes positivos, esto implica que P_3 siempre tiene tres soluciones negativas, con esto concluimos la demostración del teorema. ■

Teorema 4.5.2:

El punto de equilibrio endémico $E(\hat{L}, \hat{N}_v, \hat{P}, \hat{I}_v, \hat{I}_h, \hat{N}_h)$ es localmente asintóticamente estable si $R_0 > 1$ y $\frac{\Gamma}{\mu} \geq \hat{N}_h$, con $\hat{N}_v \neq 0, \hat{P} \neq 0$.

Prueba:

Evaluando E en el jacobiano J

$$J(E) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}$$

Donde

$$m_{11} = -d - 2d_1\hat{L} - \lambda_v - A\hat{P}; m_{12} = g; m_{13} = -A\hat{L}; m_{21} = \lambda_v;$$

$$m_{22} = -d_v - 2m_v\hat{N}_v; m_{31} = \gamma\alpha_1 v\hat{P}; m_{33} = r\left(1 - \frac{2\hat{P}}{K}\right) + \gamma\alpha_1 v\hat{L} - qe;$$

$$m_{42} = c\beta \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - m_v\hat{I}_v; m_{44} = -c\beta \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - d_v - m_v\hat{N}_v; m_{45} = c\beta \frac{(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{\hat{N}_h};$$

$$m_{46} = -c\beta \frac{(\hat{N}_v - \hat{I}_v)\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2}; m_{54} = \frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h};$$

$$m_{55} = -b\beta \frac{\hat{I}_v}{\hat{N}_h} - (d_h + \rho + \mu) - m_h\hat{N}_h;$$

$$m_{56} = b\beta \frac{\hat{I}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} - m_h\hat{I}_h; m_{65} = -\mu; m_{66} = -d_h - 2m_h\hat{N}_h$$

Aquí $A = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1 - v)qe$, además todos los valores restantes de $J(E)$ son ceros. Luego el polinomio característico de la matriz jacobiana es

$$\begin{aligned}
P(x) = & -(d_h + 2m_h\hat{N}_h \\
& + x) \left[- \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} + x \right) \left(-d_v - m_v\hat{N}_v - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right. \right. \\
& \left. \left. - x \right) P_2(x) + \frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(-\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{\hat{N}_h} \right) P_2(x) \right] \\
& + \mu \left[\frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) P_2(x) \right. \\
& \left. - \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) P_2(x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x) = & -(d_h + 2m_h\hat{N}_h \\
& + x) \left[- \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} + x \right) \left(-d_v - m_v\hat{N}_v - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - x \right) \right. \\
& \left. + \frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(-\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{\hat{N}_h} \right) \right] P_2(x) \\
& + \mu \left[\frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) \right. \\
& \left. - \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right] P_2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x) = & -(d_h + 2m_h\hat{N}_h \\
& + x) \left[\left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} + x \right) \left(d_v + m_v\hat{N}_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \right. \\
& \left. - \frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{\hat{N}_h} \right) \right] P_2(x) \\
& + \mu \left[\frac{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{N}_h} \left(\frac{c\beta(\hat{N}_v - \hat{I}_v)\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) \right. \\
& \left. - \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right] P_2(x)
\end{aligned}$$

Es decir $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. Aquí $P_2(x)$ es el polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} -d - 2d_1\hat{L} - \lambda_v - A\hat{P} & -A\hat{L} & g \\ \gamma\alpha_1 v\hat{P} & r\left(1 - \frac{2\hat{P}}{K}\right) + \gamma\alpha_1 v\hat{L} - qe & 0 \\ \lambda_v & 0 & -d_v - 2m_v\hat{N}_v \end{bmatrix}$$

El cual fue analizado en la demostración de la existencia de punto de equilibrio libre de infección donde se determinó que siempre tiene tres soluciones negativas. Ahora se analiza el polinomio $P_1(x)$

$$\begin{aligned} P_1(x) = & -(d_h + 2m_h\hat{N}_h + x) \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} + x \right) \left(d_v + m_v\hat{N}_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right. \\ & \left. + x \right) + (d_h + 2m_h\hat{N}_h + x) \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \\ & + \mu \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\ & - \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) = & - \left[\left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h\hat{N}_h) + (d_h + 2m_h\hat{N}_h)x \right. \\ & \left. + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) x + x^2 \right] \left(d_v + m_v\hat{N}_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + x \right) \\ & + \left((d_h + 2m_h\hat{N}_h) \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \right. \\ & \left. + \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} x \right) + \mu \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\ & - \mu \left(\left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) + \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & - \left[\left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \right. \\
& + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) x \\
& + \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) x \\
& + \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) x^2 \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) x + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) x^2 \\
& + \left. \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) x^2 + x^3 \right] \\
& + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_h - \hat{I}_h) (\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} + \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_h - \hat{I}_h) (\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} x \\
& + \mu \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_h - \hat{I}_h) (\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\
& - \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) - \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & -x^3 - \left[\left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \right. \\
& + \left. \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \right] x^2 \\
& - \left[(d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \right. \\
& + \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) - \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_h - \hat{I}_h) (\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \\
& + \left. \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \right] x \\
& + \mu \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_h - \hat{I}_h) (\hat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \\
& + (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_h - \hat{I}_h) (\widehat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\widehat{N}_h)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & x^3 + \left[\left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) + (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) + \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) \right] x^2 + \\
& \left[(d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) + \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) + \right. \\
& \left. \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) - \frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_h - \hat{I}_h) (\widehat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\widehat{N}_h)^2} + \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \right] x - \\
& \mu \frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_h - \hat{I}_h) (\widehat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\widehat{N}_h)^2} \frac{\hat{I}_h}{\widehat{N}_h} + \mu \left(d_v + \widehat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) + \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \right. \\
& \left. \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) - (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_h - \hat{I}_h) (\widehat{N}_v - \hat{I}_v)}{(\widehat{N}_h)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & x^3 + \left[\left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) + (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \right. \\
& \left. + \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) \right] x^2 \\
& + \left[- \left(\frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_v - \hat{I}_v) (\widehat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\widehat{N}_h)^2} \right) + (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \right. \\
& + \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) \\
& + \left. \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) + \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \right] x \\
& + \left[- (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \left(\frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_v - \hat{I}_v) (\widehat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\widehat{N}_h)^2} \right) \right. \\
& + \left(d_h + \rho + u + \widehat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \right) \left(d_v + m_v \widehat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \widehat{N}_h) \\
& + \mu \left(d_v + \widehat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\widehat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \\
& \left. - \mu \frac{bc\beta^2 (\widehat{N}_v - \hat{I}_v) (\widehat{N}_h - \hat{I}_h) \hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & x^3 + \left[\left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \right. \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \Big] x^2 \\
& + \left[- \left(\frac{bc\beta^2 (\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} \right) + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \right. \\
& + \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) + \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \Big] x \\
& + \left[- (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(\frac{bc\beta^2 (\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} \right) \right. \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \\
& + \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \\
& \left. - \mu \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h) \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^3} \right]
\end{aligned}$$

Representamos los coefecientes diferentes de la unidad de $P_1(x)$ de la siguiente forma:

$$a_1 = \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right)$$

Usamos las letras D , B y C para expresar cada uno de los términos dentro de los paréntesis de a_1 respectivamente:

$$a_1 = D + B + C$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & - \frac{bc\beta^2 (\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} + (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \right. \\
& \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) + \\
& \left. \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \right)
\end{aligned}$$

A partir de lo representado para D , B y C , deducimos las siguientes igualdades:

$$\hat{I}_h = \frac{(d_v + m_v \hat{N}_v) \hat{I}_v \hat{N}_h}{c\beta(\hat{N}_v - \bar{I}_v)} \Rightarrow (d_v + m_v \hat{N}_v) = \frac{\hat{I}_h c\beta(\hat{N}_v - \bar{I}_v)}{\hat{I}_v \hat{N}_h}$$

$$D = \frac{\hat{I}_h c\beta(\hat{N}_v - \bar{I}_v)}{\hat{I}_v \hat{N}_h} + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} = \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h}$$

$$D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} = \frac{\hat{I}_h c\beta(\hat{N}_v - \bar{I}_v)}{\hat{I}_v \hat{N}_h}$$

$$\hat{I}_v = \frac{(d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) \hat{I}_h \hat{N}_h}{b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)} \Rightarrow (d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h) = \frac{\hat{I}_v b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{I}_h \hat{N}_h}$$

$$C = \frac{\hat{I}_v b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{\hat{I}_h \hat{N}_h} + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h}$$

$$C = \frac{\hat{I}_v b\beta}{\hat{I}_h}$$

$$C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} = \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h}$$

$$DC = \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h}$$

$$\begin{aligned} (d_h + \rho + \mu + m_h \hat{N}_h)(d_v + m_v \hat{N}_v) &= \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h}\right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) \\ &= \frac{bc\beta^2(\hat{N}_h - \hat{I}_h)(\hat{N}_v - \bar{I}_v)}{(\hat{N}_h)^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en a_2 :

$$a_2 = -\frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} + BD + DC + CB + \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right)$$

$$a_2 = -\left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h}\right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) + BD + DC + CB + \mu \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right)$$

$$a_2 = -\left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h}D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) + BD + DC + CB + \mu\left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h\right)$$

$$a_2 = -\left(-C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h}D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) + BD + CB + \mu\left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h\right)$$

$$a_2 = C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h}D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + BD + CB + \mu\left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h\right)$$

Ahora reemplazamos en a_3 :

$$\begin{aligned} a_3 = & -(d_h + 2m_h\hat{N}_h) \left(\frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} \right) \\ & + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(d_v + m_v\hat{N}_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h\hat{N}_h) \\ & + \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \\ & - \mu \frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & -B \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + CDB + \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \\ & - \mu \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \end{aligned}$$

Tenemos que $P_1(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz (ver el teorema 2.5.1) al polinomio P_1 :

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

Para que P_1 tenga tres raices con parte real negativa (dos raices complejas conjugadas y una raiz real) se debe cumplir:

- $\Delta_1 = a_1 > 0$

- $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$
- $a_3 > 0$

Se puede notar que $\Delta_1 = a_1 > 0$ se cumple siempre. Ahora analizamos:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= (D + B + C) \left(- \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + BD + DC + CB \right. \\
&\quad \left. + \mu \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right) \\
&\quad - \left(-B \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + CDB + \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right. \\
&\quad \left. - \mu \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \\
\Delta_2 &= (D + B + C) \left(- \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + BD + DC + CB \right. \\
&\quad \left. + \mu \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right) \\
&\quad - \left(-B \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + CDB \right. \\
&\quad \left. + \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) - \mu \left(C - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \\
\Delta_2 &= (D + B + C) \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + BD + CB + \mu \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right) \\
&\quad - \left(B \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\Delta_2 = (D + B + C) \left(\left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + BD + CB + \mu \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \right)$$

$$- B \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) - \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) \\ + \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) D + BDD + CBD + \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right)$$

$$+ \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) B + BBD + CBB$$

$$+ \mu B \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) + \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) C + BDC$$

$$+ CCB + \mu C \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) - B \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$- \mu D \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) + \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) D + BDD + CBD + BBD + CBB$$

$$+ \mu B \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right) + \left(C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) C + BDC$$

$$+ CCB + \mu C \left(\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h\hat{I}_h \right)$$

$$+ \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \left(DC - C \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$\Delta_2 = DC \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + D \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - D \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + DBD + DCB + BBD + BCB$$

$$- \left(-B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + B\mu m_h\hat{I}_h \right) + CC \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - C \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + CBD$$

$$+ CCB - \left(-C\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + C\mu m_h\hat{I}_h \right)$$

$$- \left(-DC \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{\mu\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & DC \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + D \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - D \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + D^2 B + 2DCB + B^2 D + B^2 C \\
& - \left(-B\mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + B\mu m_h \hat{I}_h \right) + CC \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - C \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C^2 B \\
& - \left(-C\mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + C\mu m_h \hat{I}_h \right) \\
& - \left(-DC \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} D - \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} - \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + D^2 B + 2DCB + C^2 B \\
& + B^2 D + B^2 C - \left(-B\mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + B\mu m_h \hat{I}_h \right) + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\
& + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \left(-\frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \mu m_h \hat{I}_h \right) \\
& - \left(-\frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} - \frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} - \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + D^2 B + 2DCB + C^2 B + B^2 D \\
& + B^2 C + \left(B\mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h \hat{I}_h \right) + b\beta \hat{I}_v \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{I}_h} \frac{c\beta}{\hat{N}_h} + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \\
& - b\beta \hat{I}_v \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta}{\hat{N}_h} + \left(\mu b\beta \hat{I}_v \frac{b\beta \hat{I}_v}{(\hat{N}_h)^2} - b\beta \mu m_h \hat{I}_v \right) \\
& + \left(\mu \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{\mu b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & \frac{bc^2 \beta^3 \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + \frac{bc^2 \beta^3 \hat{N}_v \hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3} \frac{\hat{N}_v}{\hat{I}_v} - \frac{bc^2 \beta^3 \hat{N}_v \hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3} + D^2 B + 2DCB + C^2 B + B^2 D + B^2 C \\
& + B\mu \frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h \hat{I}_h + \frac{cb^2 \beta^3 \hat{I}_v^2}{\hat{N}_h \hat{I}_h} + \frac{cb^2 \beta^3 \hat{I}_v \hat{N}_v}{\hat{N}_h^2} - \frac{cb^2 \beta^3 \hat{I}_v^2}{\hat{N}_h^2} + \mu \frac{b^2 \beta^2 \hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} \\
& - b\beta \mu m_h \hat{I}_v + \mu \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - \mu \frac{bc\beta^2 \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - \mu \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3} + \mu \frac{bc\beta^2 \hat{I}_h^2 \hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3}\frac{\hat{N}_v}{\hat{I}_v} - \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3} + D^2B + 2DCB + C^2B + B^2D + B^2C \\ & + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h\hat{I}_h + \frac{cb^2\beta^3\hat{I}_v^2}{\hat{N}_h\hat{I}_h} + \frac{cb^2\beta^3\hat{I}_v\hat{N}_v}{\hat{N}_h^2} - \frac{cb^2\beta^3\hat{I}_v^2}{\hat{N}_h^2} + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} \\ & - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + \mu\frac{bc\beta^2\hat{N}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - \mu\frac{bc\beta^2\hat{N}_v\hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3} + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h^2}{\hat{N}_h^3}\left(\frac{\hat{N}_v}{\hat{I}_v} - 1\right) + D^2B + 2DCB + C^2B + B^2D + B^2C \\ & + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h\hat{I}_h + \frac{cb^2\beta^3\hat{I}_v^2}{\hat{N}_h}\left(\frac{1}{\hat{I}_h} - \frac{1}{\hat{N}_h}\right) + \frac{bc\beta^2\hat{I}_v}{(\hat{N}_h)^2}(b\beta\hat{N}_v - \mu\hat{I}_h) \\ & + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + \frac{\mu bc\beta^2\hat{N}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2}\left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2DCB + C^2B + B^2D + B^2C + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h\hat{I}_h \\ & + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2B\frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + C^2B + B^2\frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} + B^2\frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{I}_h} + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \\ & - B\mu m_h\hat{I}_h + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2(d_h + 2m_h\hat{N}_h)\frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + C^2B + B^2\frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} + B^2\frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{I}_h} \\ & + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - B\mu m_h\hat{I}_h + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2d_h\frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_hbc\beta^2\hat{N}_v - b\beta\mu m_h\hat{I}_v + C^2B + B^2\frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ & + B^2\frac{b\beta\hat{I}_v}{\hat{I}_h} - B\mu m_h\hat{I}_h + B\mu\frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu\frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu\frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v - b\beta\mu m_h \hat{I}_v + C^2B + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ + B^2\mu - B\mu m_h \hat{I}_h + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v - b\beta\mu m_h \hat{I}_v + C^2B + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ + B\mu(B - m_h \hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + D^2B + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + b\beta m_h (4c\beta\hat{N}_v - \mu\hat{I}_v) + C^2B + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2}(d_h + 2m_h\hat{N}_h) + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + b\beta m_h (4c\beta\hat{N}_v - \mu\hat{I}_v) \\ + \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2}(d_h + 2m_h\hat{N}_h) + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) \\ + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + d_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2m_h\hat{N}_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v \\ - b\beta\mu m_h \hat{I}_v + d_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + 2m_h\hat{N}_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\Delta_2 \geq \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + d_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2m_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h} + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v \\ - b\beta\mu m_h \hat{I}_v + d_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + 2m_h\hat{N}_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + d_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2m_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h} + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v \\ & + b\beta m_h \left(2\hat{N}_h \frac{b\beta\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} - \mu\hat{I}_v \right) + d_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ & + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + d_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2m_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h} + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v \\ & + \frac{b\beta m_h}{\hat{I}_h} (2b\beta\hat{I}_v^2 - \mu\hat{I}_v\hat{I}_h) + d_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ & + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 \geq & \frac{bc^2\beta^3\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{N}_h^2} + d_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h^2} + 2m_h \frac{c^2\beta^2\hat{N}_v^2\hat{I}_h^2}{\hat{I}_v^2\hat{N}_h} + 2d_h \frac{bc\beta^2\hat{N}_v}{\hat{N}_h} + 4m_h bc\beta^2\hat{N}_v \\ & + \frac{b\beta m_h\hat{I}_v}{\hat{I}_h} (2b\beta\hat{I}_v - \mu\hat{I}_h) + d_h \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{\hat{I}_h^2} + B^2 \frac{c\beta\hat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\hat{N}_h} \\ & + B\mu(d_h + 2m_h\hat{N}_h - m_h\hat{I}_h) + B\mu \frac{b\beta\hat{I}_v\hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{b^2\beta^2\hat{I}_v^2}{(\hat{N}_h)^2} + \mu \frac{bc\beta^2\hat{I}_h^2\hat{I}_v}{\hat{N}_h^3}\end{aligned}$$

Tenemos que $b\beta\hat{I}_v - \mu\hat{I}_h \geq 0$, pues:

$$\frac{d\hat{I}_h(t)}{dt} = b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h) \frac{\hat{I}_v}{\hat{N}_h} - (d_h + \rho + \mu)\hat{I}_h - m_h\hat{I}_h\hat{N}_h$$

$$b\beta\hat{I}_v \geq b\beta(\hat{N}_h - \hat{I}_h) \frac{\hat{I}_v}{\hat{N}_h} = (d_h + \rho + \mu)\hat{I}_h + m_h\hat{I}_h\hat{N}_h \geq \mu\hat{I}_h$$

Además y $2\hat{N}_h - \hat{I}_h > 0$, entonces:

$$\Delta_2 > 0$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
a_3 = & -(d_h + 2m_h \hat{N}_h) \left(\frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2} \right) \\
& + \left(d_h + \rho + u + \hat{N}_h m_h + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(d_v + m_v \hat{N}_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \\
& + \mu \left(d_v + \hat{N}_v m_v + \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \\
& - \mu \frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h) \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & -B \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + CDB + \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) \\
& - \mu \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & DBC + \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) - \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\
& - \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & DBC + \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) - \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \\
& - \left[\left(CD - C \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} D + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) B \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \cancel{DBC} + \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - m_h \hat{I}_h \right) - \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - \cancel{CDB} + C \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B \\
& + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} DB - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) - m_h \mu D \hat{I}_h - \left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) \mu \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} DB \\
& - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B
\end{aligned}$$

Expresamos $\frac{bc\beta^2(\hat{N}_v - \hat{I}_v)(\hat{N}_h - \hat{I}_h)}{(\hat{N}_h)^2}$ en términos de R_0 :

$$R_0^2 = \frac{\beta^2 bc N_v^*}{(m_h N_h^* + d_h + \rho + \mu)(N_v^* m_v + d_v) N_h^*}$$

Como $\hat{N}_v = N_v^*$, $N_h^*(m_h N_h^* + d_h) = \Gamma m_h$ y $\hat{N}_h \leq N_h^*$

$$(m_h N_h^* + d_h + \rho + \mu) = \frac{\beta^2 bc \hat{N}_v}{(\hat{N}_v m_v + d_v) N_h^* R_0^2}$$

$$(\hat{N}_v m_v + d_v)(m_h N_h^* + d_h + \rho + \mu) N_h^* R_0^2 = bc \beta^2 \hat{N}_v$$

$$\begin{aligned} (\hat{N}_v m_v + d_v)(m_h \hat{N}_h + d_h + \rho + \mu) \hat{N}_h R_0^2 &\leq (\hat{N}_v m_v + d_v)(m_h N_h^* + d_h + \rho + \mu) N_h^* R_0^2 \\ &= bc \beta^2 \hat{N}_v \end{aligned}$$

$$(\hat{N}_v m_v + d_v)(m_h \hat{N}_h + d_h + \rho + \mu) \leq \frac{bc \beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h R_0^2}$$

$$\left(C - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h}\right) \left(D - \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}\right) \leq \frac{bc \beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h R_0^2}$$

Reemplazando en a_3 :

$$\begin{aligned} a_3 \geq \mu D \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) - m_h \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \hat{I}_h - \mu \frac{bc \beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h R_0^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + C \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} DB \\ - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 \geq \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) - m_h \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \hat{I}_h - \mu \frac{bc \beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h R_0^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{\hat{I}_v b\beta}{\hat{I}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} B \\ - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 \geq \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \left(\frac{b\beta \hat{I}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \right) - m_h \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \hat{I}_h - \mu \frac{bc \beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h R_0^2} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} + \frac{\hat{I}_v b\beta}{\hat{I}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \\ + \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} (d_h + 2m_h \hat{N}_h) - \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} (d_h + 2m_h \hat{N}_h) \end{aligned}$$

Usando que $R_0^2 > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{R_0^2}$

$$a_3 \geq \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} \frac{b\beta \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} - \mu \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} - m_h \mu \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \hat{I}_h + d_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta}{\hat{N}_h} + 2m_h b\beta \hat{I}_v c\beta$$

$$+ d_h \frac{b\beta}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + 2m_h b\beta \frac{c\beta \hat{N}_v \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - d_h \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - 2m_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2\widehat{N}_v\hat{I}_h}{(\widehat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu\hat{I}_h}{\widehat{N}_h} + 2m_h\widehat{N}_h + d_h - \mu \right) - m_h\mu \frac{c\beta\widehat{N}_v\hat{I}_h}{\hat{I}_v\widehat{N}_h} \hat{I}_h + d_h b\beta\hat{I}_v \frac{c\beta}{\widehat{N}_h} + 2m_h b\beta\hat{I}_v c\beta$$

$$- d_h \frac{b\beta\hat{I}_v}{\widehat{N}_h} \frac{c\beta\hat{I}_h}{\widehat{N}_h} - 2m_h b\beta\hat{I}_v \frac{c\beta\hat{I}_h}{\widehat{N}_h}$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + 2m_h \hat{N}_h + d_h - \mu \right) - m_h \frac{c\beta b\beta \hat{I}_v \hat{N}_v}{\hat{I}_v \hat{N}_h} \hat{I}_h + d_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta}{\hat{N}_h} \\ + 2m_h b\beta \hat{I}_v c\beta - d_h \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - 2m_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + 2m_h \hat{N}_h + d_h - \mu \right) - m_h \frac{c\beta b\beta \hat{N}_v}{\hat{N}_h} \hat{I}_h + d_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta}{\hat{N}_h} + 2m_h b\beta \hat{I}_v c\beta$$

$$- d_h \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h} - 2m_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + 2m_h \hat{N}_h + d_h - \mu - m_h \hat{N}_h \right) + d_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta}{\hat{N}_h} - d_h \frac{b\beta \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}$$

$$+ 2m_h b\beta \hat{I}_v c\beta - 2m_h b\beta \hat{I}_v \frac{c\beta \hat{I}_h}{\hat{N}_h}$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + 2m_h \hat{N}_h + d_h - \mu - m_h \hat{N}_h \right) + \frac{bc\beta^2 d_h \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$+ 2m_h bc\beta^2 \hat{I}_v \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h}{\hat{N}_h} + m_h \hat{N}_h + d_h - \mu \right) + \frac{bc\beta^2 d_h \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + 2m_h bc\beta^2 \hat{I}_v \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\mu \hat{I}_h + m_h (\hat{N}_h)^2 + d_h \hat{N}_h - \mu \hat{N}_h}{\hat{N}_h} \right) + \frac{bc\beta^2 d_h \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

$$+ 2m_h bc\beta^2 \hat{I}_v \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

Como $\mu \hat{I}_h = \Gamma - d_h \hat{N}_h - m_h (\hat{N}_h)^2$, reemplazando

$$a_3 \geq \frac{bc\beta^2 \hat{N}_v \hat{I}_h}{(\hat{N}_h)^2} \left(\frac{\Gamma - \mu \hat{N}_h}{\hat{N}_h} \right) + \frac{bc\beta^2 d_h \hat{I}_v}{\hat{N}_h} \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right) + 2m_h bc\beta^2 \hat{I}_v \left(1 - \frac{\hat{I}_h}{\hat{N}_h} \right)$$

Como

$$\frac{\Gamma}{\mu} \geq \hat{N}_h$$

Entonces $a_3 > 0$. Con esto queda demostrada la proposición. ■

4.6 ESTABILIDAD GLOBAL DEL PUNTO DE EQUILIBRIO LIBRE DE INFECCIÓN

En esta sección se discute y analiza el análisis cualitativo de la estabilidad global del punto libre infección D .

Sea $W = \{(L, P, I_v, N_v, I_h, N_h) \in U : I_v \leq N_v, I_h \leq N_h\}$ y recordando el modelo propuesto:

$$(4.1) \dots \begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = gN_v - dL - d_1L^2 - \lambda_vL - \alpha_1vLP - \alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP \\ \frac{dN_v(t)}{dt} = \lambda_vL - d_vN_v - m_v(N_v)^2 \\ \frac{dP(t)}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1vLP - qeP \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta(N_v - I_v)\frac{I_h}{N_h} - d_vI_v - m_vI_vN_v \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta(N_h - I_h)\frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu)I_h - m_hI_hN_h \\ \frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_hN_h - \mu I_h - m_h(N_h)^2 \end{cases}$$

Vamos a desacoplar del sistema (4.1) tomando las tres primeras ecuaciones el sistema siguiente:

$$(4.1.2) \dots \begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = gN_v - dL - d_1L^2 - \lambda_vL - \alpha_1vLP - \alpha_1\alpha_2(1-v)LqeP \\ \frac{dN_v(t)}{dt} = \lambda_vL - d_vN_v - m_v(N_v)^2 \\ \frac{dP(t)}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma\alpha_1vLP - qeP \end{cases}$$

Este sistema tiene como punto de equilibrio no trivial a (L^*, N_v^*, P^*)

Teorema 4.6.1

Dado el conjunto $X = \{(L, N_v, P) \in \mathbb{R}^3 : L \geq 0, N_v \geq 0, P \geq 0\}$. El punto de equilibrio no trivial (L^*, N_v^*, P^*) del sistema (4.1.2) es globalmente asintóticamente estable, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (L(t), N_v(t), P(t)) = (L^*, N_v^*, P^*)$$

Prueba

Definimos la siguiente función de Lyapunov (ver la sección 2.6):

$$h(L, P, N_v) = \left(L - L^* - L^* \ln \frac{L}{L^*} \right) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \right) \left(P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*} \right) + \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} \left(N_v - N_v^* - N_v^* \ln \frac{N_v}{N_v^*} \right)$$

$$h(L, P, N_v) = D_1 + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \right) D_2 + \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} D_3$$

Donde:

$$D_1 = L - L^* - L^* \ln \frac{L}{L^*}$$

$$D_2 = P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*}$$

$$D_3 = N_v - N_v^* - N_v^* \ln \frac{N_v}{N_v^*}$$

La derivada de la función h es

$$h'(L, P, N_v) = D_1' + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \right) D_2' + \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} D_3'$$

Obtenemos las derivadas necesarias

- $D_1' = L' \left(\frac{L-L^*}{L} \right)$

$$D_1' = \left(1 - \frac{L^*}{L} \right) (gN_v - dL - d_1 L^2 - \lambda_v L - \alpha_1 v L P - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L q e P)$$

$$D_1' = \left(gN_v - dL - d_1 L^2 - \lambda_v L - \alpha_1 v L P - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L q e P - \frac{L^*}{L} gN_v + \frac{L^*}{L} dL + \frac{L^*}{L} d_1 L^2 + \frac{L^*}{L} \lambda_v L + \frac{L^*}{L} \alpha_1 v L P + \frac{L^*}{L} \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L q e P \right)$$

$$D_1' = gN_v - (d + \lambda_v)L - d_1 L^2 - \alpha_1 v L P - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L q e P - \frac{L^*}{L} gN_v + d_1 L^* L + (d + \lambda_v)L^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* q e P$$

$$D_1' = gN_v - \frac{(gN_v^* - d_1 L^{*2} - \alpha_1 v L^* P^* - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* q e P^*)}{L^*} L - d_1 L^2 - \alpha_1 v L P - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L q e P - \frac{L^*}{L} gN_v + d_1 L^* L + gN_v^* - d_1 L^{*2} - \alpha_1 v L^* P^* - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* q e P^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* q e P$$

$$D_1' = gN_v - \left(gN_v^* \frac{L}{L^*} - d_1 L^{*2} \frac{L}{L^*} - \alpha_1 v L^* P^* \frac{L}{L^*} - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* qeP^* \frac{L}{L^*} \right) - d_1 L^2$$

$$- \alpha_1 v LP - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L qeP - \frac{L^*}{L} gN_v + d_1 L^* L + gN_v^* - d_1 L^{*2}$$

$$- \alpha_1 v L^* P^* - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* qeP^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* qeP$$

$$D_1' = gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} + d_1 L^* L + \alpha_1 v P^* L + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeP^* L - d_1 L^2 - \alpha_1 v LP$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L qeP - \frac{L^*}{L} gN_v + d_1 L^* L + gN_v^* - d_1 L^{*2} - \alpha_1 v L^* P^*$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* qeP^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) L^* qeP$$

$$D_1' = gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} - \frac{L^*}{L} gN_v + gN_v^* - d_1 L^2 + 2d_1 L^* L - d_1 L^{*2} + \alpha_1 v P^* L - \alpha_1 v LP$$

$$- \alpha_1 v L^* P^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeP^* L - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeLP$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeL^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeL^* P$$

$$D_1' = gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} - \frac{L^*}{L} gN_v + gN_v^* - d_1 (L - L^*)^2 + \alpha_1 v P^* L - \alpha_1 v LP - \alpha_1 v L^* P^*$$

$$+ \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeP^* L - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeLP$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeL^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qeL^* P$$

$$\bullet \quad D_2' = P' \left(\frac{P-P^*}{P} \right)$$

$$D_2' = \left(1 - \frac{P^*}{P} \right) \left(rP - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - qeP \right)$$

$$D_2' = rP - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - qeP - rP \frac{P^*}{P} + \frac{r}{K} P^2 \frac{P^*}{P} - \gamma \alpha_1 v LP \frac{P^*}{P} + qeP \frac{P^*}{P}$$

$$D_2' = rP - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - qeP - rP^* + \frac{r}{K} PP^* - \gamma \alpha_1 v LP^* + qeP^*$$

$$D_2' = rP - qeP - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - rP^* + qeP^* + \frac{r}{K} PP^* - \gamma \alpha_1 v LP^*$$

$$D_2' = (r - qe)P - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - (r - qe)P^* + \frac{r}{K} PP^* - \gamma \alpha_1 v LP^*$$

$$D_2' = \left(\frac{r}{K} P^* - \gamma \alpha_1 v \hat{L} \right) P - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v LP - \left(\frac{r}{K} P^* - \gamma \alpha_1 v L^* \right) P^* + \frac{r}{K} PP^* - \gamma \alpha_1 v LP^*$$

$$D_2' = \left(\frac{r}{K} P^* P - \gamma \alpha_1 v L^* P \right) - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v L P - \left(\frac{r}{K} P^* P^* - \gamma \alpha_1 v L^* P^* \right) + \frac{r}{K} P P^* - \gamma \alpha_1 v L P^*$$

$$D_2' = \frac{r}{K} P^* P - \gamma \alpha_1 v L^* P - \frac{r}{K} P^2 + \gamma \alpha_1 v L P - \frac{r}{K} P^* P^* + \gamma \alpha_1 v L^* P^* + \frac{r}{K} P P^* - \gamma \alpha_1 v L P^*$$

$$D_2' = -\frac{r}{K} P^2 + 2 \frac{r}{K} P^* P - \frac{r}{K} P^{*2} - \gamma \alpha_1 v L^* P + \gamma \alpha_1 v L P + \gamma \alpha_1 v L^* P^* - \gamma \alpha_1 v L P^*$$

$$D_2' = -\frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \gamma \alpha_1 v L^* P + \gamma \alpha_1 v L P + \gamma \alpha_1 v L^* P^* - \gamma \alpha_1 v L P^*$$

$$\bullet \quad D_3' = N_v' \left(\frac{N_v - N_v^*}{N_v} \right)$$

$$D_3' = (\lambda_v L - d_v N_v - m_v (N_v)^2) \left(1 - \frac{N_v^*}{N_v} \right)$$

$$D_3' = \lambda_v L - d_v N_v - m_v (N_v)^2 - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L + d_v N_v \frac{N_v^*}{N_v} + m_v (N_v)^2 \frac{N_v^*}{N_v}$$

$$D_3' = \lambda_v L - d_v N_v - m_v (N_v)^2 - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L + d_v N_v^* + m_v N_v N_v^*$$

$$D_3' = \lambda_v L - \frac{(\lambda_v L^* - m_v (N_v^*)^2)}{N_v^*} N_v - m_v (N_v)^2 - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L + \lambda_v L^* - m_v (N_v^*)^2 + m_v N_v N_v^*$$

$$D_3' = \lambda_v L + \lambda_v L^* - (\lambda_v L^* - m_v (N_v^*)^2) \frac{N_v}{\widehat{N}_v} - m_v (N_v)^2 - m_v (N_v^*)^2 + m_v N_v N_v^* - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L$$

$$D_3' = \lambda_v L + \lambda_v L^* - \lambda_v L^* \frac{N_v}{N_v^*} + m_v (N_v^*)^2 \frac{N_v}{\widehat{N}_v} - m_v (N_v)^2 - m_v (N_v^*)^2 + m_v N_v N_v^* - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L$$

$$D_3' = \lambda_v L + \lambda_v L^* - \lambda_v L^* \frac{N_v}{N_v^*} + m_v N_v^* N_v - m_v (N_v)^2 - m_v (N_v^*)^2 + m_v N_v N_v^* - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L$$

$$D_3' = \lambda_v L + \lambda_v L^* - \lambda_v L^* \frac{N_v}{N_v^*} - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L - m_v (N_v)^2 + 2 m_v N_v N_v^* - m_v (N_v^*)^2$$

$$D_3' = \lambda_v L + \lambda_v L^* - \lambda_v L^* \frac{N_v}{N_v^*} - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L - m_v (N_v - N_v^*)^2$$

Reemplazando en la derivada de h

$$h'(L, P, N_v) = D'_1 + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \right) D'_2 + \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} D'_3$$

$$\begin{aligned} h'(L, P, N_v) = & gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} - \frac{L^*}{L} gN_v + gN_v^* - d_1(L - L^*)^2 + \alpha_1 v P^* L - \alpha_1 v L P \\ & - \alpha_1 v L^* P^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe P^* L - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P \\ & + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \right) \left(-\frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \gamma \alpha_1 v L^* P + \gamma \alpha_1 v L P + \gamma \alpha_1 v L^* P^* \right. \\ & \left. - \gamma \alpha_1 v L P^* \right) + \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} \left(\lambda_v L + \lambda_v L^* - \lambda_v L^* \frac{N_v}{N_v^*} - \frac{N_v^*}{N_v} \lambda_v L - m_v (N_v - N_v^*)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(L, P, N_v) = & gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} - \frac{L^*}{L} gN_v + gN_v^* - d_1(L - L^*)^2 + \alpha_1 v P^* L - \alpha_1 v L P \\ & - \alpha_1 v L^* P^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe P^* L - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P - \frac{1}{\gamma} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \alpha_1 v L^* P \\ & + \alpha_1 v L P + \alpha_1 v L^* P^* - \alpha_1 v L P^* - \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 \\ & - \alpha_2(1-v) qe \alpha_1 L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P^* \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P^* + \frac{gN_v^*}{L^*} L + gN_v^* - gN_v - \frac{gN_v^*}{L^*} \frac{N_v^*}{N_v} L \\ & - \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} m_v (N_v - N_v^*)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(L, P, N_v) = & gN_v - gN_v^* \frac{L}{L^*} - \frac{L^*}{L} gN_v + gN_v^* - d_1(L - L^*)^2 + \alpha_1 v P^* L - \alpha_1 v L P \\ & - \alpha_1 v L^* P^* + \alpha_1 v L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe P^* L - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe \hat{L} P - \frac{1}{\gamma} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \alpha_1 v \hat{L} P \\ & + \alpha_1 v L P + \alpha_1 v L^* P^* - \alpha_1 v L P^* - \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 \\ & - \alpha_2(1-v) qe \alpha_1 L^* P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L^* P^* \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (1-v) qe L P^* + \frac{gN_v^*}{L^*} L + gN_v^* - gN_v - \frac{gN_v^*}{L^*} \frac{N_v^*}{N_v} L \\ & - \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} m_v (N_v - N_v^*)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'(L, P, N_v) &= -\frac{g(N_v^*)^2}{L^*} \frac{L}{N_v} + 2gN_v^* - \frac{L^*}{L} gN_v - d_1(L - L^*)^2 - \frac{1}{\gamma} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 \\
&\quad - \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} m_v (N_v - N_v^*)^2 \\
h'(L, P, N_v) &= -\frac{g((N_v^*)^2 L^2 - 2N_v^* L N_v L^* + N_v^2 (L^*)^2)}{N_v L L^*} - d_1(L - L^*)^2 - \frac{1}{\gamma} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 \\
&\quad - \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} m_v (N_v - N_v^*)^2 \\
h'(L, P, N_v) &= -\frac{g(N_v^* L - N_v L^*)^2}{N_v L L^*} - d_1(L - L^*)^2 - \frac{1}{\gamma} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 \\
&\quad - \frac{\alpha_2(1-v)qe}{\gamma v} \frac{r}{K} (P - P^*)^2 - \frac{gN_v^*}{\lambda_v L^*} m_v (N_v - N_v^*)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Además

$$h'(N_h) < 0 \text{ para } (L, P, N_v) \neq (L^*, N_v^*, P^*)$$

Por lo que (L^*, N_v^*, P^*) es asintóticamente estable. Ahora, encontramos el conjunto invariante de las soluciones del sistema (4.1.2) que este contenido en el conjunto

$$\{(L, P, N_v) \in X_0 : h'(L, P, N_v) = 0\}$$

Si $h'(L, P, N_v) = 0$ esto es si y solo si $L = L^*, P = P^*, N_v = N_v^*$. Todo esto implica que el subconjunto compacto mas grande del conjunto donde $h' = 0$ es $\{(L^*, N_v^*, P^*)\}$. Por el principio de invarianza de LaSalle (ver el teorema 2.6.2) se sigue que (L^*, N_v^*, P^*) es globalmente atractivo en X . ■

Del teorema 4.6.1 se tiene que $(L(t), N_v(t), P(t)) \rightarrow (L^*, N_v^*, P^*)$, cuando $t \rightarrow \infty$, se obtiene el siguiente sistema límite a partir de las tres últimas ecuaciones del sistema (4.1) y sea el conjunto $Y = \{(I_v, I_h, N_h) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 < N_h, I_v \leq N_v^*, I_h \leq N_h\}$:

$$(4.1.3) \dots \begin{cases} \frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta(N_v^* - I_v) \frac{I_h}{N_h} - d_v I_v - m_v I_v N_v^* \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu) I_h - m_h I_h N_h \\ \frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h N_h - \mu I_h - m_h (N_h)^2 \end{cases}$$

Además, se cumple que:

$$\begin{cases} \frac{dI_v(t)}{dt} \leq c\beta(N_v^* - I_v) \frac{I_h}{N_h} \\ \frac{dI_h(t)}{dt} \leq b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu)I_h \\ \frac{dN_h(t)}{dt} \leq \Gamma - d_h N_h - \mu I_h \end{cases}$$

Por lo que primero vamos a analizar el subsistema sin considerar la competencia intraespecífica:

$$(4.1.4) \dots \begin{cases} \frac{d\bar{I}_v(t)}{dt} = c\beta(N_v^* - \bar{I}_v) \frac{\bar{I}_h}{\bar{N}_h} - d_v \bar{I}_v \\ \frac{d\bar{I}_h(t)}{dt} = b\beta(\bar{N}_h - \bar{I}_h) \frac{\bar{I}_v}{\bar{N}_h} - (d_h + \rho + \mu)\bar{I}_h \\ \frac{d\bar{N}_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h \bar{N}_h - \mu \bar{I}_h \end{cases}$$

Se observa que:

$$\frac{d\bar{N}_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h \bar{N}_h - \mu \bar{I}_h \Rightarrow \Gamma - (d_h + \mu)\bar{N}_h \leq \frac{d\bar{N}_h(t)}{dt} \leq \Gamma - d_h \bar{N}_h$$

Esto implica que

$$\frac{\Gamma}{d_h + \mu} + \left(\bar{N}_h(0) - \frac{\Gamma}{d_h + \mu} \right) e^{-(d_h + \mu)t} \leq \bar{N}_h(t) \leq \frac{\Gamma}{d_h} + \left(\bar{N}_h(0) - \frac{\Gamma}{d_h} \right) e^{-d_h t}$$

$$\frac{\Gamma}{d_h + \mu} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \bar{N}_h(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{N}_h(t) \leq \frac{\Gamma}{d_h}$$

Sea $A = \frac{\Gamma}{d_h}$, entonces, las variables $\bar{I}_v$ e $\bar{I}_h$ satisfacen el siguiente sistema límite:

$$(4.1.5) \dots \begin{cases} \frac{d\bar{I}_v(t)}{dt} = c\beta(N_v^* - \bar{I}_v) \frac{\bar{I}_h}{A} - d_v \bar{I}_v \\ \frac{d\bar{I}_h(t)}{dt} = b\beta(A - \bar{I}_h) \frac{\bar{I}_v}{A} - (d_h + \rho + \mu)\bar{I}_h \end{cases}$$

Siguiendo el método de la matriz de la próxima generación linealizamos el sistema (4.1.5) en (0,0):

$$(4.1.6) \dots \begin{cases} \frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta N_v^* \frac{I_h}{A} - d_v I_v \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta I_v - (d_h + \rho + \mu)I_h \end{cases}$$

Definimos

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} c\beta N_v^* \frac{I_h}{A} \\ b\beta I_v \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{V} = \begin{bmatrix} d_v I_v \\ (d_h + \rho + \mu)I_h \end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$F = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_h} \right|_D \\ \left. \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_h} \right|_D \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_h} \right|_D \\ \left. \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_v} \right|_D & \left. \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_h} \right|_D \end{bmatrix}$$

Luego:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & c\beta N_v^* \frac{1}{A} \\ b\beta & 0 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} d_v & 0 \\ 0 & d_h + \rho + \mu \end{bmatrix}$$

Ahora

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_h + \rho + \mu} \end{bmatrix}, \quad FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c\beta N_v^*}{A(d_h + \rho + \mu)} \\ \frac{b\beta}{d_v} & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos el número reproductivo básico:

$$R_{00} = \sqrt{\frac{bc\beta^2 N_v^*}{d_v A(d_h + \rho + \mu)}} = \sqrt{\frac{d_h bc\beta^2 N_v^*}{d_v \Gamma(d_h + \rho + \mu)}}$$

$$R_{00}^2 = \frac{d_h bc\beta^2 N_v^*}{d_v \Gamma(d_h + \rho + \mu)}$$

Observación 4.6.1.

La relación entre los números reproductivos obtenidos es $R_{00} \leq R_0$. En efecto, a partir del sistema (4.1) para el punto (L^*, N_v^*, P^*) se cumplen las igualdades y desigualdades siguientes

$$gN_v^* = dL^* + d_1L^{*2} + \lambda_v L^* + \alpha_1 v L^* P^* + \alpha_1 \alpha_2 (1 - v) L^* q e P^* \geq \lambda_v L^*$$

$$\lambda_v L^* = d_v N_v^* + m_v (N_v^*)^2 \geq d_v N_v^*$$

$$\text{Entonces } d_v N_v^* \leq g N_v^* \Rightarrow d_v \leq g$$

$$\frac{\lambda_v L^*}{N_v^*} = d_v + m_v N_v^* \leq g$$

$$\text{Además } d_h N_h^* \leq \Gamma$$

Luego

$$(\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma) d_h \leq d_h \rho N_h^* + d_h \mu N_h^* + d_h \Gamma \leq (\rho + \mu + d_h) \Gamma$$

$$0 \leq d_v \leq d_v + m_v N_v^* \leq g$$

$$0 \leq m_v N_v^* \leq d_v + m_v N_v^* \leq g$$

$$(\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma)(d_v + m_v N_v^*) d_h \leq g(\rho + \mu + d_h) \Gamma$$

Se tiene que d_h es muy pequeño en comparación con d_v , pues la esperanza de vida de los humanos es 70 años, así $d_h = \frac{1}{365 \times 70} \approx 0.00003913$ y la esperanza de vida del mosquito es de no más de 20 días, así $d_v = \frac{1}{20} = 0,05$. Entonces, se cumple que

$$(d_v + m_v N_v^*) d_h \leq d_v \Rightarrow d_h (\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma)(d_v + m_v N_v^*) \leq d_v \Gamma (\rho + \mu + d_h)$$

Así tenemos

$$R_{00}^2 = \frac{d_h b c \beta^2 N_v^*}{d_v \Gamma (\rho + \mu + d_h)} \leq R_0^2 = \frac{b c \beta^2 N_v^*}{(\rho N_h^* + \mu N_h^* + \Gamma)(d_v + m_v N_v^*)}$$

Lema 4.6.1 Si $R_{00} \leq 1$, el punto de equilibrio trivial $(0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1.5) con valor inicial en $\mathbb{R}_+^2$.

Prueba:

Sea $B = [0, N_v^*] \times [0, A]$. Verificamos que B es positivamente invariante para el sistema (4.1.5). En efecto, sea $\bar{I}_v(0) \in [0, N_v^*]$, $\bar{I}_h(0) \in [0, A]$

Debemos de probar que $\bar{I}_v(t) \leq N_v^*$, para todo $t \geq 0$. Por el absurdo afirmamos que existe $t_1 \geq 0$ tal que $\bar{I}_v(t_1) > N_v^*$, así tenemos

$$\bar{I}_v(0) < N_v^* < \bar{I}_v(t_1)$$

Por el teorema del valor medio: existe $t_2 \in (0; t_1)$ ($0 < t_2 < t_1$)

$$\bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(0) = t_1 \frac{d\bar{I}_v(t_2)}{dt} = t_1 \left(c\beta(N_v^* - \bar{I}_v(t_2)) \frac{\bar{I}_h(t_2)}{A} - d_v \bar{I}_v(t_2) \right) > 0$$

Entonces $\bar{I}_v(t_2) < N_v^*$. Por la continuidad de $\bar{I}_v$ existe $\tilde{t} \in (0; t_1)$ ($0 < \tilde{t} < t_1$) tal que $N_v^* = \bar{I}_v(\tilde{t})$. Por el teorema del valor medio: existe $t_3 \in (\tilde{t}; t_1)$ ($\tilde{t} < t_3 < t_1$)

$$\bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(\tilde{t}) = (t_1 - \tilde{t}) \frac{d\bar{I}_v(t_3)}{dt} = (t_1 - \tilde{t}) \left(c\beta(N_v^* - \bar{I}_v(t_3)) \frac{\bar{I}_h(t_3)}{A} - d_v \bar{I}_v(t_3) \right) > 0$$

Entonces $\bar{I}_v(t_3) < N_v^*$. Nuevamente usando el teorema del valor medio: existe $t_4 \in (t_3; t_1)$ ($t_3 < t_4 < t_1$)

$$\begin{aligned} \bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(t_3) &= \bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(\tilde{t}) + \bar{I}_v(\tilde{t}) - \bar{I}_v(t_3) = (t_1 - t_3) \frac{d\bar{I}_v(t_4)}{dt} \\ &= (t_1 - t_3) \left(c\beta(N_v^* - \bar{I}_v(t_4)) \frac{\bar{I}_h(t_4)}{A} - d_v \bar{I}_v(t_4) \right) > 0 \end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_v(t_4) < N_v^*$. Según el teorema del valor medio: existe $t_5 \in (t_4; t_1)$ ($t_4 < t_5 < t_1$)

$$\begin{aligned} \bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(t_4) &= \bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(\tilde{t}) + \bar{I}_v(\tilde{t}) - \bar{I}_v(t_4) = (t_1 - t_4) \frac{d\bar{I}_v(t_5)}{dt} \\ &= (t_1 - t_4) \left(c\beta(N_v^* - \bar{I}_v(t_5)) \frac{\bar{I}_h(t_5)}{A} - d_v \bar{I}_v(t_5) \right) > 0 \end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_v(t_5) < N_v^*$. Así sucesivamente, por el teorema del valor medio: existe $t_n \in (t_{n-1}; t_1)$

$$\begin{aligned}\bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(t_{n-1}) &= \bar{I}_v(t_1) - \bar{I}_v(\tilde{t}) + \bar{I}_v(\tilde{t}) - \bar{I}_v(t_{n-1}) = (t_1 - t_{n-1}) \frac{d\bar{I}_v(t_n)}{dt} \\ &= (t_1 - t_{n-1}) \left(c\beta(N_v^* - \bar{I}_v(t_n)) \frac{\bar{I}_h(t_n)}{A} - d_v \bar{I}_v(t_n) \right) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_v(t_n) < N_v^*$. Así $\tilde{t} < t_3 < t_4 < t_5 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_1$ ha formado una sucesión tal que $t_n \rightarrow t_1$, por la continuidad de $\bar{I}_v$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}_v(t_n) = \bar{I}_v(t_1) \leq N_v^*$ lo cual es contradictorio.

Debemos de probar que $\bar{I}_h(t) \leq A$, para todo $t \geq 0$. Por el absurdo afirmamos que existe $t_1 \geq 0$ tal que $\bar{I}_h(t_1) > A$, así tenemos

$$\bar{I}_h(0) < A < \bar{I}_h(t_1)$$

Por el teorema del valor medio: existe $t_2 \in (0; t_1)$ ($0 < t_2 < t_1$)

$$\bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(0) = t_1 \frac{d\bar{I}_h(t_2)}{dt} = t_1 \left(b\beta(A - \bar{I}_h(t_2)) \frac{\bar{I}_v(t_2)}{A} - (d_h + \rho + \mu) \bar{I}_h(t_2) \right) > 0$$

Entonces $\bar{I}_h(t_2) < A$. Por la continuidad de $\bar{I}_h$ existe $\tilde{t} \in (0; t_1)$ ($0 < \tilde{t} < t_1$) tal que $A = \bar{I}_h(\tilde{t})$. Por el teorema del valor medio: existe $t_3 \in (\tilde{t}; t_1)$ ($\tilde{t} < t_3 < t_1$)

$$\begin{aligned}\bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(\tilde{t}) &= (t_1 - \tilde{t}) \frac{d\bar{I}_h(t_3)}{dt} \\ &= (t_1 - \tilde{t}) \left(b\beta(A - \bar{I}_h(t_3)) \frac{\bar{I}_v(t_3)}{A} - (d_h + \rho + \mu) \bar{I}_h(t_3) \right) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_h(t_3) < A$. Nuevamente usando el teorema del valor medio: existe $t_4 \in (t_3; t_1)$ ($t_3 < t_4 < t_1$)

$$\begin{aligned}\bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(t_3) &= \bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(\tilde{t}) + \bar{I}_h(\tilde{t}) - \bar{I}_h(t_3) = (t_1 - t_3) \frac{d\bar{I}_h(t_4)}{dt} \\ &= (t_1 - t_3) \left(b\beta(A - \bar{I}_h(t_4)) \frac{\bar{I}_v(t_4)}{A} - (d_h + \rho + \mu) \bar{I}_h(t_4) \right) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_v(t_4) < A$. Según el teorema del valor medio: existe $t_5 \in (t_4; t_1)$ ($t_4 < t_5 < t_1$)

$$\begin{aligned}\bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(t_4) &= \bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(\tilde{t}) + \bar{I}_h(\tilde{t}) - \bar{I}_h(t_4) = (t_1 - t_4) \frac{d\bar{I}_h(t_5)}{dt} \\ &= (t_1 - t_4) \left(b\beta(A - \bar{I}_h(t_5)) \frac{\bar{I}_v(t_5)}{A} - (d_h + \rho + \mu) \bar{I}_h(t_5) \right) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_h(t_5) < A$. Así sucesivamente, por el teorema del valor medio: existe $t_n \in (t_{n-1}; t_1)$

$$\begin{aligned}\bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(t_{n-1}) &= \bar{I}_h(t_1) - \bar{I}_h(\tilde{t}) + \bar{I}_h(\tilde{t}) - \bar{I}_h(t_{n-1}) = (t_1 - t_{n-1}) \frac{d\bar{I}_h(t_n)}{dt} \\ &= (t_1 - t_{n-1}) \left(b\beta(A - \bar{I}_h(t_n)) \frac{\bar{I}_v(t_n)}{A} - (d_h + \rho + \mu) \bar{I}_h(t_n) \right) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\bar{I}_h(t_n) < A$. Así $\tilde{t} < t_3 < t_4 < t_5 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_1$ hemos formado una sucesión tal que $t_n \rightarrow t_1$, por la continuidad de $\bar{I}_h$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}_h(t_n) = \bar{I}_h(t_1) \leq A$ lo cual es contradictorio.

Se deduce que $\omega(\bar{I}_v(0), \bar{I}_h(0)) \subset B$ dado que

$$\omega(\bar{I}_v(0), \bar{I}_h(0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \exists t_k \rightarrow \infty \text{ tal que } (\bar{I}_v(t_k), \bar{I}_h(t_k)) \rightarrow (x, y)\}$$

$$0 \leq \bar{I}_v(t_k) \leq N_v^*; 0 \leq \bar{I}_h(t_k) \leq A \Rightarrow (x, y) \in B$$

Definimos la función:

$$f(x) = \left(c\beta(N_v^* - x_1) \frac{x_2}{A} - d_v x_1 ; b\beta(A - x_2) \frac{x_1}{A} - (d_h + \rho + \mu) x_2 \right)$$

$$Df(x) = \begin{bmatrix} -c\beta \frac{x_2}{A} - d_v & c\beta(N_v^* - x_1) \frac{1}{A} \\ b\beta(A - x_2) \frac{1}{A} & -b\beta \frac{x_1}{A} - (d_h + \rho + \mu) \end{bmatrix}$$

f es cooperativo sobre B ($\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, 1 \leq i, j \leq 2, i \neq j$) y $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ y es irreducible para todo $x \in B$ (el dígrafo asociado a la matriz de pesos de $Df(x)$ es fuertemente conexo)

$$f(0) = 0 \text{ y } f_i(x) \geq 0, \forall x \in B \text{ con } x_i = 0; i = 1, 2$$

f es estrictamente subhomogénea sobre R_+^2 , es decir $f(px) > pf(x)$ para cualquier $p \in]0,1[$ y $(x_1, x_2) \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$, verificando esto

$$f(px) = \left(c\beta(N_v^* - px_1) \frac{px_2}{A} - d_v px_1; b\beta(A - px_2) \frac{px_1}{A} - (d_h + \rho + \mu) px_2 \right)$$

$$pf(x) = \left(c\beta(N_v^* - x_1) \frac{px_2}{A} - d_v px_1; b\beta(A - x_2) \frac{px_1}{A} - (d_h + \rho + \mu) px_2 \right)$$

Se puede observar que f es estrictamente subhomogénea.

Ahora evaluamos el Jacobiano en $(0,0)$

$$Df(x)|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -d_v & c\beta N_v^* \frac{1}{A} \\ b\beta & -(d_h + \rho + \mu) \end{bmatrix}$$

El radio espectral de $Df(0,0)$ es definido como $\rho(Df(0)) = \max\{Re \lambda; \det(\lambda I - Df(0,0)) = 0\}$, la ecuación caractestica es:

$$(d_v + x)((d_h + \rho + \mu) + x) - b\beta c\beta N_v^* \frac{1}{A} = 0$$

$$x^2 + (d_h + \rho + \mu + d_v)x + d_v(d_h + \rho + \mu) - b\beta c\beta N_v^* \frac{1}{A} = 0$$

$$x^2 + (d_h + \rho + \mu + d_v)x + d_v(d_h + \rho + \mu) \left(1 - \frac{bc\beta^2 N_v^*}{Ad_v(d_h + \rho + \mu)} \right) = 0$$

$$x^2 + (d_h + \rho + \mu + d_v)x + d_v(d_h + \rho + \mu)(1 - R_{00}^2) = 0$$

$$x = \frac{-(d_h + \rho + \mu + d_v) \pm \sqrt{(d_h + \rho + \mu + d_v)^2 - 4d_v(d_h + \rho + \mu)(1 - R_{00}^2)}}{2}$$

Para que $\rho(Df(0)) \leq 0$ se debe tener que $R_{00} - 1 \leq 0$, se sigue de teorema 2.7.1 que el sistema (4.1.5) tiene como estado estable $(0,0)$ que es globalmente asintóticamente estable con valor inicial en $\mathbb{R}_+^2$. ■

Lema 4.6.2 Si $R_{00} \leq 1$, el punto de equilibrio $(0,0,\tilde{N}_h)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1.4) con valor inicial en $\mathbb{R}_+^2 \times]0, \infty[$.

Prueba:

Ahora, Si $R_{00} \leq 1$ por el lema anterior tenemos $\bar{I}_h(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, para cualquier $I_h(0) \in [0, A]$. Entonces reemplazando en la tercera ecuación del sistema (4.1.4):

$$\frac{d\bar{N}_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h \bar{N}_h \dots (*)$$

Donde $\bar{N}_h = \check{N}_h = \frac{\Gamma}{d_h}$ es punto de equilibrio de la ecuación (*). Tomando la siguiente función

$$V(\bar{N}_h) = \frac{1}{2}(\bar{N}_h - \check{N}_h)^2$$

$$V'(\bar{N}_h) = (\bar{N}_h - \check{N}_h)\bar{N}_h'$$

$$V'(\bar{N}_h) = (\bar{N}_h - \check{N}_h)(\Gamma - d_h \bar{N}_h)$$

$$V'(\bar{N}_h) = (\bar{N}_h - \check{N}_h)(d_h \check{N}_h - d_h \bar{N}_h)$$

$$V'(\bar{N}_h) = -d_h(\bar{N}_h - \check{N}_h)^2 \leq 0$$

Además, $V'(N_h) < 0$ para $\check{N}_h \neq \bar{N}_h$

Por lo que $(0, 0, \check{N}_h)$ es asintóticamente estable para el sistema (4.1.4). Ahora, encontramos el conjunto invariante de las soluciones del sistema que este contenido en el conjunto

$$M = \{u \in]0, \infty[: V'(u) = 0\} = \{\check{N}_h\}$$

Por el principio de invarianza de LaSalle (ver el teorema 2.6.2) $\{\check{N}_h\}$ es globamente asintóticamente estable en $]0, \infty[$ para la ecuación (*). ■

Teorema 4.6.2

Si $R_{00} \leq R_0 \leq 1$, el punto de equilibrio $(0, 0, N_h^*)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1.3) en Y

Prueba

Sea $\phi(t)$ es el semiflujo asociado al sistema (4.1.3) sobre Y , esto es:

$$\phi(t)(I_v(0), I_h(0), N_h(0)) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = (I_v(t), I_h(t), N_h(t))$$

Es la única solución de sistema (4.1.3) con condición inicial $(I_v(0), I_h(0), N_h(0)) \in Y$. Entonces $\phi(t)$ es compacto para cada $t > 0$. Sea $\omega = \omega(I_v(0), I_h(0), N_h(0))$ es el conjunto omega límite del semiflujo $\phi(t)(I_v(0), I_h(0), N_h(0))$, se sigue del lema 2.9.1 que $\omega(I_v(0), I_h(0), N_h(0))$ es un conjunto internamente cadena transitivo de conjunto para $\phi(t)$ sobre Y .

Si $R_{00} \leq R_0 \leq 1$, por el lema 4.5.2 y por comparación tenemos que $I_v(t) \rightarrow 0$, $I_h(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier $(I_v(0), I_h(0)) \in \mathbb{R}_+^2$. Entonces

$$\omega(0, 0, N_h(0)) = \{(0, 0)\} \times \omega_1$$

para algún $\omega_1 \subset \mathbb{R}$. Se puede ver que

$$\phi(t)|_{\omega}(0, 0, N_h(0)) = (0, 0, \psi(t)(N_h(0)))$$

Donde $\psi(t)(N_h(0))$ es el semiflujo asociado con la siguiente ecuación

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h N_h - m_h (N_h)^2 \dots (**)$$

$N_h^* = \frac{-d_h + \sqrt{d_h^2 + 4m_h \Gamma}}{2m_h}$ es punto de equilibrio de la ecuación (**). Tomando la siguiente función

$$V(N_h) = \frac{1}{2} (N_h - N_h^*)^2$$

$$V'(N_h) = (N_h - N_h^*) N_h'$$

$$V'(N_h) = (N_h - N_h^*) (\Gamma - d_h N_h - m_h (N_h)^2)$$

$$V'(N_h) = (N_h - N_h^*) (d_h N_h^* + m_h (N_h^*)^2 - d_h N_h - m_h (N_h)^2)$$

$$V'(N_h) = (d_h N_h^* N_h + m_h (N_h^*)^2 N_h - d_h N_h^2 - m_h (N_h)^3 - d_h (N_h^*)^2 - m_h (N_h^*)^3 \\ + d_h N_h N_h^* + m_h (N_h)^2 N_h^*)$$

$$V'(N_h) = (-d_h N_h^2 + 2d_h N_h^* N_h - d_h (N_h^*)^2 + m_h (N_h^*)^2 N_h + m_h (N_h)^2 N_h^* - m_h (N_h)^3 \\ - m_h (N_h^*)^3)$$

$$V'(N_h) = \left(-d_h (N_h^2 - 2N_h^* N_h + (N_h^*)^2) + m_h N_h N_h^* (N_h^* + N_h) - m_h (N_h^3 + (N_h^*)^3) \right)$$

$$V'(N_h) = \left(-d_h (N_h^* - N_h)^2 + m_h N_h N_h^* (N_h^* + N_h) \right. \\ \left. - m_h (N_h^* + N_h) ((N_h^*)^2 - N_h^* N_h + N_h^2) \right)$$

$$V'(N_h) = \left(-d_h (N_h^* - N_h)^2 + m_h (N_h^* + N_h) (-(N_h^*)^2 + 2N_h^* N_h - N_h^2) \right)$$

$$V'(N_h) = (-d_h (N_h^* - N_h)^2 - m_h (N_h^* + N_h) (N_h^* - N_h)^2) \leq 0$$

Además, $V'(N_h) < 0$ para $N_h \neq N_h^*$

Por lo que $(0, 0, \tilde{N}_h)$ es asintóticamente estable para el sistema (4.1.4). Ahora, encontramos el conjunto invariante de las soluciones del sistema que este contenido en el conjunto

$$M = \{u \in]0, \infty[: V'(u) = 0\} = \{N_h^*\}$$

Por el principio el teorema 2.6.2 tenemos que $\{N_h^*\}$ es globalmente asintóticamente estable en $]0, \infty[$ para la ecuación (**). Desde que ω_1 es un conjunto internamente cadena transitivo para $\psi(t)$. Por el lema 2.9.2 implica que $\omega_1 = \{N_h^*\}$, por lo tanto $\omega = \{(0, 0, N_h^*)\}$, esto prueba la afirmación. ■

Teorema 4.6.3

Si $R_{00} \leq R_0 \leq 1$, el punto de equilibrio libre de infección $D(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1) en $\text{int}(W)$.

Prueba:

Sea $\Psi(t)$ es la solución semiflujo del sistema (4.1) sobre W esto es:

$$\Psi(t)(L(0), N_v(0), P(0), I_v(0), I_h(0), N_h(0)) = (L(t), N_v(t), P(t), I_v(t), I_h(t), N_h(t))$$

Entonces. $\Psi(t)$ es compacto para cada $t > 0$.

Sea $\omega = \omega(L(0), N_v(0), P(0), I_v(0), I_h(0), N_h(0))$ es el conjunto omega límite del semiflujo $\Psi(t)(L(0), N_v(0), P(0), I_v(0), I_h(0), N_h(0))$, se sigue luego del lema 2.9.1 que ω es un conjunto internamente cadena transitivo de conjunto para $\Psi(t)$ sobre W .

Por el teorema 4.5.1 tenemos $L(t) \rightarrow L^*$, $N_v(t) \rightarrow N_v^*$ y $P(t) \rightarrow P^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier $L(0) > 0$, $N_v(0) > 0$ y $P(0) > 0$. Entonces

$$\omega = \{(L^*, N_v^*, P^*)\} \times \omega_1$$

para algún $\omega_1 \subset R^3$. Luego:

$$\Psi(t)|_{\omega}(L^*, N_v^*, P^*, I_v(0), I_h(0), N_h(0)) = (L^*, N_v^*, P^*, \varphi(t)(I_v(0), I_h(0), N_h(0)))$$

Donde $\varphi(t)$ es el semiflujo solución del sistema

$$(4.1.3) \dots \begin{cases} \frac{dI_v(t)}{dt} = c\beta(N_v^* - I_v) \frac{I_h}{N_h} - d_v I_v - m_v I_v N_v^* \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = b\beta(N_h - I_h) \frac{I_v}{N_h} - (d_h + \rho + \mu) I_h - m_h I_h N_h \\ \frac{dN_h(t)}{dt} = \Gamma - d_h N_h - \mu I_h - m_h (N_h)^2 \end{cases}$$

Desde que ω es un conjunto internamente cadena transitivo para $\Psi(t)$, se sigue que ω_1 es un conjunto internamente cadena transitivo para $\varphi(t)$.

Como $R_{00} \leq R_0 \leq 1$ por el teorema 4.5.3 el punto de equilibrio $(0, 0, N_h^*)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1.3). Desde que ω_1 es un conjunto internamente cadena transitivo para $\varphi(t)$, Por el lema 2.9.2 implica que $\omega_1 = \{(0, 0, N_h^*)\}$, por lo tanto $\omega = \{(L^*, N_v^*, P^*, 0, 0, N_h^*)\}$, esto prueba la afirmación.

■.

V. SIMULACIÓN NÚMÉRICA

Recordando que el vector $(L, N_v, P, I_v, I_h, N_h)$ representa las poblaciones de larvas, población de mosquitos, peces, mosquitos infectados, humanos infectados y población de humanos respectivamente para cada componente del vector.

5.1 EVOLUCIÓN DE LAS POBLACIONES L, P, N_v Y N_h PARA CUANDO $R_0 < 1$ Y CUANDO $R_0 > 1$

Tomamos los valores de los parámetros dados en la tabla 4 al que le corresponde un punto de equilibrio libre de infección D . Todos los valores de los parámetros son tomados de Ghosh et al. (2013) excepto los valores los parámetros m_h y m_v que son atribución de esta investigación.

Tabla 4

Valores de los parámetros para el punto libre de infección D

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
g	60	k	2000
d	0.05	c	0.3
d_1	0.02	β	0.2
λ_v	0.0625	d_h	0.00003913
v	0.2	d_v	0.05
α_1	0.2	ρ	0.005
α_2	0.5	μ	0.00005
q	0.3	b	0.3
e	0.5	Γ	0.8
r	0.2	m_v	0.002
γ	0.1	m_h	0.004

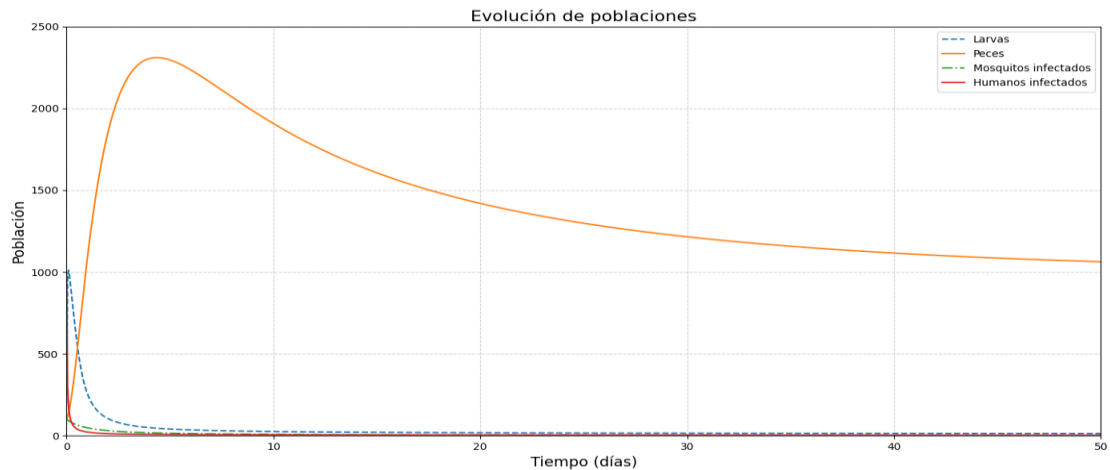
Obtenemos $R_0 \approx 0.79 < 1$ ($R_{00} \approx 0.09$) y el punto de equilibrio libre de infección $D(12.46 ; 10.86 ; 998.53 ; 0 ; 0 ; 14.14)$ que es localmente asintóticamente estable.

En la figura 9 se presenta la gráfica de la evolución, según el modelo, de las poblaciones involucradas en 50 días. Se observa que tanto las poblaciones de humanos infectados y de mosquitos infectados decrecen y tienden al equilibrio libre de infección, por lo que inicialmente será necesario una cantidad mayor de peces

larvívoros que al consumir larvas harán que esta población deje de crecer, para que luego la población de larvas decrezca y sea necesario una cantidad menor de peces larvívoros.

Figura 9

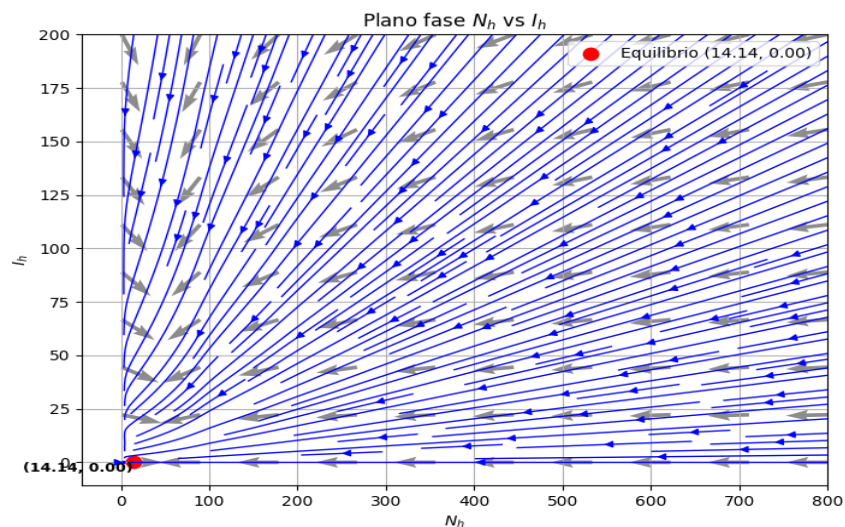
Gráfica de las poblaciones con el tiempo en días cuando $R_0 < 1$



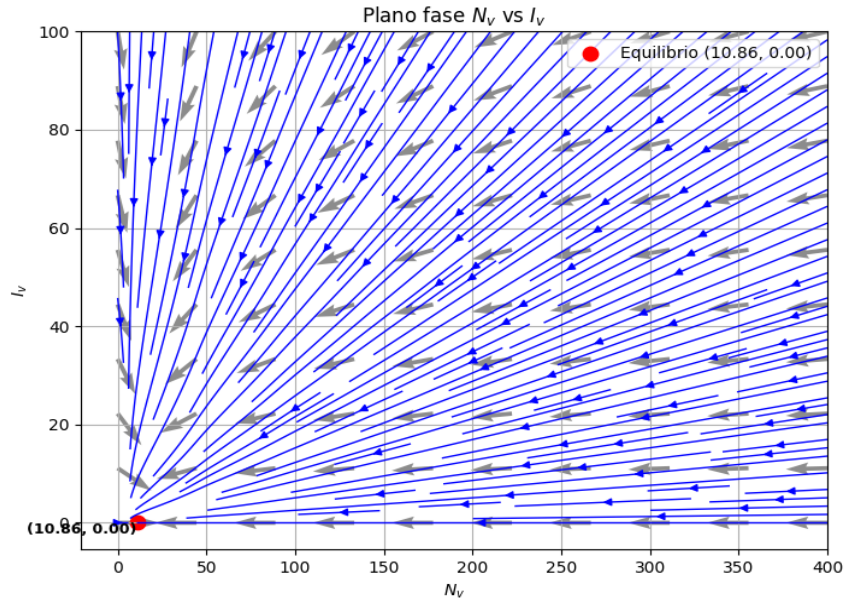
En la figura 10 se muestran los planos fases $N_h - I_h$, $N_v - I_v$ y $P - L$, donde se pueden observar el campo de direcciones para cada uno y la ubicación del punto de equilibrio en color rojo. En cada plano fase del sistema (4.1) para los valores de la tabla 4 se muestra la estabilidad asintótica del punto de equilibrio libre de infección D .

Figura 10

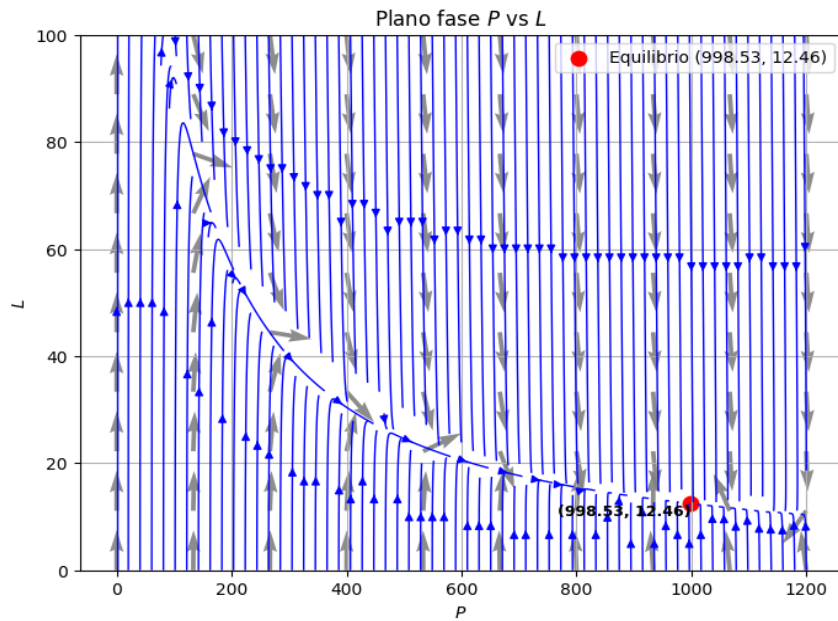
Planos fase, punto de equilibrio libre de infección y campo de direcciones



(a)



(b)



(c)

Ahora, tomamos los valores de los parámetros dados en la tabla 5 al que le corresponde un punto de equilibrio endémico E . Todos los valores de los parámetros son tomados de Ghosh et al. (2013) excepto los valores los parámetros m_h y m_v que son atribución de esta investigación.

Tabla 5*Valores de los parámetros para el punto de equilibrio endémico E*

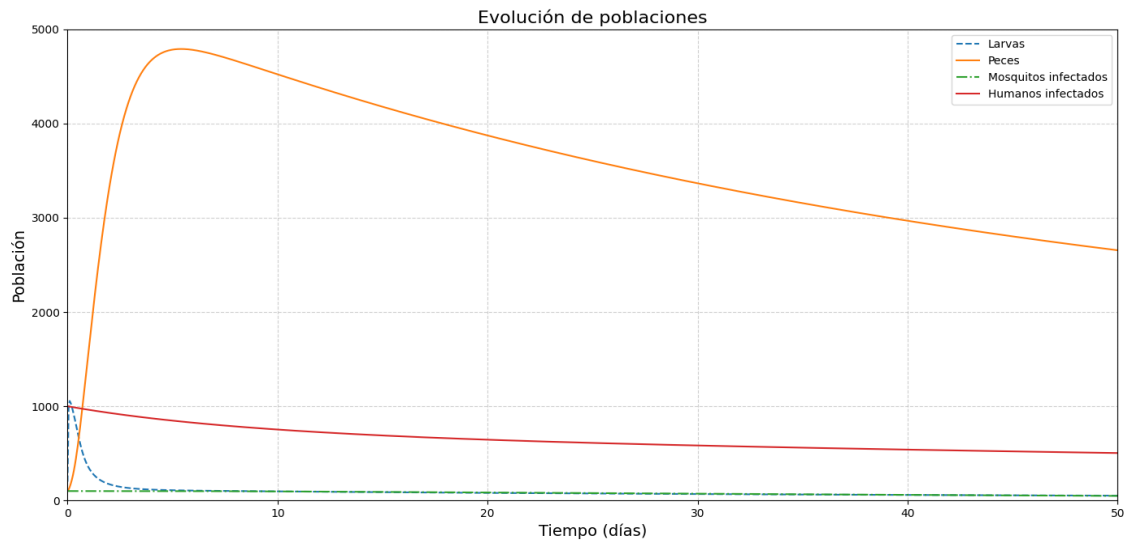
Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
g	60	k	2000
d	0.05	c	0.5
d_1	0.02	β	0.3
λ_v	0.0625	d_h	0.00003913
v	0.2	d_v	0.05
α_1	0.2	ρ	0.005
α_2	0.5	μ	0.00005
q	0.3	b	0.5
e	0.5	Γ	0.3
r	0.2	m_v	0.000002
γ	0.1	m_h	0.000004

Obtenemos $R_0 \approx 2.8 > 1$ el punto de equilibrio endémico es $E(23.24; 29.01; 1429.53; 19.03; 168.76; 265.14)$ que viene a ser localmente asintóticamente estable.

En la figura 11 se presenta la gráfica de la evolución, según el modelo, de las poblaciones involucradas en 50 días. Se observa que tanto las poblaciones de humanos infectados y de mosquitos infectados decrecen y tienden al equilibrio endémico de una manera mas lenta que en el caso del punto libre de infección, por lo que inicialmente será necesario una cantidad mayor de peces larvívoros que al consumir larvas harán que esta población deje de crecer, para que luego la población de larvas decrezca y sea necesario una cantidad menor de peces larvívoros.

Figura 11

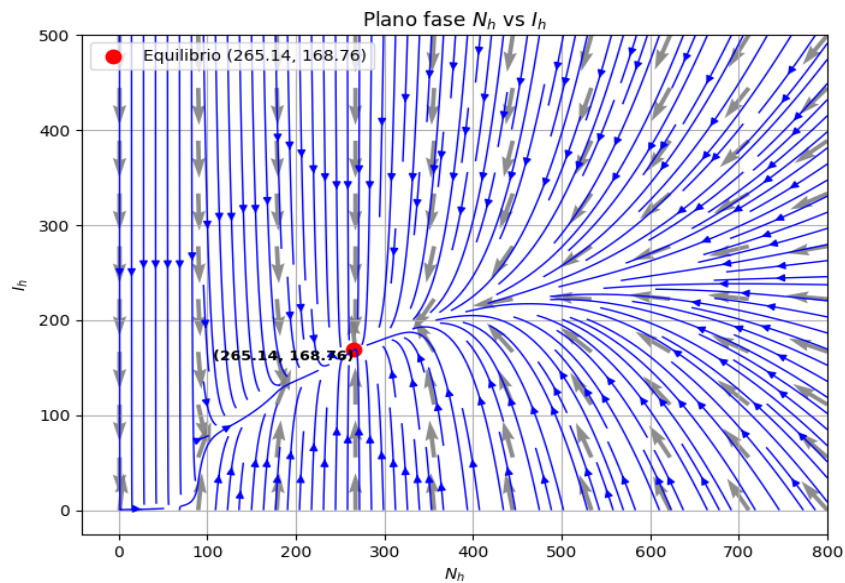
Gráfica de las poblaciones con el tiempo en días cuando $R_0 > 1$



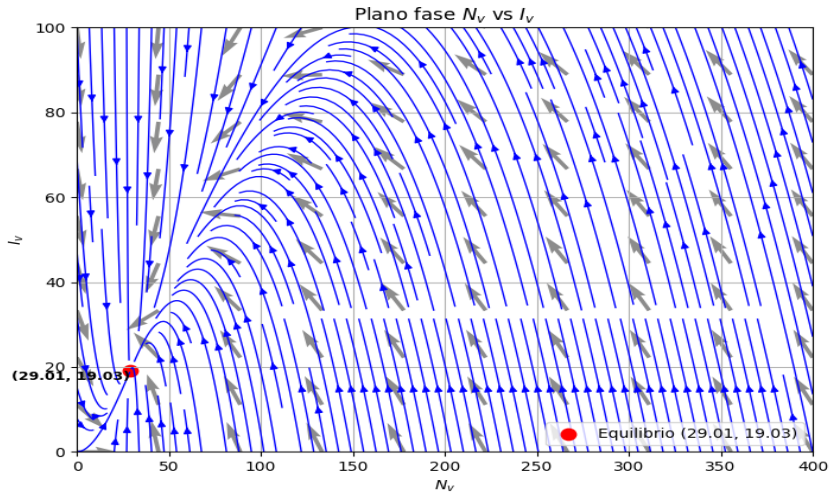
En la figura 12 se muestran los planos fases $N_h - I_h$, $N_v - I_v$ y $P - L$, donde se pueden observar el campo de direcciones para cada uno y la ubicación del punto de equilibrio en color rojo. En cada plano fase del sistema (4.1) para los valores de la tabla 5 se muestra la estabilidad asintótica del punto de equilibrio endémico E .

Figura 12

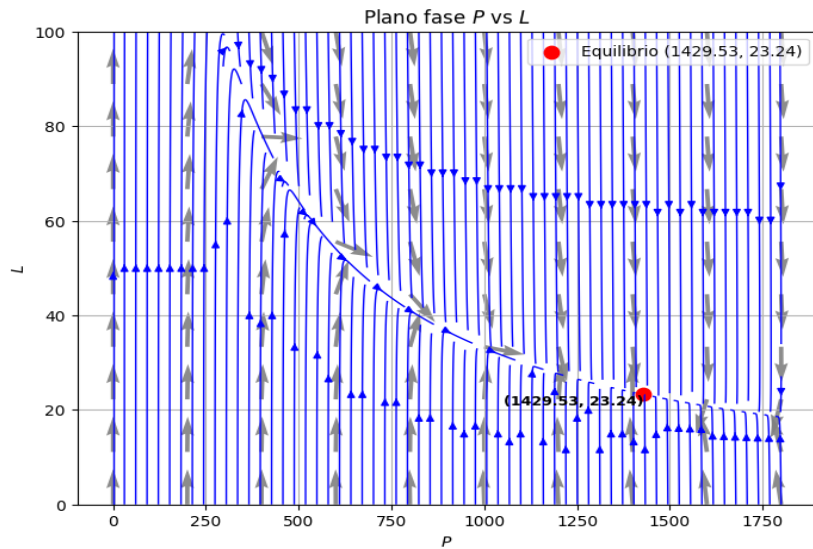
Planos fase, punto de equilibrio endémico y campo de direcciones



(a)



(b)



(c)

5.2 EVOLUCIÓN DE LAS POBLACIONES DE INFECTADOS I_v E I_h VARIANDO m_v Y/O m_h

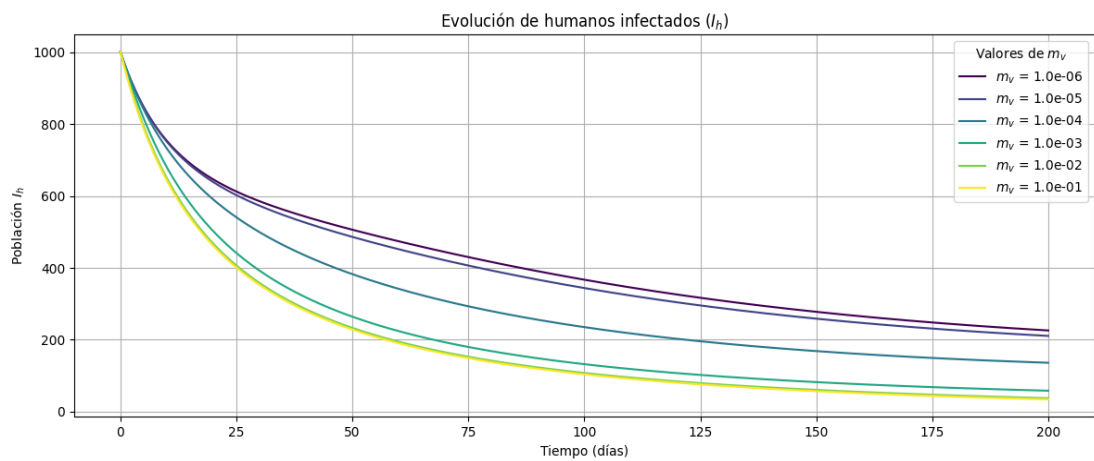
En este análisis los parámetros del sistema (4.1) toman los mismos valores que se dan en la tabla 5 excepto los de m_v y m_h que varían en el intervalo $[0.000001, 0.1]$

En la figura 13 (a) y 13 (b) se muestran las gráficas de población de humanos infectados y población de mosquitos infectados variando el coeficiente de competencia intraespecífica en los mosquitos m_v , pero manteniendo constante el coeficiente de competencia intraespecífica en humanos m_h . Se puede ver que a mayor m_v , es decir mayor competencia entre mosquitos, la población de mosquitos

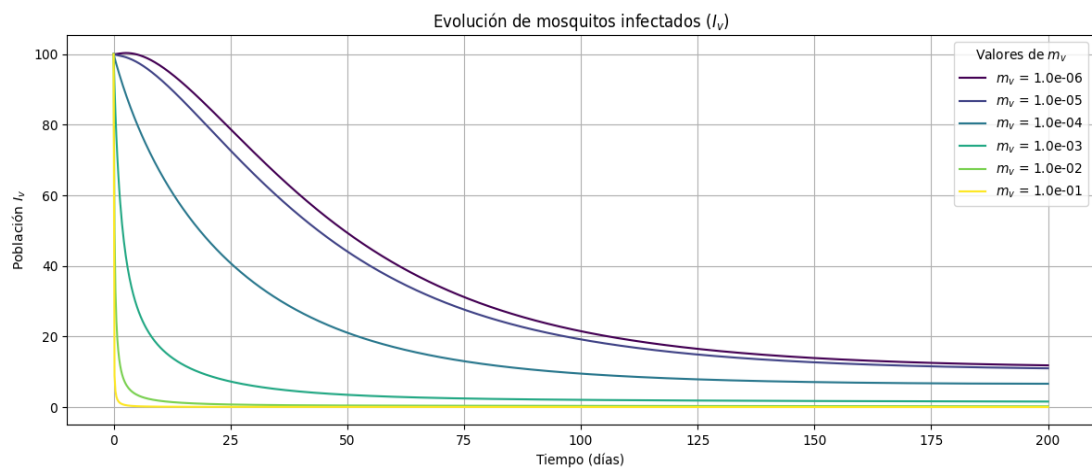
infectados decrece y la población de humanos infectados también decrece. Esto sugiere que la competencia intraespecífica entre mosquitos (por alimento, hábitad, reproducción, etc.) limita el crecimiento de la población de mosquitos infectados, lo que reduce la propagación del parásito. La curva de I_h muestra una disminución mucho más pronunciada que la de I_v . Esto indica que la dinámica de transmisión a humanos es más sensible al cambio en m_v . Posiblemente porque un pequeño cambio en la población de mosquitos tiene un gran efecto en la tasa de picaduras infectantes a humanos.

Figura 13

Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_v



(a)

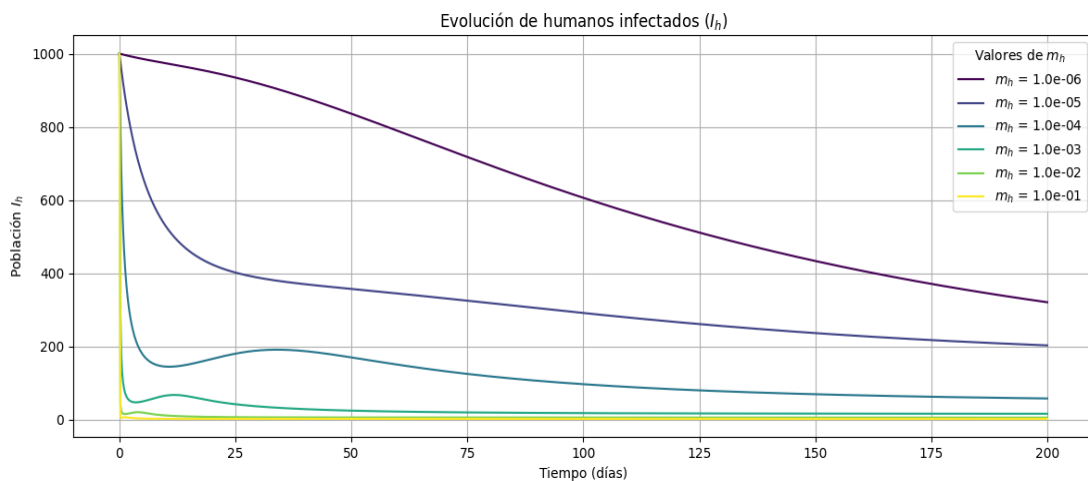


(b)

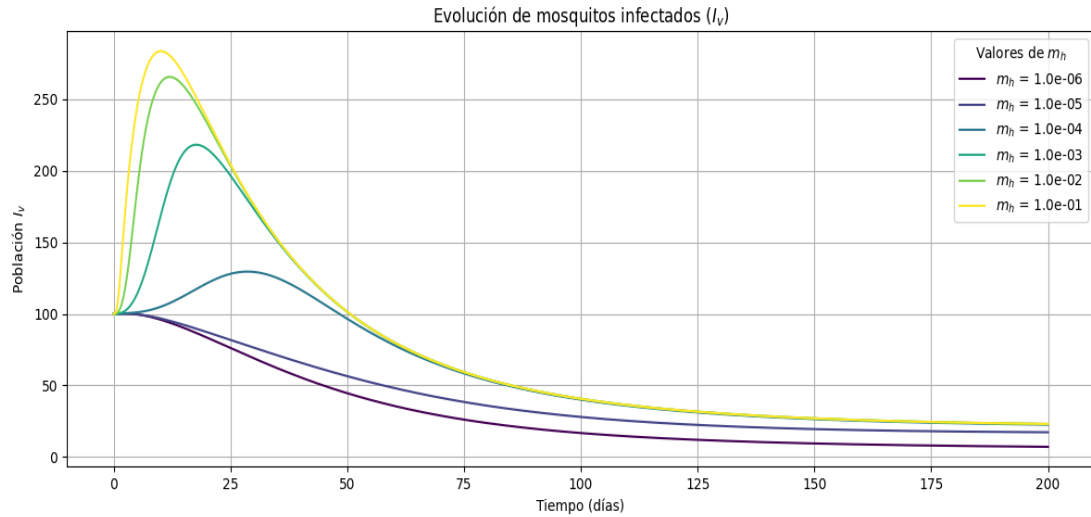
Ahora, se muestran las figuras 14 (a) y 14 (b) de las gráficas de población de mosquitos infectados y población de humanos infectados variando el coeficiente de competencia intraespecífica en los humanos pero manteniendo constante el coeficiente de competencia intraespecífica en mosquitos. Se puede ver que a mayor m_h , la población de humanos infectados decrece no tan abruptamente con $m_h = 10^{-6}$ y que en los sucesivos valores mayores de m_h del decrecimiento de los humanos infectados se hace muy fuerte, tendiendo al equilibrio endémico; esto puede interpretarse como que a mayor competencia entre humanos por tratamientos, atención médica, camas en hospitales, etc. podrían aumentar el tiempo de infección, la mortalidad por malaria o la vulnerabilidad. Mientras que, la población de mosquitos infectados para valores menores de m_h decrece suavemente y a medida que m_h va siendo más grande la cantidad de mosquitos infectados tiene picos de crecimiento en los 30 primeros días para que luego decrezca, debido a la disminución de los humanos infectados, tendiendo al equilibrio endémico.

Figura 14

Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_h



(a)

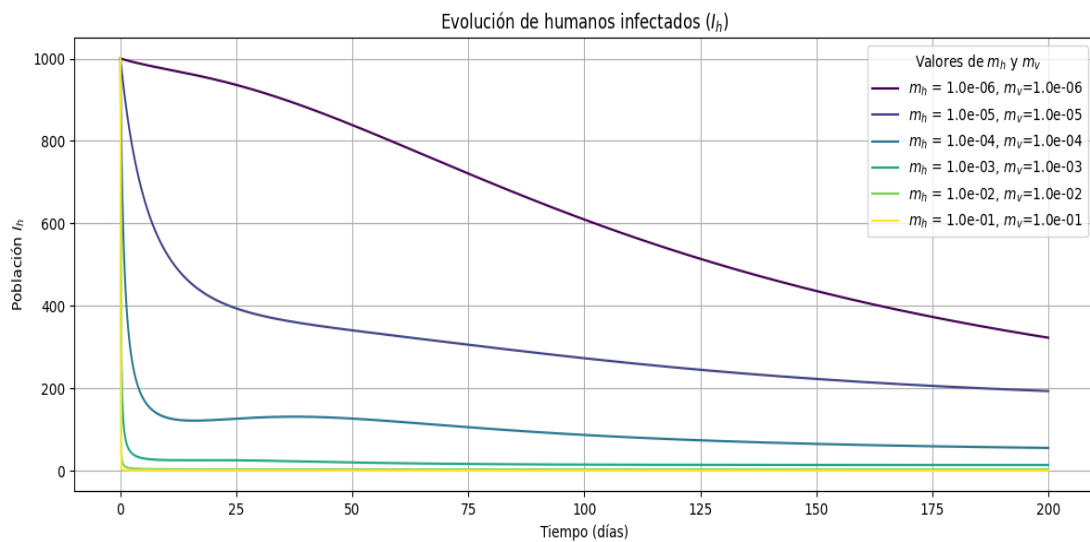


(b)

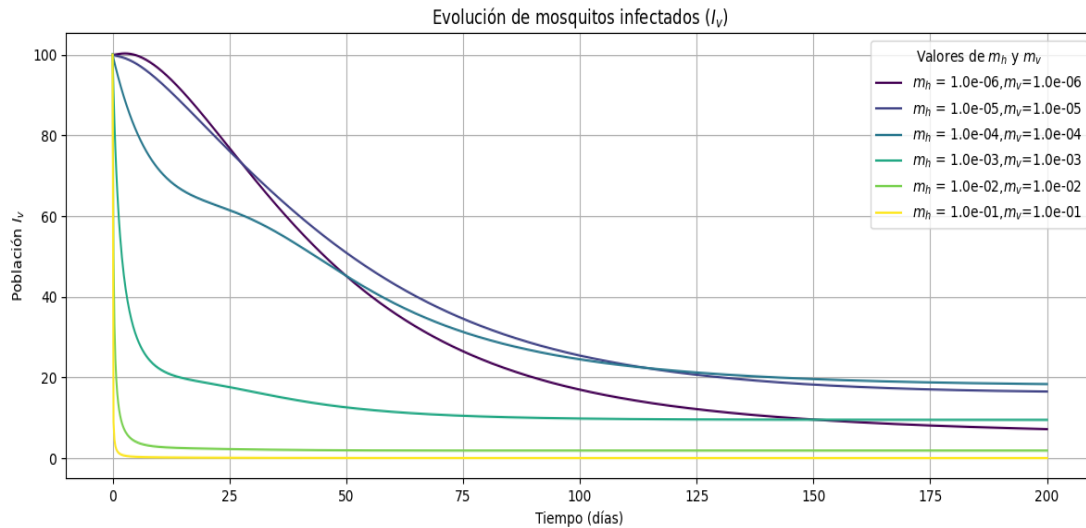
Luego, variando m_v y m_h simultáneamente, con $m_v = m_h$, se puede observar en la figura 15 que si se incrementan ambos coeficientes, las poblaciones de humanos infectados y mosquitos infectados decrecen simultáneamente tendiendo ambos a la extinción.

Figura 15

Poblaciones de humanos y mosquitos infectados en el tiempo en días variando m_v y m_h



(a)



(b)

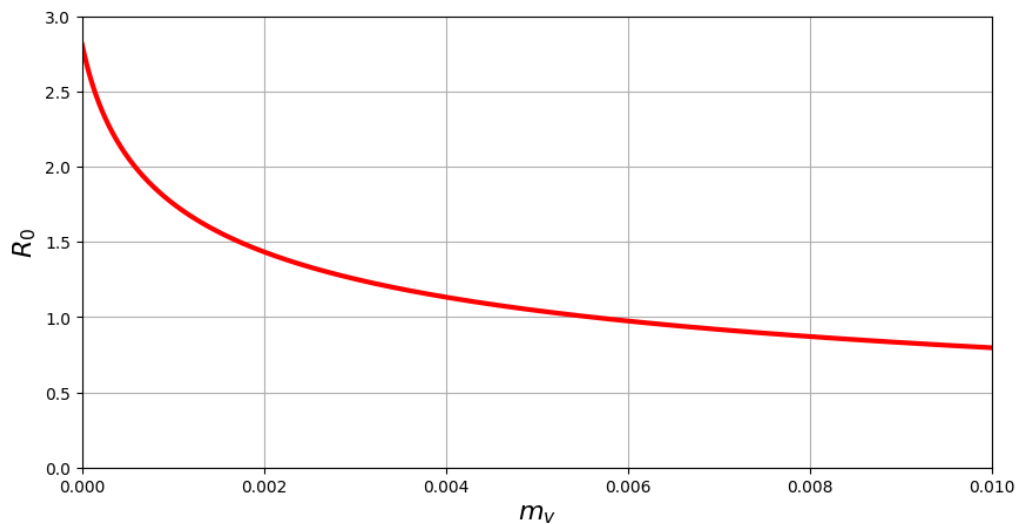
5.3 EVOLUCIÓN DE R_0 VARIANDO m_v Y/O m_h

En este análisis los parámetros del sistema (4.1) toman los mismos valores que se dan en la tabla 5 excepto los de m_v y m_h que van a variar.

En la figura 16 se muestra el comportamiento de R_0 cuando los valores de m_v varían y el valor de m_h permanece constante. Se puede observar que una mayor competencia entre mosquitos hará que R_0 tienda a un valor menor a 1, esto implica que la enfermedad tenderá a desaparecer. En este caso si se plantean políticas públicas que permitan aumentar la competencia entre mosquitos la infección tenderá a desaparecer en la población humana. Políticas como por ejemplo, la eliminación de focos de reproducción del mosquito, uso de mosquiteros, etc.

Figura 16

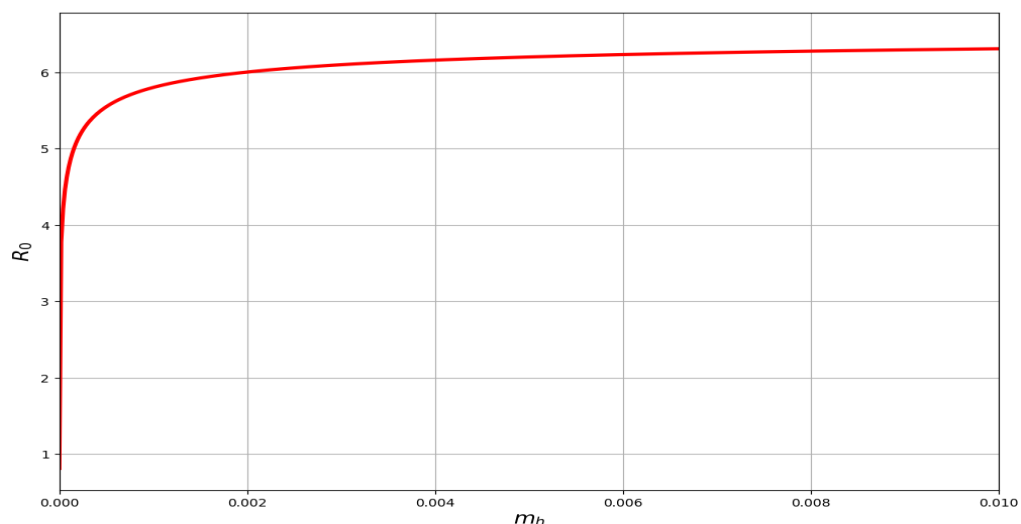
Gráfica de R_0 variando los valores de m_v



La figura 17 muestra el comportamiento de R_0 cuando los valores de m_h varían mientras que el valor de m_v permanece constante. Se puede observar que una mayor competencia entre humanos hará que R_0 tienda a un valor mayor a 1, esto implica que la enfermedad se hará endémica. Esto nos dice que es muy importante que en las poblaciones de humanos implementar políticas públicas que permitan reducir la competencia por los recursos de consumo entre humanos, como por ejemplo mayor acceso a centros de salud y medicamentos para tratar la malaria.

Figura 17

Gráfica de R_0 variando los valores de m_h



La figura 18 muestra la superficie de la función R_0 que depende de los valores de m_v y m_h . Relación inversa con m_v : observando la superficie, hay una relación inversa entre R_0 y m_v . A medida que aumenta la tasa de mortalidad del vector (m_v), el valor de R_0 tiende a disminuir. Esto se visualiza como un descenso en la

superficie a lo largo del eje m_v . Relación directa con m_h (hasta cierto punto): La relación con m_h es más compleja. Inicialmente, a medida que aumenta la competencia en humanos (m_h), R_0 parece aumentar rápidamente. Sin embargo, este aumento se desacelera a medida que m_h continúa incrementándose, y la superficie se aplanan. Esto sugiere que hay un punto en el que un aumento en m_h tiene un impacto menor en la propagación de la enfermedad.

Posible significado biológico:

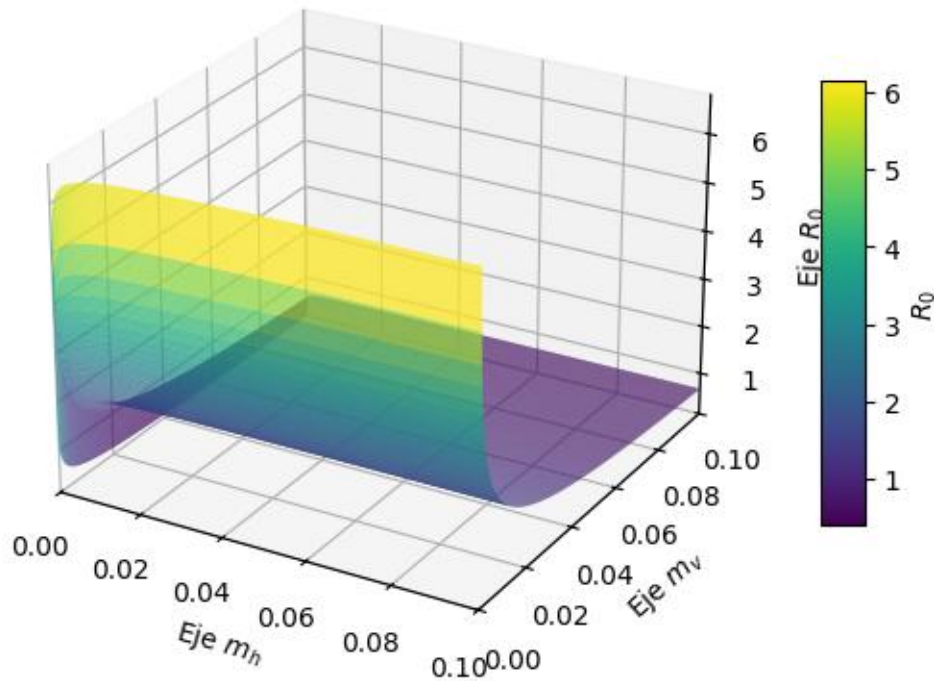
Impacto de la competencia intraespecífica entre los mosquitos (m_v): Una mayor competencia entre los mosquitos incrementa la mortalidad en los mosquitos. Esto reduce el tiempo que un vector puede transmitir la enfermedad a nuevos hospederos (humanos), lo que directamente disminuye la probabilidad de transmisión y, por lo tanto, reduce R_0 . Estrategias que aumenten la competencia entre mosquitos podrían ser efectivas para controlar la propagación de la enfermedad.

Impacto de la competencia intraespecífica entre humanos (m_h): Un aumento inicial en m_h podría reflejar una mayor virulencia que lleva a una transmisión más rápida antes de que el humano infectado deje de ser infeccioso, aumentando R_0 . Pero a niveles muy altos de m_h , la rápida eliminación de humanos infectados de la población puede comenzar a limitar la transmisión, estabilizando o incluso reduciendo el aumento de R_0 .

Interacción de factores: La forma de la superficie resalta que la dinámica de la enfermedad es compleja y depende de la interacción de múltiples factores. El coeficiente de competencia intraespecífica entre humanos y entre mosquitos no actúan de forma aislada; su combinación determina el potencial de la enfermedad para establecerse y propagarse en una población.

Figura 18

Gráfica de R_0 variando los valores de m_h y m_v

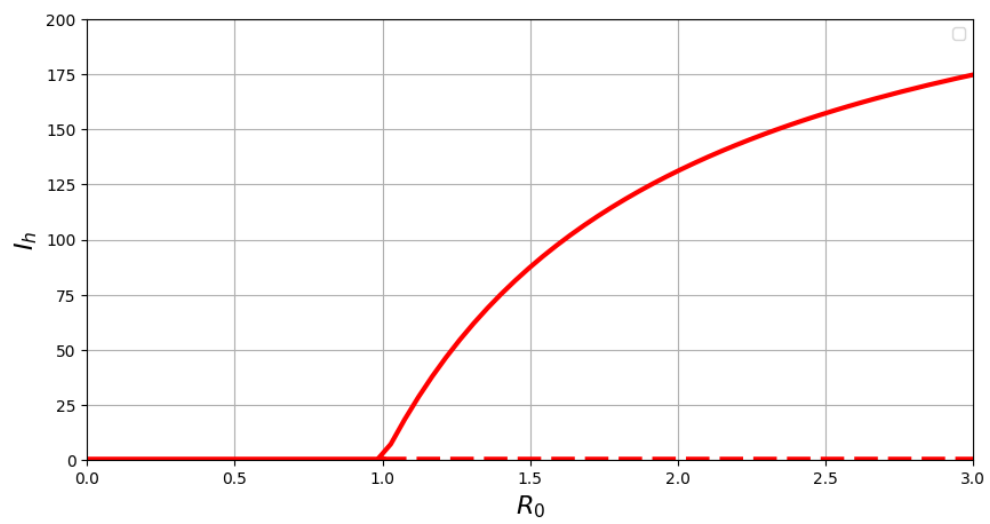


5.4 EVOLUCIÓN DE R_0 Y I_h DEL PUNTO DE EQUILIBRIO VARIANDO β

En la figura 19 se muestra la gráfica de los valores de I_h del punto de equilibrio del sistema (4.1) variando el parámetro β mostrando una bifurcación hacia adelante del punto libre de infección en $R_0 = 1$. Aquí nos muestra que por ejemplo si se aplican políticas públicas que mantengan los parámetros de competencia intraespecífica controlados de manera favorable será suficiente para que la infección tienda al punto de equilibrio libre de infección cuando $R_0 < 1$.

Figura 19

Grafica de R_0 e I_h del punto de equilibrio variando los valores de β



VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En base a la investigación se llegó a las siguientes conclusiones:

- El modelo de control biológico considerando competencia intraespecífica entre humanos y entre mosquitos, presenta puntos de equilibrio biológicamente factibles (libre de infección D y endémico E), cuya existencia y unicidad se determinan por la interacción de los parámetros del sistema y de R_0 dados en los teoremas 4.2.1 y 4.4.1.
- Para garantizar la estabilidad local y global asintótica del punto de equilibrio libre de infección es necesario que el número reproductivo básico $R_0 < 1$. Por otro lado, para garantizar la estabilidad local asintótica del punto de equilibrio endémico es necesario que $R_0 > 1$.
- Las simulaciones numéricas muestran que un incremento en la competencia intraespecífica entre humanos (m_h), para un m_v constante, favorece la persistencia de la malaria; haciendo que la enfermedad tienda a un estado endémico. Por otro lado, el aumento de la competencia intraespecífica entre mosquitos (m_v), para un m_h constante, disminuye eficazmente la población de mosquitos infectado y, consecuentemente, reduce la capacidad de transmisión del parásito, llevando a la eventual extinción de la infección en la población.
- En escenarios donde tanto la competencia intraespecífica en humanos (m_h) como la vectorial (m_v) se incrementan, las simulaciones sugieren una dinámica compleja donde la enfermedad podría experimentar una fase de expansión transitoria en la población, para luego, bajo ciertas condiciones de alta competencia, tender a ser estable (endémica) o a la extinción. Esto resalta la importancia de estrategias de control integradas que gestionen ambos tipos de competencia.

La investigación realizada permite recomendar lo siguiente

- El sistema de salud debe mejorar progresivamente el acceso de las personas infectadas al tratamiento, atención médica, camas en hospitales, etc., esto hará que la malaria no sea endémica.
- Se debe implementar campañas de concientización para que se eliminen lugares que hagan posible la existencia de los vectores y reducir la exposición de humanos

a ser picados por los mosquitos, esto haría que se incremente la competencia entre los vectores; consecuentemente, la malaria tenderá a extinguirse.

- Investigar el modelo investigado considerando que las poblaciones y los parámetros son funciones dependientes del tiempo, periódicas y que el sistema de ecuaciones diferenciales no es autónomo.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y VIRTUALES

- Barreira, L., & Valls, C. (2012a). *Ordinary differential equations: Qualitative theory*. American Mathematical Soc.
- Barreira, L., & Valls, C. (2012b). *Sistemas dinâmicos: uma introdução*. IST Press.
- Basáñez, M., & Rodríguez, D. (2004). *Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores*. Entomotrópica: Revista internacional para el estudio de la entomología tropical, 19(3), 1-22.
<http://hdl.handle.net/1807/5787>
- Benazic, R. (2007). *Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Primera Edicion. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima Perú.: Grupo Editorial FABET.
- Centers for Disease Control and Prevention (2021). *About Malaria*. Recuperado de <https://www.cdc.gov/malaria/about/index.html>.
- Chandra, G., Bhattacharjee, I., Chatterjee, S., & Ghosh, A. (2008). Mosquito control by larvivorous fish. *Indian Journal of Medical Research*, 127(1), 13-27.
https://journals.lww.com/ijmr/abstract/2008/27010/Mosquito_control_by_larvivorous_fish.5.aspx
- Ghosh, M., Lashari, A., & Li, X. (2013) Biological control of malaria: a mathematical model. *Appl Math Comput*, 219, 7923–7939.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.053>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). México D.F.: McGRAW HILL España.
- Hirsch, M., Smith, H., & Zhao, X. (2001). Chain transitivity, attractivity, and strong repellors for semidynamical systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 13, 107-131. <https://doi.org/10.1023/A:1009044515567>

- Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G., & Bernardo, E. (1968). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir.
- Lou, Y., & Zhao, X. (2011). Modelling malaria control by introduction of larvivorous fish. *Bulletin of mathematical biology*, 73(10), 2384-2407.
<https://doi.org/10.1007/s11538-011-9628-6>
- Organización mundial de la salud (2018). *World malaria report 2018*.
<https://apps.who.int/iris/bitstream/handle/10665/275867/9789241565653-eng.pdf>
- Peralta, L., & Magana, M. (2012). *Biología matemática. un enfoque desde los sistemas dinámicos*. Las Prensas de Ciencias.
- Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2), 29-48.
[https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Wang, X., & Zou, X. (2019). Modeling the potential role of engineered symbiotic bacteria in malaria control. *Bulletin of Mathematical Biology*, 81, 2569-2595.
<https://doi.org/10.1007/s11538-019-00619-8>
- Zhao, X. (2003). *Dynamical systems in population biology*. New York: Springer.
- Zhao, X., & Jing, Z. (1996). Global asymptotic behavior in some cooperative systems of functional differential equations. *Canad. Appl. Math. Quart*, 4(4), 421-444.
<https://www.math.mun.ca/~zhao/Selectpapers/ZhaoJingCAMQ96.pdf>

VIII. ANEXOS

- Código Python para determinar R_0 y sus gráficas

(https://colab.research.google.com/drive/1jlemPZfn4_gTCNs8t3Y18R8SQjzUm3gl?usp=sharing):

```
import numpy as np
#from numpy.polynomial import polynomial as p
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import math
import pandas as pd
#import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
#import numpy as np

#Parámetros para  $R_0 < 1$  para punto libre de infección primer punto sin
bifurcación hacia atrás
g=60
d=0.05
d_1=0.02
lambda_v=0.0625
v=0.2
alfa_1=0.2
alfa_2=0.5
q=0.3
e=0.5
r=0.2
gamma=0.1
k=2000
c=0.3
beta=0.2
d_h=0.00003913
```

```

d_v=0.05
rho=0.005
mu=0.00005
b=0.3
May_gamma=0.8
m_v=0.002
m_h=0.004

#parameters R_0>1 para un punto de equilibrio endémico segundo punto
g=60
d=0.05
d_1=0.02
lambda_v=0.0625
v=0.2
alfa_1=0.2
alfa_2=0.5
q=0.3
e=0.5
r=0.2
gamma=0.1
k=2000
c=0.5
beta=0.3 #variar
d_h=0.00003913
d_v=0.05
rho=0.005
mu=0.00005
b=0.5
May_gamma=0.3
m_v=0.000002
m_h=0.000004

##función número básico R_0
def R0(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v

```

```

    ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h):
M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e
a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r
b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r

c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k
*gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r
d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
(M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
pol=[d_1,c_1,b_1,a_1]
R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol)
Nh=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
N_v=R[2]

R_0=math.sqrt((((beta**2)*b*c*N_v)/((d_v+m_v*N_v)*(Nh*rho+Nh*mu+May_g
amma))))
return R_0

M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e
a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r
b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r

c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k
*gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r
d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
(M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
pol=[d_1,c_1,b_1,a_1]
R1=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol)
Nh=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
N_v1=R1[2]
N_v1

M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e
#a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r

```

```

#b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r
c_1=d_1*(d_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r
d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
(M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
pol=[d_1,c_1]
R2=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol)
Nh=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
N_v2=R2[0]
N_v2

R0(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
    ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)

###función número básico R_00
def R00(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
    ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h):
    M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e
    a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r
    b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r

    c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k
    *gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r
    d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
    (M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
    pol=[d_1,c_1,b_1,a_1]
    R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol)
    N_v=R[2]
    R_00=(beta)*(math.sqrt((b*c*N_v*d_h)/(d_v*May_gamma*(d_h+rho+mu))))
    return R_00

R00(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
    ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)

#punto de equilibrio endémico

```

```

def endem(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h):
    M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e
    a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r
    b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r

    c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k
    *gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r
    d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
    (M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
    pol1=[d_1,c_1,b_1,a_1]
    R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol1)
    N_v=R[2]
    A=((d_v*r*(d+lambda_v+(M)*k))/((M)*k*q*e*d_v+r*g*lambda_v))
    B=(q*e-r)*lambda_v/(gamma*alfa_1*v)
    C=d_v*N_v+m_v*(N_v)**2
    L=(d_v*N_v+m_v*(N_v)**2)/lambda_v
    P=k*(r+gamma*alfa_1*v*L-q*e)/r
    a_2=c*beta*(m_h)**2
    b_2=-m_h*mu*(d_v+m_v*N_v)+m_h*c*beta*(d_h+rho+mu)+d_h*c*beta*m_h
    c_2=-
    mu*(d_v+m_v*N_v)*(d_h+rho+mu)+m_h*b*c*(beta)**2*N_v+d_h*c*beta*(d_h
    +rho+mu)-May_gamma*c*beta*m_h
    d_2=d_h*b*c*(beta)**2*N_v+mu*b*c*(beta)**2*N_v-
    May_gamma*c*beta*(d_h+rho+mu)
    e_2=-May_gamma*b*c*(beta)**2*N_v
    pol2=[e_2,d_2,c_2,b_2,a_2]
    S=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol2)
    N_h=S[3]
    N=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
    l_h=(-d_h*N_h-m_h*(N_h)**2+May_gamma)/mu
    #l_v=((d_h+rho+mu+m_h*(N_h))*(-d_h*N_h-
    m_h*((N_h)**2)+May_gamma)*N_h)/(b*beta*(mu*N_h+d_h*N_h+m_h*((N_h)*
    **2)-May_gamma))

```

```

#Punto_endémico=[L,N_v,P,I_v,I_h,N_h]
return I_h

##Número básico R_0 variando beta
btheta=np.arange(0.005,0.9,0.005)
Ro=[]
lh=[]
for i in btheta:
    R=R0(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,i,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)
    IH=endem(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,i,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)
    Ro.append(R)
    lh.append(IH)

pares=zip(Ro,lh)
pares_Rmayor1= [(x, y) if x > 0 and y > 0 else (x,0) for x, y in pares]

x_filtrado = [x for x, y in pares_Rmayor1]
y_filtrado = [y for x, y in pares_Rmayor1]

# Crear la figura
plt.figure(figsize=(10, 5))
# Gráfico filtrado (pares_Rmayor1)
#plt.subplot(1, 2, 2) # 1 fila, 2 columnas, segundo gráfico
plt.plot(x_filtrado, y_filtrado,linewidth=3, color='red')
#plt.plot(x_filtrado,[0]*len(x_filtrado),linewidth=3, color='red')
# Definimos el intervalo para x
x0 = np.linspace(0, 1, 100)
x1 = np.linspace(1,3, 100)

```

```

# La función constante siempre devuelve 0 en este intervalo
y0 = np.zeros_like(x0)
y1=np.zeros_like(x1)

# Creamos la gráfica
plt.plot(x0, y0,linewidth=4, color='red')
plt.plot(x1, y1,linestyle='--',linewidth=4, color='red')
#plt.title('Pares filtrados (Ro vs lh)')
plt.xlabel('$R_0$',size=16)
plt.ylabel('$I_h$',size=16)
plt.xlim([0, 3]) # Set the x range: 0 to 6
plt.ylim([0, 200]) # Set the y range: -1 to 1.2
plt.grid(True)
plt.legend()

# Mostrar todo
#plt.tight_layout()
plt.show()

#El conjunto globalmente atractor
#A=v+alfa_2*(1-v)*q*e
ele=(g*lambda_v)/(d_1*d_v)
pe=(k/r)*((gamma*v*alfa_1*g*lambda_v/(d_1*d_v))+r-q*e)
enev=(g/d_1)*(lambda_v/d_v)**2
eneh=(May_gamma)/d_h
print('L=<%f'%ele,'P=<%f'%pe,'N_v=<%f'%enev,'N_h=<%f'%eneh)

#R0 variando m_h y fijo m_v
mh=np.linspace(0.00000001,0.1,5000)
Ro=[]
for i in mh:
    R=R0(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,i)
# IH=endem(g,d,d_1,lambda_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,i,d_h,d_v

```

```

#      ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)
    Ro.append(R)
# lh.append(IH)

plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot(mh,Ro,color='red',linewidth=3)
plt.xlim([0, 0.01]) # Set the x range: 0 to 6
#plt.ylim([0, 7]) # Set the y range: -1 to 1.2
plt.grid(True)
plt.ylabel(r'$R_0$',size=16)
plt.xlabel(r'$m_h$',size=16)
plt.show()

#R0 variando m_v y fijo m_h
mv=np.arange(0.00000001,0.01,0.000005)
Ro=[]
for i in mv:
    R=R0(g,d,d_1,lambd_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,i,m_h)
# IH=endem(g,d,d_1,lambd_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,i,d_h,d_v
#      ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)
    Ro.append(R)
# lh.append(IH)

plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(mv,Ro,linewidth=3,color='red')
plt.xlim([0, 0.01]) # Set the x range: 0 to 6
plt.ylim([0, 3]) # Set the y range: -1 to 1.2
plt.ylabel(r'$R_0$',size=16)
plt.xlabel(r'$m_v$',size=16)
plt.grid(True)
plt.show()

#R_0 variando m_h y m_v

```

```

mv=np.linspace(0.00000001,0.01,2000)
mh=np.linspace(0.00000001,0.01,2000)
Ro=[]
pares = list(zip(mv,mh))
for i,j in pares:
    R=R0(g,d,d_1,lambd_a_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v
        ,rho,mu,b,May_gamma,i,j)
# IH=endem(g,d,d_1,lambd_a_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,i,d_h,d_v
#         ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h)
    Ro.append(R)

print(len(pares),len(mv),len(mh),len(Ro))

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# --- R_0 variando m_h y m_v ---
mv = np.linspace(1e-7, 0.1, 2000)
mh = np.linspace(1e-7, 0.1, 2000)
m_h, m_v = np.meshgrid(mh, mv)

# --- Cálculo de R0 ---
R = np.array([R0(g, d, d_1, lambd_a_v, v, alfa_1, alfa_2, q, e, r, gamma, k, c,
beta, d_h, d_v,
                rho, mu, b, May_gamma, m_vi, m_hi)
              for m_vi, m_hi in zip(np.ravel(m_v), np.ravel(m_h))])
R = R.reshape(m_h.shape)

# --- Gráfico 3D ---
fig = plt.figure(figsize=(10, 5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

```

```

surf = ax.plot_surface(m_h, m_v, R,
cmap='viridis',edgecolor="none",rstride=5, cstride=5)
fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.6, aspect=10, label="$R_0$")

# Etiquetas
ax.set_xlabel('Eje $m_h$')
ax.set_ylabel('Eje $m_v$')
ax.set_zlabel('Eje $R_0$')

# Límites
ax.set_xlim([0, 0.1])
ax.set_ylim([0, 0.1])
ax.set_zlim([np.min(R), np.max(R)])
ax.view_init(elev=25, azim=-60)

ax.grid(True)
plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.animation as animation
from IPython.display import HTML

# --- R_0 variando m_h y m_v ---
mv = np.linspace(1e-7, 0.1, 200)
mh = np.linspace(1e-7, 0.1, 200)
m_h, m_v = np.meshgrid(mh, mv)

# --- Cálculo de R0 ---
R = np.array([R0(g, d, d_1, lambda_v, v, alfa_1, alfa_2, q, e, r, gamma, k, c,
beta, d_h, d_v,
rho, mu, b, May_gamma, m_vi, m_hi)

```

```

        for m_vi, m_hi in zip(np.ravel(m_v), np.ravel(m_h)))]
R = R.reshape(m_h.shape)

# --- Gráfico 3D ---
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

surf = ax.plot_surface(m_h, m_v, R, cmap='viridis', edgecolor="none",
rstride=5, cstride=5)
fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10, label="$R_0$")

# Etiquetas
ax.set_xlabel('Eje $m_h$')
ax.set_ylabel('Eje $m_v$')
ax.set_zlabel('Eje $R_0$')

# Límites
ax.set_xlim([0, 0.1])
ax.set_ylim([0, 0.1])
ax.set_zlim([np.min(R), np.max(R)])

# --- Animación automática ---
def rotate(angle):
    ax.view_init(elev=25, azim=angle)

ani = animation.FuncAnimation(fig, rotate, frames=360, interval=50)

# Mostrar animación en Colab
HTML(ani.to_jshtml())

```

- Código Python para determinar el punto libre de infección y los planos fase (<https://colab.research.google.com/drive/10xXJHA-B8IIStWrIT6b1dTwcUBk--1Gb?usp=sharing>):

```
import numpy as np
#from numpy.polynomial import polynomial as p
#import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import math
#import pandas as pd

#Parámetros para  $R_0 < 1$  para punto libre de infección primer punto sin
bifurcación hacia atras
g=60
d=0.05
d_1=0.02
lambda_v=0.0625
v=0.2
alfa_1=0.2
alfa_2=0.5
q=0.3
e=0.5
r=0.2
gamma=0.1
k=2000
c=0.3
beta=0.2
d_h=0.00003913
d_v=0.05
rho=0.005
mu=0.00005
b=0.3
May_gamma=0.8
m_v=0.002
m_h=0.004
```

#parameters $R_0 > 1$ para un punto de equilibrio endémico segundo punto

$g=60$

$d=0.05$

$d_1=0.02$

$\lambda_v=0.0625$

$v=0.2$

$\alpha_1=0.2$

$\alpha_2=0.5$

$q=0.3$

$e=0.5$

$r=0.2$

$\gamma=0.1$

$k=2000$

$c=0.5$

$\beta=0.3$ #variar

$d_h=0.00003913$

$d_v=0.05$

$\rho=0.005$

$\mu=0.00005$

$b=0.5$

$\text{May}_{\gamma}=0.3$

$m_v=0.000002$

$m_h=0.000004$

#punto libre de infección

$M=\alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) q e$

$a_1=d_1(m_v)^2+(M)k\gamma\alpha_1 v(m_v)^2/r$

$b_1=2d_1 d_v m_v + 2(M)k\gamma\alpha_1 v d_v m_v/r$

$c_1=d_1(d_v)^2+(d+\lambda_v)\lambda_v m_v + m_v \lambda_v (M)k + (M)k\gamma\alpha_1 v(d_v)^2/r - (M)k\lambda_v q e m_v/r$

$d_1=-g(\lambda_v)^2+(d+\lambda_v)\lambda_v d_v + d_v \lambda_v (M)k - (M)k\lambda_v q e d_v/r$

$\text{pol}=[d_1, c_1, b_1, a_1]$

```

R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol)
N_v=R[2]
A=((d_v*r*(d+lambda_v+(M)*k))/((M)*k*q*e*d_v+r*g*lambda_v))
B=(q*e-r)*lambda_v/(gamma*alfa_1*v)
C=d_v*N_v+m_v*(N_v)**2
# A
# B
# C
L=(d_v*N_v+m_v*(N_v)**2)/lambda_v
P=k*(r+gamma*alfa_1*v*L-q*e)/r
#N_h=May_gamma/d_h
N_h=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
Punto_libre=[L,N_v,P,N_h]
Punto_libre

#L_eq, Nv_eq, P_eq, lv_eq, lh_eq, Nh_eq = equilibrio
Punto_libre = np.array([L, N_v, P, 0, 0, N_h])
Punto_libre = np.round(Punto_libre.real, 2) #Round to 2 decimal places and
take real part

Punto_libre

Punto_endemico=[ 23.24, 29.01, 1429.53, 19.03, 168.76, 265.14]

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.optimize import fsolve

# Parámetros para  $R_0 < 1$  para punto libre de infección primer punto
params = {
    'g': 60, 'd': 0.05, 'd1': 0.02, 'lam': 0.0625, 'alpha1': 0.2, 'alpha2': 0.5, 'v': 0.2,
    'q': 0.3, 'e': 0.5,

```

```

'r': 0.2, 'K': 2000, 'gamma': 0.1,
'b': 0.3, 'c': 0.3, 'beta': 0.2, 'dh': 0.00003913, 'mv': 0.002, 'rh': 0.005, 'mu':
0.00005, 'mh': 0.004,
'Gamma': 0.8, 'dv':0.05
}

```

Definir el sistema como función numérica

```

def system_numeric(X):
    L, Nv, P, Iv, Ih, Nh = X
    g = params['g']
    d = params['d']
    d1 = params['d1']
    lam = params['lam']
    alpha1 = params['alpha1']
    alpha2 = params['alpha2']
    v = params['v']
    q = params['q']
    e = params['e']
    r = params['r']
    K = params['K']
    gamma = params['gamma']
    b = params['b']
    c = params['c']
    beta = params['beta']
    dh = params['dh']
    mv = params['mv']
    rh = params['rh']
    mu = params['mu']
    mh = params['mh']
    Gamma = params['Gamma']
    dv=params['dv']

```

```

    eq1 = g*Nv - d*L - d1*L**2 - lam*L - alpha1*v*L*P - alpha1*alpha2*(1-
v)*L*q*e*P

```

```

eq2 = lam*L - dv*Nv - mv*Nv**2
eq3 = r*P*(1 - P/K) + gamma*alpha1*v*L*P - q*e*P
eq4 = c*beta*(Nv - lv)*lh/Nh - dv*lv - mv*lv*Nv
eq5 = b*beta*(Nh - lh)*lv/Nh - (dh + rh + mu)*lh - mh*lh*Nh
eq6 = Gamma - dh*Nh - mu*lh - mh*Nh**2
return [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6]

# Estimación inicial
X0 = [1, 1, 1, 0.1, 0.1, 100]

# Buscar el equilibrio
#equilibrio = fsolve(system_numeric, X0)

# Imprimir el equilibrio encontrado
#variables = ['L', 'Nv', 'P', 'lv', 'lh', 'Nh']
#print("Punto de equilibrio encontrado numéricamente:")
#for var, val in zip(variables, equilibrio):
#    print(f'{var} = {val:.4f}')

# Extraer variables de equilibrio
L_eq, Nv_eq, P_eq, lv_eq, lh_eq, Nh_eq = Punto_libre
# --- Definir sistemas reducidos ---

# Extraer lv e lh
#lv_eq, lh_eq = equilibrio[3], equilibrio[4]

# Definir el sistema reducido solo para lv e lh
def system_Nv_lv(t, y):
    Nv, lv = y
    #Nv_val = equilibrio[1]
    Nh_val = Nh_eq
    #lh_val= equilibrio[4]
    dh_val = params['dh']
    dv_val = params['dv']
    mv_val = params['mv']

```

```

c_val = params['c']
beta_val = params['beta']
rh_val = params['rh']
mu_val = params['mu']
mh_val = params['mh']
lam_val = params['lam']
L_val = L_eq
lh=lh_eq
dNv = lam_val * L_val - dv_val * Nv - mv_val * Nv**2
dlv = c_val * beta_val * (Nv - lv) * lh / Nh_val - dv_val * lv - mv_val * lv * Nv
return [dNv, dlv]

# (2) Sistema reducido para Nv y Nh
def system_Nh_lh(t, y):
    Nh, lh = y
    lv_val= lv_eq
    #Nh_val = equilibrio[5]
    b_val=params['b']
    dh_val = params['dh']
    dv_val = params['dv']
    #mu_val= params['mu']
    #mh_val = params['mh']
    rh_val = params['rh']
    mv_val = params['mv']
    #lam_val = params['lam']
    Gamma_val = params['Gamma']
    dh_val = params['dh']
    beta_val = params['beta']
    mu_val = params['mu']
    mh_val = params['mh']
    lh_val = lh_eq # usar L de equilibrio

    dNh = Gamma_val - dh_val * Nh - mu_val * lh_val - mh_val * Nh**2
    dlh = b_val*beta_val * (Nh - lh) * lv_val / Nh - (dh_val + rh_val + mu_val) *
    lh - mh_val * lh * Nh

```

```

    return [dNh, dlh]

# (3) Sistema reducido para P y L
def system_P_L(t, y):
    P, L = y
    r_val = params['r']
    K_val = params['K']
    gamma_val = params['gamma']
    alpha1_val = params['alpha1']
    v_val = params['v']
    q_val = params['q']
    e_val = params['e']
    g_val = params['g']
    d_val = params['d']
    d1_val = params['d1']
    lam_val = params['lam']
    alpha2_val = params['alpha2']
    dP = r_val * P * (1 - P/K_val) + gamma_val * alpha1_val * v_val * L * P -
    q_val * e_val * P
    dL = g_val * Nv_eq - d_val * L - d1_val * L**2 - lam_val * L - alpha1_val *
    v_val * L * P - alpha1_val * alpha2_val * (1-v_val) * L * q_val * e_val * P
    return [dP, dL]

```

--- FUNCIONES DE GRAFICADO ---

```

def plot_phase_plane(system, var_labels, equilibrium, ranges, title):
    y1_vals = np.linspace(*ranges[0], 10)
    y2_vals = np.linspace(*ranges[1], 10)
    Y1, Y2 = np.meshgrid(y1_vals, y2_vals)
    dY1, dY2 = np.zeros(Y1.shape), np.zeros(Y1.shape)

    for i in range(Y1.shape[0]):
        for j in range(Y1.shape[1]):
            derivs = system(0, [Y1[i, j], Y2[i, j]])

```

```

dY1[i, j] = derivs[0]
dY2[i, j] = derivs[1]

mag = np.sqrt(dY1**2 + dY2**2)
dY1_norm = dY1 / (mag + 1e-9)
dY2_norm = dY2 / (mag + 1e-9)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
ax.quiver(Y1, Y2, dY1_norm, dY2_norm,color='gray', alpha=0.9,
linewidth=2) #cmap='plasma'
    # Líneas de flujo
ax.streamplot(Y1, Y2, dY1, dY2, color='blue', linewidth=1, density=2)
#cmap='plasma',
ax.scatter(equilibrium[0], equilibrium[1], color='red', s=80, label=f"Equilibrio
({equilibrium[0]:.2f}, {equilibrium[1]:.2f})")
ax.text(equilibrium[0], equilibrium[1], f"({equilibrium[0]:.2f},
{equilibrium[1]:.2f})", ha='right', fontsize=9, va='top',
color='black',fontweight='bold')
ax.set_xlabel(var_labels[0])
ax.set_ylabel(var_labels[1])
ax.set_title(title)
ax.grid(True)
ax.legend()
#plt.colorbar(ax.quiver(Y1, Y2, dY1_norm, dY2_norm, mag,
cmap='plasma'), label='Magnitud del vector')
plt.show()

# Plano fase Nh vs lh
plot_phase_plane(system_Nh_lh , ['$N_h$', '$I_h$'], (Nh_eq, lh_eq), [(1, 800),
(0, 200)], 'Plano fase $N_h$ vs $I_h$')

# Plano fase Nv vs lv
plot_phase_plane(system_Nv_lv, ['$N_v$', '$I_v$'], (Nv_eq, lv_eq), [(0, 400),
(0, 100)], 'Plano fase $N_v$ vs $I_v$')

```

```
# Plano fase P vs L
```

```
plot_phase_plane(system_P_L, ['$P$', '$L$'], (P_eq, L_eq), [(0, 1400), (0, 100)], 'Plano fase $P$ vs $L$')
```

- Código Python para determinar el punto de equilibrio endémico y los planos fase

(https://colab.research.google.com/drive/1WPxj4dRYt7Oyl8_m9G45_BeASlccwFnb?usp=sharing):

```
import numpy as np
```

```
from numpy.polynomial import polynomial as p
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from scipy.integrate import odeint
```

```
import math
```

```
import pandas as pd
```

```
#Parámetros para  $R_0 < 1$  para punto libre de infección primer punto sin  
bifurcación hacia atras
```

```
g=60
```

```
d=0.05
```

```
d_1=0.02
```

```
lambda_v=0.0625
```

```
v=0.2
```

```
alfa_1=0.2
```

```
alfa_2=0.5
```

```
q=0.3
```

```
e=0.5
```

```
r=0.2
```

```
gamma=0.1
```

```
k=2000
```

```
c=0.3
```

```
beta=0.2
```

```
d_h=0.00003913
```

```
d_v=0.05
```

```
rho=0.005
```

mu=0.00005

b=0.3

May_gamma=0.8

m_v=0.002

m_h=0.004

#parameters $R_0 > 1$ para un punto de equilibrio endémico segundo punto

g=60

d=0.05

d_1=0.02

lambda_v=0.0625

v=0.2

alfa_1=0.2

alfa_2=0.5

q=0.3

e=0.5

r=0.2

gamma=0.1

k=2000

c=0.5

beta=0.3 #variar

d_h=0.00003913

d_v=0.05

rho=0.005

mu=0.00005

b=0.5

May_gamma=0.3

m_v=0.000002

m_h=0.000004

#punto de equilibrio endémico

$M = \alpha_1 v + \alpha_1 \alpha_2 (1-v) q e$

$a_1 = d_1 (m_v)^2 + (M) k \gamma \alpha_1 v (m_v)^2 / r$

$b_1 = 2 d_1 d_v m_v + 2 (M) k \gamma \alpha_1 v d_v m_v / r$

```

c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k
*gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r
d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-
(M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r
pol1=[d_1,c_1,b_1,a_1]
R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol1)
N_v=R[2]
A=((d_v*r*(d+lambda_v+(M)*k))/((M)*k*q*e*d_v+r*g*lambda_v))
B=(q*e-r)*lambda_v/(gamma*alfa_1*v)
C=d_v*N_v+m_v*(N_v)**2
L=(d_v*N_v+m_v*(N_v)**2)/lambda_v
P=k*(r+gamma*alfa_1*v*L-q*e)/r
a_2=c*beta*(m_h)**2
b_2=-m_h*mu*(d_v+m_v*N_v)+m_h*c*beta*(d_h+rho+mu)+d_h*c*beta*m_h
c_2=-
mu*(d_v+m_v*N_v)*(d_h+rho+mu)+m_h*b*c*(beta)**2*N_v+d_h*c*beta*(d_h
+rho+mu)-May_gamma*c*beta*m_h
d_2=d_h*b*c*(beta)**2*N_v+mu*b*c*(beta)**2*N_v-
May_gamma*c*beta*(d_h+rho+mu)
e_2=-May_gamma*b*c*(beta)**2*N_v
coef=[a_2,b_2,c_2,d_2,e_2]
pol2=[e_2,d_2,c_2,b_2,a_2]
S=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol2)
N_h=S[3]
N=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)
l_h=(-d_h*N_h-m_h*(N_h)**2+May_gamma)/mu
l_v=((d_h+rho+mu+m_h*(N_h))*(-d_h*N_h-
m_h*(N_h)**2)+May_gamma*N_h)/(b*beta*(mu*N_h+d_h*N_h+m_h*((N_h)*
*2)-May_gamma))
Punto_endémico=[L,N_v,P,l_v,l_h,N_h]
Punto_endémico

#L_eq, Nv_eq, P_eq, lv_eq, lh_eq, Nh_eq = equilibrio
Punto_endemico = np.array([L, N_v, P, l_v, l_h, N_h])

```

```
Punto_endemico = np.round(Punto_endemico.real, 2) #Round to 2 decimal
places and take real part
```

```
Punto_endemico
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from scipy.integrate import solve_ivp
```

```
from scipy.optimize import fsolve
```

```
# parameters  $R_0 > 1$  para un punto de equilibrio endémico segundo punto
```

```
params = {
```

```
    'g': 60, 'd': 0.05, 'd1': 0.02, 'lam': 0.0625, 'alpha1': 0.2, 'alpha2': 0.5, 'v': 0.2,
    'q': 0.3, 'e': 0.5,
```

```
    'r': 0.2, 'K': 2000, 'gamma': 0.1,
```

```
    'b': 0.5, 'c': 0.5, 'beta': 0.3, 'dh': 0.00003913, 'mv': 0.000002, 'rh': 0.005, 'mu':
    0.00005, 'mh': 0.000004,
```

```
    'Gamma': 0.3, 'dv': 0.05
```

```
}
```

```
# Definir el sistema como función numérica
```

```
def system_numeric(X):
```

```
    L, Nv, P, Iv, Ih, Nh = X
```

```
    g = params['g']
```

```
    d = params['d']
```

```
    d1 = params['d1']
```

```
    lam = params['lam']
```

```
    alpha1 = params['alpha1']
```

```
    alpha2 = params['alpha2']
```

```
    v = params['v']
```

```
    q = params['q']
```

```
    e = params['e']
```

```
    r = params['r']
```

```
    K = params['K']
```

```

gamma = params['gamma']
b = params['b']
c = params['c']
beta = params['beta']
dh = params['dh']
mv = params['mv']
rh = params['rh']
mu = params['mu']
mh = params['mh']
Gamma = params['Gamma']
dv=params['dv']

eq1 = g*Nv - d*L - d1*L**2 - lam*L - alpha1*v*L*P - alpha1*alpha2*(1-
v)*L*q*e*P
eq2 = lam*L - dv*Nv - mv*Nv**2
eq3 = r*P*(1 - P/K) + gamma*alpha1*v*L*P - q*e*P
eq4 = c*beta*(Nv - Iv)*Ih/Nh - dv*Iv - mv*Iv*Nv
eq5 = b*beta*(Nh - Ih)*Iv/Nh - (dh + rh + mu)*Ih - mh*Ih*Nh
eq6 = Gamma - dh*Nh - mu*Ih - mh*Nh**2
return [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6]

# Estimación inicial
#X0 = [1, 1, 1, 0.1, 0.1, 100]

# Buscar el equilibrio
#equilibrio = fsolve(system_numeric, X0)

# Imprimir el equilibrio encontrado
#variables = ['L', 'Nv', 'P', 'Iv', 'Ih', 'Nh']
#print("Punto de equilibrio encontrado numéricamente:")
#for var, val in zip(variables, equilibrio):
#    print(f"{var} = {val:.4f}")

# Extraer variables de equilibrio
L_eq, Nv_eq, P_eq, Iv_eq, Ih_eq, Nh_eq = Punto_endemico

```

```

# --- Definir sistemas reducidos ---

# Extraer lv e lh
#lv_eq, lh_eq = equilibrio[3], equilibrio[4]

# Definir el sistema reducido solo para lv e lh
def system_Nv_lv(t, y):
    Nv, lv = y
    #Nv_val = equilibrio[1]
    Nh_val = Nh_eq
    #lh_val= equilibrio[4]
    dh_val = params['dh']
    dv_val = params['dv']
    mv_val = params['mv']
    c_val = params['c']
    beta_val = params['beta']
    rh_val = params['rh']
    mu_val = params['mu']
    mh_val = params['mh']
    lam_val = params['lam']
    L_val = L_eq
    lh=lh_eq
    dNv = lam_val * L_val - dv_val * Nv - mv_val * Nv**2
    dlv = c_val * beta_val * (Nv - lv) * lh / Nh_val - dv_val * lv - mv_val * lv * Nv
    return [dNv, dlv]

# (2) Sistema reducido para Nv y Nh
def system_Nh_lh(t, y):
    Nh, lh = y
    lv_val= lv_eq
    #Nh_val = equilibrio[5]
    b_val=params['b']
    dh_val = params['dh']
    dv_val = params['dv']
    #mu_val= params['mu']

```

```

#mh_val = params['mh']
rh_val = params['rh']
mv_val = params['mv']
#lam_val = params['lam']
Gamma_val = params['Gamma']
dh_val = params['dh']
beta_val = params['beta']
mu_val = params['mu']
mh_val = params['mh']
lh_val = lh_eq # usar L de equilibrio

dNh = Gamma_val - dh_val * Nh - mu_val * lh_val - mh_val * Nh**2
dlh = b_val*beta_val * (Nh - lh) * lv_val / Nh - (dh_val + rh_val + mu_val) *
lh - mh_val * lh * Nh
return [dNh, dlh]

```

(3) Sistema reducido para P y L

```
def system_P_L(t, y):
```

```

    P, L = y
    r_val = params['r']
    K_val = params['K']
    gamma_val = params['gamma']
    alpha1_val = params['alpha1']
    v_val = params['v']
    q_val = params['q']
    e_val = params['e']
    g_val = params['g']
    d_val = params['d']
    d1_val = params['d1']
    lam_val = params['lam']
    alpha2_val = params['alpha2']
    dP = r_val * P * (1 - P/K_val) + gamma_val * alpha1_val * v_val * L * P -
q_val * e_val * P

```

```

    dL = g_val * Nv_eq - d_val * L - d1_val * L**2 - lam_val * L - alpha1_val *
v_val * L * P - alpha1_val * alpha2_val * (1-v_val) * L * q_val * e_val * P
    return [dP, dL]

```

--- FUNCIONES DE GRAFICADO ---

```

def plot_phase_plane(system, var_labels, equilibrium, ranges, title):
    y1_vals = np.linspace(*ranges[0], 10)
    y2_vals = np.linspace(*ranges[1], 10)
    Y1, Y2 = np.meshgrid(y1_vals, y2_vals)
    dY1, dY2 = np.zeros(Y1.shape), np.zeros(Y1.shape)

    for i in range(Y1.shape[0]):
        for j in range(Y1.shape[1]):
            derivs = system(0, [Y1[i, j], Y2[i, j]])
            dY1[i, j] = derivs[0]
            dY2[i, j] = derivs[1]

    mag = np.sqrt(dY1**2 + dY2**2)
    dY1_norm = dY1 / (mag + 1e-9)
    dY2_norm = dY2 / (mag + 1e-9)

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
    ax.quiver(Y1, Y2, dY1_norm, dY2_norm,color='gray', alpha=0.9,
linewidth=2) #cmap='plasma'
    # Líneas de flujo
    ax.streamplot(Y1, Y2, dY1, dY2, color='blue', linewidth=1, density=2)
    #cmap='plasma',
    ax.scatter(equilibrium[0], equilibrium[1], color='red', s=80, label=f"Equilibrio
({equilibrium[0]:.2f}, {equilibrium[1]:.2f})")
    ax.text(equilibrium[0], equilibrium[1], f"({equilibrium[0]:.2f},
{equilibrium[1]:.2f})", ha='right', fontsize=9, va='top',
color='black',fontweight='bold')
    ax.set_xlabel(var_labels[0])

```

```

ax.set_ylabel(var_labels[1])
ax.set_title(title)
ax.grid(True)
ax.legend()
#plt.colorbar(ax.quiver(Y1, Y2, dY1_norm, dY2_norm, mag,
cmap='plasma'), label='Magnitud del vector')
plt.show()

```

Plano fase Nh vs lh

```

plot_phase_plane(system_Nh_lh, ['$N_h$', '$I_h$'], (Nh_eq, lh_eq), [(1, 800),
(0, 500)], 'Plano fase $N_h$ vs $I_h$')

```

Plano fase Nv vs lv

```

plot_phase_plane(system_Nv_lv, ['$N_v$', '$I_v$'], (Nv_eq, lv_eq), [(0, 400),
(0, 100)], 'Plano fase $N_v$ vs $I_v$')

```

Plano fase P vs L

```

plot_phase_plane(system_P_L, ['$P$', '$L$'], (P_eq, L_eq), [(0, 1800), (0,
100)], 'Plano fase $P$ vs $L$')

```

- Código Python para la solución numérica del modelo y sus gráficas (https://colab.research.google.com/drive/1nyHuglWK_qLp5mJkqExizW-LVOzt6D8N?usp=sharing):

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import math
import pandas as pd
from matplotlib.colors import to_rgba

```

!pip install PyDSTool==0.90.3 # downgrade PyDSTool to v0.90.3 to ensure compatibility.

```

def model(y,t,g,d,d_1,lambd_v,v,alfa_1,alfa_2,q,e,r,gamma,k,c,beta,d_h,d_v

```

```

    ,rho,mu,b,May_gamma,m_v,m_h):
    L,P,Iv,Nv,Ih,Nh=y
    dL =g*Nv-d*L-d_1*L**2-lambda_v*L-alfa_1*v*L*P-alfa_1*alfa_2*(1-
v)*q*e*L*P
    dP=r*P*(1-P/k)+gamma*alfa_1*v*L*P-q*e*P
    dIv=c*beta*(Nv-Iv)*Ih/Nh-d_v*Iv-m_v*Iv*Nv
    dNv=lambda_v*L-d_v*Nv-m_v*(Nv)**2
    dIh=b*beta*(Nh-Ih)*Iv/Nh-(d_h+rho+mu)*Ih-m_h*Ih*Nh
    dNh=May_gamma-d_h*Nh-mu*Ih-m_h*(Nh)**2
    return dL,dP, dIv, dNv, dIh, dNh

```

#initial condition endemico

L0=200

P0=100

Iv0=100

Nv0=500

Ih0=1000

Nh0=12000

y0= L0,P0,Iv0,Nv0,Ih0,Nh0

t=np.arange(0,5000,0.05)

#Parámetros para $R_0 < 1$ para punto libre de infección primer punto sin
bifurcación hacia atras

g=60

d=0.05

d_1=0.02

lambda_v=0.0625

v=0.2

alfa_1=0.2

alfa_2=0.5

q=0.3

e=0.5

r=0.2

gamma=0.1

k=2000
c=0.3
beta=0.2
d_h=0.00003913
d_v=0.05
rho=0.005
mu=0.00005
b=0.3
May_gamma=0.8
m_v=0.002
m_h=0.004

#parameters $R_0 > 1$ para un punto de equilibrio endémico segundo punto

g=60
d=0.05
d_1=0.02
lambda_v=0.0625
v=0.2
alfa_1=0.2
alfa_2=0.5
q=0.3
e=0.5
r=0.2
gamma=0.1
k=2000
c=0.5
beta=0.3 #variar
d_h=0.00003913
d_v=0.05
rho=0.005
mu=0.00005
b=0.5
May_gamma=0.3
m_v=0.000002

m_h=0.000004

#punto de equilibrio endémico

M=alfa_1*v+alfa_1*alfa_2*(1-v)*q*e

a_1=d_1*(m_v)**2+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(m_v)**2/r

b_1=2*d_1*d_v*m_v+2*(M)*k*gamma*alfa_1*v*d_v*m_v/r

c_1=d_1*(d_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*m_v+m_v*lambda_v*(M)*k+(M)*k*gamma*alfa_1*v*(d_v)**2/r-(M)*k*lambda_v*q*e*m_v/r

d_1=-g*(lambda_v)**2+(d+lambda_v)*lambda_v*d_v+d_v*lambda_v*(M)*k-(M)*k*lambda_v*q*e*d_v/r

pol1=[d_1,c_1,b_1,a_1]

R=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol1)

N_v=R[2]

A=((d_v*r*(d+lambda_v+(M)*k))/((M)*k*q*e*d_v+r*g*lambda_v))

B=(q*e-r)*lambda_v/(gamma*alfa_1*v)

C=d_v*N_v+m_v*(N_v)**2

L=(d_v*N_v+m_v*(N_v)**2)/lambda_v

P=k*(r+gamma*alfa_1*v*L-q*e)/r

a_2=c*beta*(m_h)**2

b_2=-m_h*mu*(d_v+m_v*N_v)+m_h*c*beta*(d_h+rho+mu)+d_h*c*beta*m_h

c_2=-

mu*(d_v+m_v*N_v)*(d_h+rho+mu)+m_h*b*c*(beta)**2*N_v+d_h*c*beta*(d_h+rho+mu)-May_gamma*c*beta*m_h

d_2=d_h*b*c*(beta)**2*N_v+mu*b*c*(beta)**2*N_v-

May_gamma*c*beta*(d_h+rho+mu)

e_2=-May_gamma*b*c*(beta)**2*N_v

pol2=[e_2,d_2,c_2,b_2,a_2]

S=np.polynomial.polynomial.polyroots(pol2)

N_h=S[3]

N=(-d_h+math.sqrt((d_h)**2+4*m_h*May_gamma))/(2*m_h)

I_h=(-d_h*N_h-m_h*(N_h)**2+May_gamma)/mu

I_v=((d_h+rho+mu+m_h*(N_h))*(-d_h*N_h-

m_h*(N_h)**2+May_gamma)*N_h)/(b*beta*(mu*N_h+d_h*N_h+m_h*(N_h)**2-May_gamma))

```
Punto_endémico=[L,P,I_v,N_v,I_h,N_h]
```

```
Punto_endémico
```

```
# CÓDIGO USANDO SOLVE_IVP
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from scipy.integrate import solve_ivp
```

```
from dataclasses import dataclass
```

```
# =====
```

```
# 1. Parámetros como dataclass para el punto libre de infección  $R_0 < 1$ 
```

```
# =====
```

```
@dataclass
```

```
class Parametros:
```

```
    g: float = 60
```

```
    d: float = 0.05
```

```
    d_1: float = 0.02
```

```
    lambda_v: float = 0.0625
```

```
    v: float = 0.2
```

```
    alfa_1: float = 0.2
```

```
    alfa_2: float = 0.5
```

```
    q: float = 0.3
```

```
    e: float = 0.5
```

```
    r: float = 0.2
```

```
    gamma: float = 0.1
```

```
    k: float = 2000
```

```
    c: float = 0.3
```

```
    beta: float = 0.2
```

```
    d_h: float = 0.00003913
```

```
    d_v: float = 0.05
```

```
    rho: float = 0.005
```

```
    mu: float = 0.00005
```

```

b: float = 0.3
May_gamma: float = 0.8
m_v: float = 0.002
m_h: float = 0.004

# =====
# 1. Parámetros como dataclass para el punto de equilibrio endémico  $R_0 > 1$ 
# =====
@dataclass
class Parametros:
    g: float = 60
    d: float = 0.05
    d_1: float = 0.02
    lambda_v: float = 0.0625
    v: float = 0.2
    alfa_1: float = 0.2
    alfa_2: float = 0.5
    q: float = 0.3
    e: float = 0.5
    r: float = 0.2
    gamma: float = 0.1
    k: float = 2000
    c: float = 0.5
    beta: float = 0.3
    d_h: float = 0.00003913
    d_v: float = 0.05
    rho: float = 0.005
    mu: float = 0.00005
    b: float = 0.5
    May_gamma: float = 0.3
    m_v: float = 0.000002
    m_h: float = 0.000004

# =====

```

```

# 2. Modelo para solve_ivp
# =====
def model_ivp(t, y, p: Parametros):
    L, P, Iv, Nv, Ih, Nh = y
    dL = p.g * Nv - p.d * L - p.d_1 * L**2 - p.lambda_v * L - p.alfa_1 * p.v * L * P
    - p.alfa_1 * p.alfa_2 * (1 - p.v) * p.q * p.e * L * P
    dP = p.r * P * (1 - P / p.k) + p.gamma * p.alfa_1 * p.v * L * P - p.q * p.e * P
    dIv = p.c * p.beta * (Nv - Iv) * Ih / Nh - p.d_v * Iv - p.m_v * Iv * Nv
    dNv = p.lambda_v * L - p.d_v * Nv - p.m_v * Nv**2
    dIh = p.b * p.beta * (Nh - Ih) * Iv / Nh - (p.d_h + p.rho + p.mu) * Ih - p.m_h *
    Ih * Nh
    dNh = p.May_gamma - p.d_h * Nh - p.mu * Ih - p.m_h * Nh**2
    return [dL, dP, dIv, dNv, dIh, dNh]

# =====
# 3. Condiciones iniciales y tiempo
# =====
y0 = [200, 100, 100, 500, 1000, 12000]
t_span = (0, 5000)
t_eval = np.arange(0, 5000, 0.05)

# =====
# 4. Resolver el sistema
# =====
parametros = Parametros()
sol = solve_ivp(model_ivp, t_span, y0, args=(parametros,), t_eval=t_eval,
method='RK45', rtol=1e-6)

# Desempaquetar resultados
L, P, Iv, Nv, Ih, Nh = sol.y
t = sol.t

```

```
## Gráfica de las poblaciones en el tiempo
```

```
# =====
```

```
# 5. Graficar
```

```
# =====
```

```
def graficar_poblaciones(t, L, P, Iv, Nv, Ih, Nh):  
    plt.figure(figsize=(14, 7))  
    plt.plot(t, L, label='Larvas', linestyle='--')  
    plt.plot(t, P, label='Peces')  
    plt.plot(t, Iv, label='Mosquitos infectados', linestyle='-.')  
    plt.plot(t, Ih, label='Humanos infectados')  
  
    plt.xlim(0, 50)  
    plt.ylim(0, 5000)  
    plt.xlabel('Tiempo (días)', fontsize=14)  
    plt.ylabel('Población', fontsize=14)  
    plt.title('Evolución de poblaciones', fontsize=16)  
    plt.legend()  
    plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)  
    plt.tight_layout()  
    plt.show()
```

```
graficar_poblaciones(t, L, P, Iv, Nv, Ih, Nh)
```

```
## Gráfica variando los parámetros m_v y m_h
```

```
### Variando m_v
```

```
# =====
```

```
# 3. Condiciones iniciales y tiempo
```

```
# =====
```

```
y0 = [200, 100, 100, 500, 1000, 12000]
```

```

t_eval = np.linspace(0, 200, 1000) # tiempo más corto para claridad visual
t_span = (t_eval[0], t_eval[-1])

# =====
# 4. Barrido sobre m_v
# =====
mv_values = np.logspace(-6, -1, 6) # 6 valores entre 1e-6 y 0.1

# Almacenar resultados
ih_results = []
iv_results = []

for mv in mv_values:
    p = Parametros(m_v=mv)
    sol = solve_ivp(model_ivp, t_span, y0, args=(p,), t_eval=t_eval,
method='RK45', rtol=1e-6)
    lh = sol.y[4]
    lv = sol.y[2]
    ih_results.append(lh)
    iv_results.append(lv)

# =====
# 5. Graficar lh e lv
# =====
colors = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, len(mv_values)))

# ---- Humanos infectados ----
plt.figure(figsize=(12, 5))
for lh, mv, color in zip(ih_results, mv_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lh, label=f"$m_v$ = {mv:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de humanos infectados ($I_h$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_h$")
plt.legend(title="Valores de $m_v$")

```

```

plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ---- Mosquitos infectados ----
plt.figure(figsize=(12, 5))
for lv, mv, color in zip(iv_results, mv_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lv, label=f"$m_v$ = {mv:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de mosquitos infectados ($I_v$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_v$")
plt.legend(title="Valores de $m_v$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

#### Variando m_h

# -----
# Parámetros base
# -----
base_params = {
    'g': 60, 'd': 0.05, 'd_1': 0.02, 'lambda_v': 0.0625,
    'v': 0.2, 'alfa_1': 0.2, 'alfa_2': 0.5, 'q': 0.3, 'e': 0.5,
    'r': 0.2, 'gamma': 0.1, 'k': 2000, 'c': 0.3, 'beta': 0.2,
    'd_h': 0.00003913, 'd_v': 0.05, 'rho': 0.005, 'mu': 0.00005,
    'b': 0.3, 'May_gamma': 0.8, 'm_v': 0.002, 'm_h': 0.004 # m_h se variará
}

# -----

# -----
# Modelo de evolución
# -----

```

```

def model(t, y, p):
    L, P, Iv, Nv, Ih, Nh = y
    dL = p['g']*Nv - p['d']*L - p['d_1']*L**2 - p['lambda_v']*L - p['alfa_1']*p['v']*L*P
    - p['alfa_1']*p['alfa_2']*(1 - p['v'])*p['q']*p['e']*L*P
    dP = p['r']*P*(1 - P/p['k']) + p['gamma']*p['alfa_1']*p['v']*L*P - p['q']*p['e']*P
    dIv = p['c']*p['beta']*(Nv - Iv)*Ih/Nh - p['d_v']*Iv - p['m_v']*Iv*Nv
    dNv = p['lambda_v']*L - p['d_v']*Nv - p['m_v']*Nv**2
    dIh = p['b']*p['beta']*(Nh - Ih)*Iv/Nh - (p['d_h'] + p['rho'] + p['mu'])*Ih -
    p['m_h']*Ih*Nh
    dNh = p['May_gamma'] - p['d_h']*Nh - p['mu']*Ih - p['m_h']*Nh**2
    return [dL, dP, dIv, dNv, dIh, dNh]

# =====
# 3. Condiciones iniciales y tiempo
# =====
y0 = [200, 100, 100, 500, 1000, 12000]
t_eval = np.linspace(0, 200, 1000) # tiempo más corto para claridad visual
t_span = (t_eval[0], t_eval[-1])

# =====
# 4. Barrido sobre m_h
# =====
mh_values = np.logspace(-6, -1, 6) # 6 valores entre 1e-6 y 0.1

# Almacenar resultados
ih_results = []
iv_results = []

for mh in mh_values:
    p = Parametros(m_h=mh)
    sol = solve_ivp(model_ivp, t_span, y0, args=(p,), t_eval=t_eval,
    method='RK45', rtol=1e-6)
    Ih = sol.y[4]
    Iv = sol.y[2]

```

```

    ih_results.append(lh)
    iv_results.append(iv)

# =====
# 5. Graficar lh e lv
# =====

colors = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, len(mh_values)))

# ---- Humanos infectados ----
plt.figure(figsize=(12, 5))
for lh, mh, color in zip(ih_results, mh_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lh, label=f"$m_h$ = {mh:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de humanos infectados ($I_h$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_h$")
plt.legend(title="Valores de $m_h$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ---- Mosquitos infectados ----
plt.figure(figsize=(12, 5))
for lv, mh, color in zip(iv_results, mh_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lv, label=f"$m_h$ = {mh:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de mosquitos infectados ($I_v$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_v$")
plt.legend(title="Valores de $m_h$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

### Variando m_h y m_v

```

```

# =====
# 3. Condiciones iniciales y tiempo
# =====
y0 = [200, 100, 100, 500, 1000, 12000]
t_eval = np.linspace(0, 200, 1000) # tiempo más corto para claridad visual
t_span = (t_eval[0], t_eval[-1])

# =====
# 4. Barrido sobre m_h y m_v
# =====
mh_values = np.logspace(-6, -1, 6) # 6 valores entre 1e-6 y 0.1
mv_values = np.logspace(-6, -1, 6)

# Almacenar resultados
ih_results = []
iv_results = []

for mh,mv in zip(mh_values,mv_values):
    p = Parametros(m_h=mh,m_v=mv)
    sol = solve_ivp(model_ivp, t_span, y0, args=(p,), t_eval=t_eval,
method='RK45', rtol=1e-6)
    lh = sol.y[4]
    lv = sol.y[2]
    ih_results.append(lh)
    iv_results.append(lv)

# =====
# 5. Graficar lh e lv
# =====
colors = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, len(list(zip(mh_values,mv_values)))))

# ---- Humanos infectados ----

```

```

plt.figure(figsize=(12, 5))
for lh, mh, mv, color in zip(ih_results, mh_values, mv_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lh, label=f"$m_h$ = {mh:.1e}, $m_v$={mv:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de humanos infectados ($I_h$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_h$")
plt.legend(title="Valores de $m_h$ y $m_v$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

```

---- Mosquitos infectados ----

```

plt.figure(figsize=(12, 5))
for lv, mh, mv, color in zip(iv_results, mh_values, mv_values, colors):
    plt.plot(t_eval, lv, label=f"$m_h$ = {mh:.1e}, $m_v$={mv:.1e}", color=color)
plt.title("Evolución de mosquitos infectados ($I_v$)")
plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Población $I_v$")
plt.legend(title="Valores de $m_h$ y $m_v$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

```