

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Uso de elementos finitos para resolver un problema
unidimensional de tipo elíptico**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática**

Autor:

Ms. C. Reyes Narváez, Ronald Juven
Código Orcid: 0000-0002-7074-4262
DNI N° 17951991

Asesor:

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de Investigación
Matemática aplicada a las ciencias, ingeniería y
humanidades, en general

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025



CERTIFICACIÓN DEL ASESOR

Yo, **Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades**, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la tesis titulada: **Uso de elementos finitos para resolver un problema unidimensional de tipo elíptico**, elaborado por el: **Ms.C. Reyes Narváez, Ronald Juven**, para obtener el grado de **Doctor en Matemática**, en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, junio del 2025

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades

Asesor

DNI. N° 18162818

Código ORCID: 0000-0003-4939-7734



AVAL DE CONFORMIDAD DEL JURADO

Tesis titulada: Uso de elementos finitos para resolver un problema unidimensional de tipo elíptico, elaborado por el: Ms.C. Reyes Narváez, Ronald Juven.

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:


Dr. Cedrón León, Ernesto Antonio
Presidente
DNI: 32966495
Código ORCID: 0000-0002-3198-831X


Dr. Vera Obeso, Fidel Alejandro
Secretario
DNI: 32857547
Código ORCID 0000-0002-9125-0464


Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
Vocal/Asesor
DNI. N° 18162818
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los veinticinco días del mes de junio del año 2025, siendo las 12 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 429-2025-EPG-UNS de fecha 05.04.2025, conformado por los docentes: Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Presidente), Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada: **"USO DE ELEMENTOS FINITOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE TIPO ELÍPTICO"**; presentado por el tesista **Ronald Juven Reyes Narváez**, egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 550-2025-EPG-UNS de fecha 09 de junio de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADA, asignándole la calificación de Dieciocho (18).

Siendo las 13 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Presidente


Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso
Secretario


Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
Vocal/Asesor

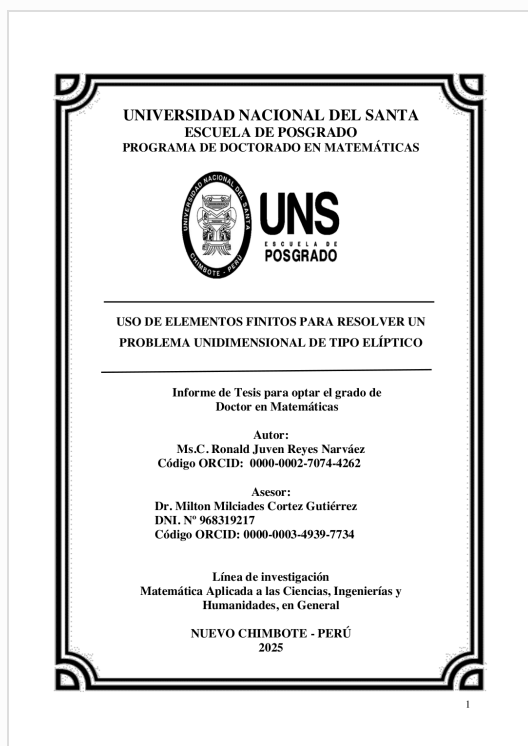


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Ronald REYES NARVAEZ
Título del ejercicio: EJERCICIO
Título de la entrega: Tesis Ronald 2025 OKKK para Turnitin.doc
Nombre del archivo: Tesis_Ronald_2025_OKKK_para_Turnitin.doc
Tamaño del archivo: 1.51M
Total páginas: 42
Total de palabras: 4,596
Total de caracteres: 26,320
Fecha de entrega: 28-mar-2025 09:27a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2627929564



Tesis Ronald 2025 OKKK para Turnitin.doc

INFORME DE ORIGINALIDAD

13%

INDICE DE SIMILITUD

12%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

4%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

repositorio.uns.edu.pe

Fuente de Internet

4%

2

eprints.uanl.mx

Fuente de Internet

2%

3

docplayer.es

Fuente de Internet

1%

4

archive.org

Fuente de Internet

1%

5

qdoc.tips

Fuente de Internet

1%

6

www.monografias.com

Fuente de Internet

1%

7

Submitted to Universidad Nacional de Trujillo

Trabajo del estudiante

1%

8

www.latp.univ-mrs.fr

Fuente de Internet

<1%

9

dspace.esPOCH.edu.ec

Fuente de Internet

<1%

10

worldwidescience.org

Fuente de Internet

<1%

11

Submitted to Escuela Politecnica Nacional

Trabajo del estudiante

<1%

12

Submitted to Universidad Nacional del Santa

Trabajo del estudiante

DEDICATORIA:

A mis padres LUIS ISMAEL y ROSA ESTELA
Todo mi amor y gratitud por su apoyo y comprensión

A mis queridos hijos Emmy Giselle y Ronald Anderson
Con su constante estímulo.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento infinito a mis padres, Luis Ismael Reyes Gutiérrez y Rosa Estela Narváez Pozo por haberme inculcado los valores y desafíos que permitieron cumplir mis metas.

A mi asesor Dr. Milton M. Cortez Gutiérrez por su motivación en el tema y su apoyo incondicional hacia la investigación.

A la Universidad Nacional de Santa – Escuela de Posgrado, por brindarme la ocasión de presentar mi trabajo de investigación.

Índice General

Conformidad del asesor	ii
Aval del Jurado Evaluador	iii
Acta de evaluación de Sustentación de Tesis	iv
Recibo Turnitin	vi
Reporte porcentual del Turnitin	vii
Dedicatoria	ix
Agradecimiento	x
Índice General	xi
Resumen	xiii
Abstract	xiv
CAPÍTULO I	15
Introducción	15
1.1. Descripción	16
1.2. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación	16
1.3. Formulación del problema de investigación	17
1.4. Objetivos de la investigación	18
1.4.1. Objetivo general	18
1.5.2. Objetivos específicos	18
1.5. Formulación de la hipótesis	18
1.5.1. Predicciones de la hipótesis.....	18
1.5.2. Prueba de la hipótesis	18
1.6. Justificación e Importancia de la investigación	19
CAPÍTULO II	21
Marco teórico	21
2.1. Antecedentes de la investigación	22
2.1.1. Antecedentes internacionales	22
2.1.2. Antecedentes nacionales	26

2.2. Marco conceptual	27
2.2.1. Ecuación diferencial parcial de 2° orden con dos variables indep.	27
2.2.2. Modelamiento matemático	28
2.2.3. Método de Garlekin	29
2.2.4. Planteamiento de la solución general del problema de Poisson Unidimensional	30
2.2.5. El método de elementos finitos	32
CAPÍTULO III	40
Metodología empleada	40
3.1. Enfoque de la investigación	40
3.2. Métodos empleados en la investigación	40
3.1.1. Método deductivo	40
3.1.2. Método inductivo	40
3.1.3. Método hipotético – deductivo	40
3.3. Metodología para la prueba de hipótesis	40
3.4. Técnicas e Instrumentos de recolección de datos	41
3.5. Diseño de la investigación	41
3.5.1. Variables, definición conceptual y operacional	41
3.6. Procedimiento de la recolección de datos	42
3.7. Observaciones y/o dificultades	42
CAPÍTULO IV	43
Resultados y Discusión	43
4.1. Resultados	43
4.2. Discusión de los Resultados	53
CAPÍTULO V	54
Conclusiones y recomendaciones	54
5.1. Conclusiones	54
5.2. Recomendaciones	54
Referencias bibliográficas	56

RESUMEN

En el vigente adjunto de investigación se demuestra la existencia para la solución de un modelo matemático planteado:

$$u = u(x) \text{ tal que: } -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f^2(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = 0 \quad (\text{Condición de frontera de tipo Dirichlet})$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \quad (\text{Condición de frontera de tipo Dirichlet Neumann})$$

Para la solución se empleó el Método de Elementos Finitos, debido que proporciona un procedimiento además de sistemática porque construye funciones bases $\{j_i\}_{i=1}^N$ en la aproximación de Ritz Garlekin de problemas con valores de frontera, es decir consiste en definir las funciones base j_i como funciones polinomiales por tramos, sobre sub regiones del dominio. En esta investigación hacemos la construcción del elemento finito más simple para resolver problemas unidimensionales, mediante funciones polinomiales no lineales por tramos (Elementos de Lagrange de primer orden).

El Método de Elementos Finitos es un procedimiento numérico que permite obtener soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y/o parciales por medio de aproximaciones discretas, aplicadas a problemas con alto grado de dificultad en ingeniería, este método es apenas una de las tantas formas numéricas que se han procedido desarrollando y empleando de manera exitosa en la solución de diversos problemas en diferentes áreas de las ciencias e ingenierías. Aun cuando estos diferentes métodos conforman una poderosa herramienta matemática, no dejan de ser métodos aproximados, por el cual se debe tener un especial cuidado en su utilización. Su desarrollo y éxito se expande con el creciente desempeño de las computadoras digitales.

Palabras claves: Problema de Poisson unidimensional, condiciones de frontera, método de Garlekin, discretización del dominio, matriz de ensamblaje

ABSTRACT

In the present research work, the existence for the solution of a mathematical model proposed is demonstrated:

$$u = u(x) \text{ such that: } -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f^2(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = 0 \quad (\text{Dirichlet type boundary condition})$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \quad (\text{Dirichlet Neumann type boundary condition})$$

The Finite Element Method was used for the solution, because it provides a systematic procedure because it builds base functions in the Ritz Garlekin approximation of boundary value problems, that is, it consists of defining the base functions as piecewise polynomial functions, over sub-regions of the domain. In this research we build the simplest finite element to solve one-dimensional problems, through piecewise non-linear polynomial functions (first-order Lagrange elements).

The Finite Element Method is a numerical procedure that allows obtaining solutions to ordinary and/or partial differential equations by means of discrete approximations, applied to problems with a high degree of difficulty in engineering. This method is just one of the many numerical methods that have been developed and successfully used in the solution of various problems in different areas of science and engineering. Even though these different methods make up a powerful mathematical tool, they are still approximate methods, for which special care must be taken in their use. Its development and success expands with the increasing performance of digital computers.

Keywords: One dimensional Poisson problem, boundary conditions, Garlekin method, domain discretization, assembly matrix.

CAPÍTULO I

Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales no Lineales es la ciencia de las matemáticas con un claro entusiasmo aplicado debido a que muchos problemas con importancia frecuentemente aparecen en ingeniería, quienes crecieron considerablemente en el siglo XVIII, a partir de la Teoría de la Mecánica de los Medios Continuos, la conducción del calor, Mecánica de Fluidos.

El Método de Elementos Finitos es una estrategia numérica que nos permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales mediante aproximaciones discretas, aplicadas a problemas con alto grado de dificultad en ingeniería, este método es uno de los tantos sistemas numéricos que se han abordado e incrementando, empleando de manera exitosa para la solución de ejercicios y problemas en diferentes áreas en las ciencias e ingenierías. Aun ocasionalmente estos procedimientos diferentes establecen una poderosa herramienta matemática, por el cual se debe tener una característica meticulosidad en su empleo. Su avance y triunfo se amplía con la progresiva ejecución de las computadoras dactilares.

Introducir el procedimiento en Elementos Finitos para las matemáticas asociadas al método en una dimensión, la construcción de los métodos es más simple y natural, además la manipulación matemática es directa y simple. Por tanto comenzaremos con el caso de problemas unidimensionales y después extenderemos los resultados a problemas en dos dimensiones.

El Método de Elementos Finitos proporciona una técnica además de sistemática porque construye funciones bases $\{j_i\}_{i=1}^N$ en la aproximación de Ritz. Garlekin en problemas con valores de frontera, es decir consiste en definir las funciones base j_i como funciones polinomiales por tramos, sobre sub regiones del dominio. En esta investigación haremos la construcción del elemento finito más

simple para resolver problemas unidimensionales. Presentamos un problema modelo.

Calcule $u = u(x)$ tal que: $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x)$, $0 < x < L$

$$u(0) = 0 \quad (\text{Condición de frontera de tipo Dirichlet})$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \quad (\text{Condición de frontera de tipo Dirichlet Neumann})$$

1.1. DESCRIPCIÓN:

Los ejercicios y problemas que comprometen las ecuaciones diferenciales no lineales han acudido desarrollándose con distintos panoramas con gran éxito como por ejemplo se aprecia en P. G. Ciarlet, 2002 y R. J. Le Veque 2007. Estos modelos del tipo elíptico aparecen como por ejemplo en temperaturas estacionarias, fluidos estacionarios que no evolucionan con el tiempo, evidentemente el tratamiento numérico será el indicado para resolver estos problemas.

Los dilemas el cual complican las ecuaciones diferenciales no lineales han llegado a desarrollarse durante distintos panoramas, en virtud de los Bancos de Datos del Ministerio de Educación y Ciencia de España, la Universidad de Sevilla con el hecho de diversos dilemas no lineales en mecánica de fluidos, presenta un ejemplo del tipo elíptico creado claramente con instrumentos matemáticos basados y comprobados tal como los números de Reynolds, presión de fluidos, etc.

La intención del presente trabajo de investigación es mostrar una posibilidad de los métodos numéricos para usar el procedimiento del método de elementos finitos y solucionar problemas con fluidos estacionarios, situados en un ejemplo de tipo elíptico, con el fin de que a posteriori discutir la existencia y unicidad de la resolución.

1.2. PLANTEAMIENTO Y FUNDAMENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Hoy en día, dos grandes líneas de investigación enmarcan el Método de Elementos Finitos (MEF).

Una como instrumento en la Ingeniería; en el cual sus áreas básicas de progreso han cursado de manera muy asociadas a la presión de la industria por solucionar específicos problemas en ingeniería.

La segunda; de manera matemática, en cuantiosas fases de su desarrollo se ha procreado y trabajado con celebridad una concreta técnica numérica antes de averiguar su argumentación matemática estricta.

Actualmente en matemática se tiene problemas continuos que no se pueden resolver analíticamente, como es el caso de la Ecuación Diferencial en la que justamente un tratamiento numérico hace posible la resolución de dicho problema, en este caso posee una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico:

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + F(u) = f(x) , \text{ con } F(u) : \text{No lineal}$$

Inicialmente trataremos con problemas en un intervalo para luego enfocar el caso general de una recta.

Todos estos problemas están sujetos a condiciones de frontera. Por otro lado se estudiará la existencia de una solución aproximada precisando un error de aproximación con una tolerancia dada.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Comúnmente un problema físico en ingeniería está expresado a través de ecuaciones diferenciales con sus respectivas condiciones de contorno para el cual surge la presente pregunta.

¿Existe y es única la solución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos en el siguiente Modelo No Lineal?

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + F(u) = f(x)$$

Sujeta a condiciones de entorno.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Objetivo General:

El actual trabajo de investigación tiene como objetivo afirmar que existirá y es única la solución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos en el siguiente Modelo No Línea.

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + F(u) = f(x)$$

1.4.2. Objetivos Específicos:

- *) Demostrar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos para el modelo no lineal.
- *) Utilizar programas computacionales en Matlab para la solución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos.

1.5. FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

i) F y $f \in L^2(0;1)$

ii) $u \in L^2(0;1) \Rightarrow u \in H^2(0;1)$ Espacios de Sobolev

1.5.1. Predicciones de la Hipótesis (opcional)

El problema tiene una solución casi exacta

1.5.2. Prueba de la Hipótesis (o de las predicciones)

1.5.2.1. Caracterización y naturaleza del objeto de la investigación:

Seguiremos con un estudio del problema aproximado

1.5.2.2. Metodología para la Prueba de la Hipótesis (o predicciones):

Inicialmente se considera las funciones de forma o ensayo, también son conocidas como las funciones bases, para luego ensamblar seguidamente de sus errores de estimación, no dejando de lado resolución de sistemas de ecuaciones con ayuda del computador.

1.6. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

La importancia del problema radica en que se puede generalizar a más dimensiones, lo que se conseguiría las funciones elementales en dichas dimensiones lo cual sería materia de estudio posterior.

Los problemas físicos y de ingeniería, en su mayoría consisten en resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, cuya solución no siempre es fácil, el método de elementos finitos permite señalar que:

1° La aplicación es cómoda y se hace más sencillo cuando se cuenta con computadora.

2° El método de elementos finitos permite resolver cualquier tipo de problema con condiciones de frontera complicados.

Llamaremos a los problemas lineales, a aquellos en los que la respuesta a una perturbación del sistema (estructura con cargas aplicadas) responde a una relación lineal con el valor de la perturbación. Los problemas no lineales pueden asociarse al comportamiento del material y a la geometría del modelo.

El método de los elementos finitos es una estrategia de cálculo empleado en la solución de múltiples problemas de ingeniería, que se basa en examinar al cuerpo o estructura dividido en distintos elementos discretos, con específicas condiciones de frontera, produciendo un sistema de ecuaciones que se resuelve de manera numérica y proporciona el estado

Página 3/29 Estructuras III Introducción a los Elementos Finitos de tensiones y deformaciones. Asimismo, se emplea en matemáticas como método nodal aproximado para resolver ecuaciones diferenciales en forma numérica. Es un método numérico que se aplica a diversos problemas con

condiciones de frontera impuestas (en las estructuras las condiciones de frontera serian: restricciones y cargas externas). Gran variedad de estos problemas no tiene solución analítica o es muy complicado obtenerlo, por lo que se transforma en la única alternativa de resolución. Con esta estrategia podemos resolver sistemas los cuales no son fáciles de obtener su solución mediante modelos matemáticos simples.

CAPÍTULO II

Marco Teórico

En este capítulo presentaremos algunos conceptos previos que son indispensables para explicar el trabajo de investigación, finalmente se hará una descripción en cuanto a su formulación matemática.

La investigación se ha realizado bajo el enfoque de la Escuela Matemática Francesa, en la que arduamente se ha trabajado con la matemática numérica, como por ejemplo se cita a Lions J. L, Brezis H. en concordancia con la escuela americana o rusa ellos mejoraron en cuanto su simbología y por ende con mejor claridad y comprensión de dicha matemática.

La teoría de las ecuaciones diferenciales es con toda certeza la materia de las matemáticas con una más clara motivación aplicada en los problemas de la física e ingeniería, en exclusivos problemas de temperatura y fluidos estacionarios. La resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, en la gran mayoría de los casos manifiesta un sin número de condiciones y restricciones, como por ejemplo la no linealidad de la ecuación, y la no existencia de la derivada desde el punto de vista clásico.

En el presente trabajo de investigación comenzaremos por motivar la necesidad de averiguar una solución numérica de una ecuación diferencial, seguidamente introduciremos los espacios de Sobolev, dado que estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteo y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno.

En otras palabras, estos espacios son completos y además permiten conseguir logros generales acerca de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Otro gran beneficio de los espacios de Sobolev establece en que nos acepta caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque numerosos de los métodos de aproximación, tales como el método de Ritz o el de los Elementos Finitos, son oportunos y correctamente formulados cuando se lo hace en estos espacios.

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Nos respaldamos en los antecedentes internacionales y nacionales, según se indica

2.1.1. Antecedentes Internacionales: Tenemos los siguientes autores

2.1.1.1. Alberto Cardona, Víctor Fachinotti (2015) En su obra hace una presentación al procedimiento de los Elementos Finitos". En la Parte 1 Introduce al MEF para resolver problemas de tipos elípticos. También resuelve algunos problemas de tipo elíptico, empleando elementos finitos, en el cual discretiza el dominio, así como realiza la estimación de error.

El desarrollo de las computadoras le permitió usar estos modelos para resolver problemas prácticos, así como también se pueden simular y resolver sistemas altamente complicados en ciencia e ingeniería.

Su aplicación se generalizó, integrado a sistemas de CAD/CAE

CAD: Computer Aided Design

CAE: Computer Aided Engineering.

2.1.1.2. Antón Mayoral, Jesús (2012) investigó sobre "**Simulación numérica de interacción fluido - estructura**", en la Universidad Carlos III de Madrid, finalizado la investigación obtiene que no todos los procedimientos numéricos son apropiados para asumir una interrelación fluido - sistema, de ese modo ocurre con el Lagrangiano. Las distorsiones que tolera el fluido son tan extensas que la malla Lagrangiana se distorsiona con exageración y no concede al cálculo.

Con relación a qué criterio es más adecuado para resolver problemas, cabe decir que entre el Euleriano y el ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) la diversidad en las soluciones son pocas. Si ésta es una variable decisiva del problema el sistema ALE será el escogido para solucionar la interacción fluido-estructura.

También obtiene la consideración del mallado. Donde demostró como una malla más fina, exclusivamente en el lugar de importancia, logra unas soluciones más precisas. No obstante, hay que inquirir un acuerdo entre el tamaño de malla y el avance de soluciones obtenidos, pues el periodo de cálculo crece exponencialmente cuanto más fina es la malla, por el contrario, propone que el análisis numérico es una estrategia que indaga la determinación de problemas complicados a través del uso de algoritmos matemáticos. Así se pueden solucionar problemas que analíticamente son complicados o no tienen solución.

2.1.1.3. Dr. L. Héctor Juárez V. (2010) En su obra **“Solución Numérica de EDP, Introducción al Método de Elemento Finito”**, profesor exclusivo de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa – México. Hace una introducción del elemento finito y las matemáticas asociadas al método. En una dimensión la construcción de los elementos finitos es más simple y natural. Para esto construye funciones bases $\{j_i\}_{i=1}^N$ y la idea principal es en definir las funciones base j_i como funciones polinomiales lineales por tramos (Es decir definidas elemento por elemento sobre la malla) que son sub regiones del dominio llamadas Elementos Finitos.

2.1.1.4. Luis José Berbesí Márquez (2010) Investigó sobre **“Solución Numérica de Problemas de Valor de Frontera para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”**, para optar el título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad de los Andes – Mérida Venezuela. En su obra se investigó cinco métodos para evaluar la resolución numérica del problema presentado. Estos métodos son: el método del Disparo y Diferencias Finitas, apreciados clásicos porque están vigentes en la generalidad de los libros y publicaciones de Análisis Numérico que aproxima el problema formulado, el procedimiento de Elementos Finitos

incluso parten de la teoría de Espacios Normados y del Análisis Funcional, y el procedimiento Bvp4c, es una táctica que usa la idea de superposición y el mismo se halla implementado en Matlab.

Un caso especial, el cual expresó el fundamento de este trabajo de investigación, está establecido para averiguar el acercamiento de la resolución de un Problema de Valor de Frontera (PVF) de segundo orden, es decir, acercar la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} y'' = f(x; y; y') \\ y(a) = a \\ y(b) = b \end{cases}$$

2.1.1.5. Jorgenson José Zambrano Arenas (2007) Investigó sobre **“Simulación en Matlab de Problemas de Contorno Elípticos en una y dos Dimensiones Empleando el Método de Elementos Finitos”**. En el presente trabajo de investigación se proyectó un instrumento computacional que diagnosticó la resolución de una ecuación diferencial tipo elíptica, en una y dos dimensiones, superponiendo el método de Elementos Finitos con ayuda del Matlab. También se diseñaron algoritmos e interfaces de usuarios que permitieron ilustrar de manera clara, la información requerida por el programa al momento de ingresar los datos, así como para visualizar la solución del mismo, dando opciones al usuario para una mayor comprensión del problema planteado.

La investigación arrojó resultados satisfactorios, comparados con problemas que tenían respuesta analítica conocida y visualizando las soluciones con un gran poder gráfico, todo esto gracias al diseño de interfaces de usuario (Gui) que ilustran de manera clara los resultados obtenidos por el programa. El programa FINITO 1.0 resuelve problemas unidimensionales (lineales, cuadráticos y cúbicos) por el método de elementos finitos, usando el método de Galerkin, comparando la solución numérica con la analítica puntualmente cuando se tenga a mano dicha solución; y por otro lado, comparando sucesiones de aproximaciones cuando no se disponga de la solución analítica y calculando el error de energía como criterio de convergencia.

2.1.1.6. Lázaro Naranjo, Carlos (1999) Investigó sobre “**Aplicaciones del Método de Elementos Finitos a Problemas de Termo fluidos**”, para optar el grado académico de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica, experto en Térmicas y Fluidos, en la Universidad Autónoma de Nuevo León - Argentina. Realizó una investigación donde ejemplificó las aplicaciones del método de elementos finitos al problema de termo fluidos, también incluye un análisis de errores en muchos casos comparado la resolución numérica con la analítica con el propósito de demostrar la validez del método. Asimismo, presenta un programa que puede usarse en relación con problemas comunes de transferencia de calor y mecánica de fluidos.

Hace notorio en la utilidad del método de elementos finitos fundamentalmente en la resolución de problemas de naturaleza elípticas con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann. Adquiriendo así gran aceptación en la solución de problemas de ingeniería. Este trabajo de investigación se ha desarrollado en un sistema unidimensional y bidimensional.

2.1.1.7. Norberto Marcelo, Nigro (1993) investigó sobre “**Resolución por Elementos Finitos de Problemas de Mecánica de Fluidos**”, para optar el grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional - Argentina, finalizado la investigación trata de numerosos aspectos relacionados con la representación numérica de problema de mecánica de fluidos mediante el método de los elementos finitos, brindando la importancia del mejoramiento de la velocidad de convergencia, al respecto se presentaron diferentes formas: El método de Multigrilla que permite en una gran cantidad de situaciones, resolver en forma óptima el sistema de ecuaciones que surge de la discretización, aunque quedan algunas restricciones pendientes en su aplicación en un modelo potencial, quedando por investigar su extensión a situaciones más complicadas como las ecuaciones de Euler y Navier Stokes.

Considera que el refinamiento adaptativo es indispensable, así como la utilización de matrices de masa pre condicionante junto con buenas condiciones de contorno, es una buena opción en problemas estacionarios. Así como una formulación estable para el caso comprensible-

incomprensible en forma unificada es de suma importancia para resolver en forma óptima las situaciones más generales que se presenten en la realidad.

2.1.2. Antecedentes Nacionales: Consideramos los siguientes autores

2.1.2.1. Morales Marchena, Herón (2013) investigó sobre el “**Aplicativo en Matlab para la Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales Elípticas con el Método de Diferencias Finitas en un Dominio Rectangular de R^2** ”, Chimbote: Universidad Nacional del Santa. Realizó una investigación, donde el presente estudio nos permitió, elaborar un aplicativo en Matlab para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales lineales elípticas con el método de diferencias finitas en un dominio rectangular de R^2 .

2.1.2.2. Morales Marchena, Herón (2015) investigó sobre el “**Existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico**”, para optar el grado de doctor en Matemáticas, Chimbote: Universidad Nacional del Santa. Realizó una investigación donde demostró la existencia y unicidad, de la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -f \quad \text{en } \Omega$$

Considerando para ello la ecuación como un operador diferencial se obtuvo una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$. Donde: Ω es una región plana convexa, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

2.1.2.3. Dr. Obidio Elisbán Rubio Mercedes (2007) En su libro “**El Método del Elemento Finito**”, Docente Principal de la Universidad Nacional de Trujillo – Perú. El considera el método del elemento finito un método o una configuración como un ensamblado de pequeñas partículas de tamaño finito, mediante el cual se denominan elementos finitos. Los puntos donde los elementos finitos son interconectados se entienden como nodos o puntos nodales, y el procedimiento en identificar los elementos finitos y seleccionar los nodos es llamado discretización o modelización. A

continuación, presentamos dos formas de introducirnos al estudio del elemento finito.

Primero utilizando ejemplos estándares que aparecen en la ingeniería, y las leyes físicas entramos directamente al manejo del Método del Elemento Finito (MEF). En segundo, lugar para quienes desean abordar el método desde la forma matemática y que conducirá a la construcción de algún código se presenta los modelos matemáticos, básicos para estudiar.

2.2. MARCO CONCEPTUAL

2.2.1. Ecuación Diferencial Parcial de Segundo Orden con dos Variables Independientes:

Tiene la forma: $A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{d^2 u}{dx dy} + C \frac{d^2 u}{dy^2} + D \frac{du}{dx} + E \frac{du}{dy} + Fu = G$

Donde: A, B, C, D, E, F, G pueden depender de x ó y pero no de u .

Si $G = 0$, la ecuación diferencial se llama homogénea.

Clasificación: Sea $I = B^2 - 4AC$

*) Si $I < 0$: La ecuación diferencial es Elíptica

*) Si $I = 0$: La ecuación diferencial es Parabólica

*) Si $I < 0$: La ecuación diferencial es Hiperbólica

Ejemplo 1: Sea $\frac{dU}{dt} = k \frac{d^2 U}{dx^2} \Rightarrow k \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{dU}{dt} = 0$

Entonces $A = k$; $B = 0$; $C = 0 \Rightarrow I = B^2 - 4AC = 0 - 4k(0) = 0$

La ecuación diferencial es parabólica.

Ejemplo 2: Sea $x \frac{d^2 U}{dx^2} + y \frac{d^2 U}{dy^2} + 4y^2 \frac{dU}{dx} = 0$

Entonces $A = x$; $B = 0$; $C = y \Rightarrow I = B^2 - 4AC = 0 - 4xy = -4xy$

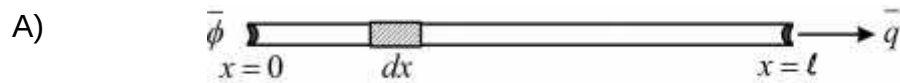
Luego observamos en la región donde:

*) $I = -4xy < 0 \Rightarrow xy > 0$ La ecuación diferencial es Elíptica

*) $I = -4xy = 0 \Rightarrow xy = 0$ La ecuación diferencial es Parabólica

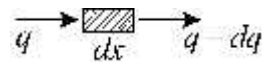
*) $I = -4xy > 0 \Rightarrow xy < 0$ La ecuación diferencial es Hiperbólica

2.2.2. Modelamiento Matemático: Transmisión estacionaria de calor en una barra de longitud l , temperatura f , y flujo de calor q .



Condiciones de contorno: $f = \bar{f} /_{x=0}$; $q = \bar{q} /_{x=l}$.

Planteemos el “equilibrio” o requisito de balance de flujo de calor en el elemento diferencial de la barra.



$$\underbrace{(q + dq)}_{\text{flujo que sale}} - \underbrace{q}_{\text{flujo que entra}} = 0 \rightarrow dq = 0$$

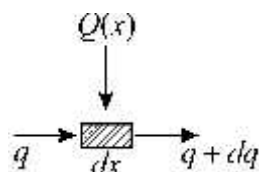
Según la Ley de Fourier: $q = -k \frac{df}{dx}$; k : coeficiente de conductividad térmica.

$$dq = \frac{dq}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx} \left[-k \frac{df}{dx} \right] \cdot dx = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[-k \frac{df}{dx} \right] = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left[k \frac{df}{dx} \right] = 0 \quad \dots \text{Ecuación de balance térmico.}$$

B) $Q(x)$: Fuente de calor por unidad de longitud

Planteemos el “equilibrio” o requisito de balance de flujo de calor en el elemento diferencial de la barra.



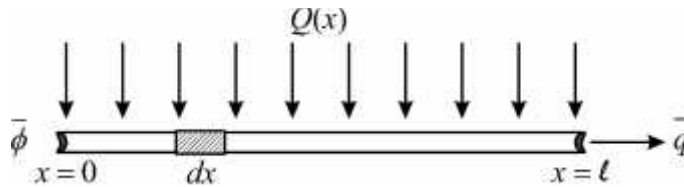
$$(q + dq) - (q + Q \cdot dx) = 0 \rightarrow dq - Q \cdot dx = 0, \rightarrow \frac{dq}{dx} - Q(x) = 0$$

$$\text{Reemplazando } q, \text{ se obtiene: } \frac{d}{dx} \left[k \frac{df}{dx} \right] + Q(x) = 0$$

2.2.3. Método de Galerkin: Considera como funciones de peso las mismas funciones de prueba. Es decir $w_i(x) = N_i(x)$.

En el ejemplo para $n = 2$.

$$\bar{f}(x) = N_1(x) \cdot a_1 + N_2(x) \cdot a_2 \quad ; \quad N_j(x) = \text{sen} \left(\frac{j p x}{l} \right)$$



$$w_1(x) = N_1(x) = \text{sen} \left(\frac{p x}{l} \right) \quad ; \quad w_2(x) = N_2(x) = \text{sen} \left(\frac{2 p x}{l} \right)$$

Desarrollando:

$$k_{ij} = \left(\frac{j p}{l} \right)^2 \int_0^l N_i(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{j p x}{l} \right) dx \quad ; \quad f_i = \int_0^l N_i(x) \cdot Q(x) dx$$

$$k_{11} = \left(\frac{p}{l} \right)^2 \int_0^l \text{sen}^2 \left(\frac{p x}{l} \right) dx = \frac{p^2}{2l}$$

$$k_{12} = \left(\frac{2p}{l} \right)^2 \int_0^l \text{sen} \left(\frac{p x}{l} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 p x}{l} \right) dx = 0$$

$$f_1 = \int_0^l \text{sen} \left(\frac{p x}{l} \right) \cdot Q(x) dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \text{sen} \left(\frac{p x}{l} \right) dx = \frac{l}{p}$$

$$k_{21} = \left(\frac{p}{l}\right)^2 \int_0^l \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{px}{l}\right) dx = 0$$

$$k_{22} = \left(\frac{2p}{l}\right)^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{2px}{l}\right) dx = \frac{2p^2}{l}$$

$$f_2 = \int_0^l \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \cdot Q(x) dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{2px}{l}\right) dx = \frac{l}{p}$$

Reemplazando en la matriz:

$$\bar{f}(x) = \frac{2l^2}{p^3} \cdot \sin\left(\frac{px}{l}\right) + \frac{l^2}{2p^3} \cdot \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \dots \text{solución aproximada.}$$

2.2.4. Planteamiento de la solución general del problema de Poisson Unidimensional:

Sean $A(f): \frac{d}{dx}\left(k \cdot \frac{df}{dx}\right) + Q(x) = 0$ en $\Omega: 0 \leq x \leq l$, con las condiciones de contorno.

$$B(f): \begin{cases} f = \bar{f} = 0, & \text{en } x=0 \text{ } (\Gamma_f). \\ q = \bar{q}, & \text{en } x=l \text{ } (\Gamma_q). \end{cases}$$

↓

$$k \cdot \frac{df}{dx} + \bar{q} = 0$$

La función incógnita f se aproxima por $f \approx \bar{f} = \sum_{j=1}^n N_j(x) \cdot a_j$, aplicando el

método de residuos ponderados se tiene:

$$\int_0^l w_i \left[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(k \cdot \frac{d\bar{f}}{dx}\right) + Q(x)}_{A(\bar{f})} \right] dx + \int_{\Gamma} \bar{w}_i \cdot B(\bar{f}) d\Gamma = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\int_0^l w_i \left[\frac{d}{dx} \left(k \cdot \frac{d\bar{f}}{dx} \right) + Q(x) \right] dx + \left[\bar{w}_i \left(k \cdot \frac{d\bar{f}}{dx} + \bar{q} \right) \right]_{x=l} = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde la ponderación en la frontera $\Gamma|_{x=0}$ no existe, ya que generalmente se escogen funciones $\bar{f}$ que satisfagan las condiciones de contorno de Dirichlet.

Reemplazando la función $\bar{f}$:

$$\int_0^l w_i \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} [N_1 a_1 + \dots + N_n a_n] \right) + Q(x) \right] dx + \bar{w}_i \left[k \frac{d}{dx} (N_1 a_1 + \dots + N_n a_n) + \bar{q} \right]_{x=l} = 0$$

$$\int_0^l w_i \left[\frac{d}{dx} \left(k \left[a_1 \frac{dN_1}{dx} + a_2 \frac{dN_2}{dx} + \dots + a_n \frac{dN_n}{dx} \right] \right) + Q(x) \right] dx + \bar{w}_i \left[k \left(a_1 \frac{dN_1}{dx} + a_2 \frac{dN_2}{dx} + \dots + a_n \frac{dN_n}{dx} \right) + \bar{q} \right]_{x=l} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\int_0^l w_i \left[\frac{d}{dx} k \left(a_1 \frac{dN_1}{dx} + a_2 \frac{dN_2}{dx} + \dots + a_n \frac{dN_n}{dx} \right) \right] dx + \int_0^l w_i Q(x) dx + \bar{w}_i \left[k \left(a_1 \frac{dN_1}{dx} + a_2 \frac{dN_2}{dx} + \dots + a_n \frac{dN_n}{dx} \right) + \bar{q} \right]_{x=l} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ecuación que permite construir un sistema de “n” ecuaciones con “n” variables y que puede escribirse como: $k \cdot a = f$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}}_k \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}_f$$

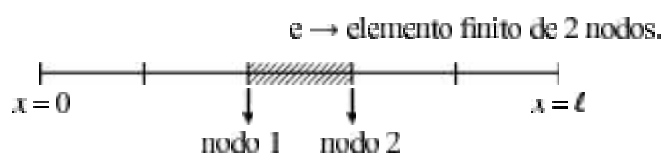
Donde:

$$k_{ij} = \int_0^l w_i \frac{d}{dx} \cdot k \left(\frac{dN_j}{dx} \right) dx + \left[\bar{w}_i \cdot k \cdot \frac{dN_j}{dx} \right]_{x=l} ; \quad f_i = - \int_0^l w_i Q(x) dx - \left[\bar{w}_i \cdot \bar{q} \right]_{x=l}$$

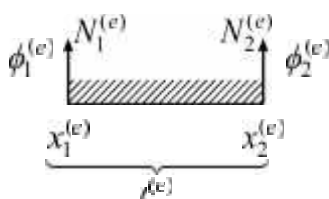
2.2.5. El Método de Elementos Finitos:

Etapas en un problema unidimensional.

***) Discretización del dominio de análisis:** El dominio $\Omega = [0, l]$ se divide en elementos o nodos, estos elementos pueden tener variadas formas, hasta pueden ser empleadas diferentes formas para conseguir una misma solución.



***) Aproximar la función incógnita f en cada elemento finito:** Consiste en seleccionar la cantidad de nodos para todo elemento y la función de interpolación con el fin de expresar la transformación de la función incógnita dentro del elemento. Generalmente se seleccionan a los polinomios como funciones de interpolación por su sencillez para derivar e integrar. La cantidad de nodos asignados a cada elemento determinan el grado del polinomio elegido, este depende entonces de la naturaleza y la cantidad de incógnitas en cada nodo y ciertos requisitos de continuidad obligados en los nodos y a lo largo de las fronteras de los elementos.



$$\bar{f}_{(x)}^{(e)} = \frac{(x - x_2^{(e)})}{x_1^{(e)} - x_2^{(e)}} f_1^{(e)} + \frac{(x - x_1^{(e)})}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} f_2^{(e)} \quad \dots \text{Lagrange}$$

De donde se concluye la expresión de las funciones de forma $N_j^{(e)}$.

$$N_1^{(e)}(x) = \frac{x - x_2^{(e)}}{x_1^{(e)} - x_2^{(e)}} \quad ; \quad N_2^{(e)}(x) = \frac{x - x_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}$$

$f_1^{(e)}$ y $f_2^{(e)}$ son las incógnitas fundamentales del problema.

***) Construir** la matriz de rigidez, sustituyendo la función aproximada de f para cada elemento en la expresión integral del Método de Residuos Ponderados. (forma débil de Galerkin).

Se combinan las ecuaciones matriciales que definen el procedimiento de todos los elementos, para adquirir una ecuación matricial que manifieste el comportamiento del sistema de ecuaciones completo. Es decir, para poder establecer las propiedades del sistema modelado por elementos finitos, deben ensamblarse las propiedades de cada uno de los elementos.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

***) Determinar las incógnitas del problema:** $f_1, f_2, \dots, f_n$.

***) Definición de las condiciones de frontera.**

Luego que el sistema de ecuaciones esté listo para ser solucionado, deben aplicarse las condiciones de frontera, sustituyendo las incógnitas convenientes por los valores conocidos.

***) Resolución del sistema de ecuaciones:** El desarrollo de ensamblaje da origen a un sistema de ecuaciones que se solucionará para conseguir los valores en la resolución examinada en los nodos. Si el problema define un procedimiento consistente o en equilibrio, se deberá solucionar un sistema de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales. Por el contrario, si el problema es inconsistente, las incógnitas en los nodos son función del tiempo y se debe solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o no lineales.

Ejemplo. Dada la ecuación de Poisson $A(f): \frac{d^2 f}{dx^2} + 3 = 0$ en $\Omega = [0, l]$, con

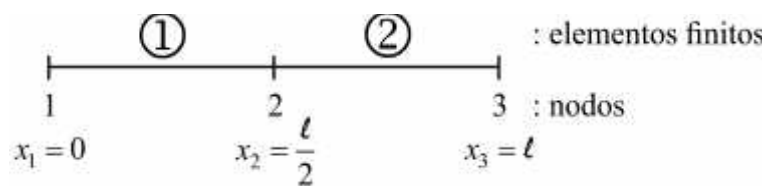
$$\text{las condiciones de contorno: } B(f): \begin{cases} f - 1 = 0 & ; \quad x = 0 \quad (\Gamma_f) \\ \frac{df}{dx} + 2 = 0 & ; \quad x = l \quad (\Gamma_q) \end{cases}$$

Determine una solución aproximada de la ecuación.

Solución:

Se deduce que $k = 1$, $Q = 3$, $f - 1 = 0$, $\bar{q} = 2$, en el modelo general.

***)** Discreticemos el dominio en 2 elementos finitos con 2 nodos cada uno.



***)** Aproximemos la función incógnita sobre todo el dominio.

$$\bar{f}(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x) \cdot f_j = N_1(x) \cdot f_1 + N_2(x) \cdot f_2 + N_3(x) \cdot f_3$$

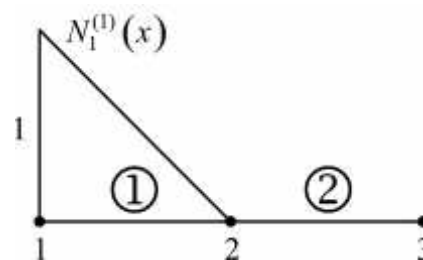
En la ecuación anterior N_j son las funciones de aspectos globales, y en cada elemento finito la aproximación se expresa como:

$$\bar{f}^{(1)}(x) = N_1^{(1)}(x) \cdot f_1 + N_2^{(1)}(x) \cdot f_2 ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

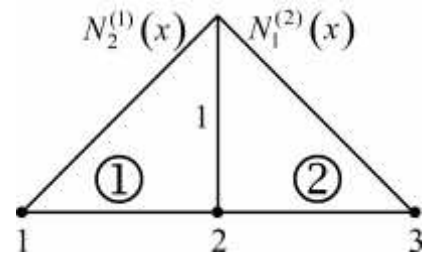
$$\bar{f}^{(2)}(x) = N_1^{(2)}(x) \cdot f_2 + N_2^{(2)}(x) \cdot f_3 ; \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

Donde:

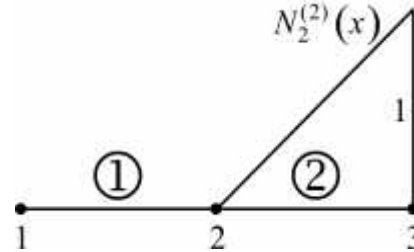
$$N_1 = \begin{cases} N_1^{(1)} & ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$



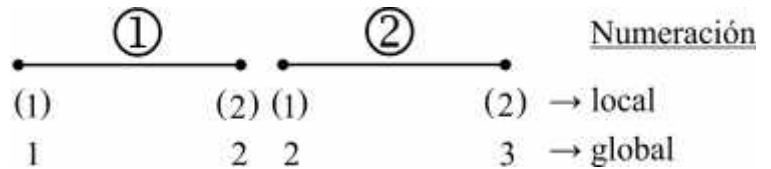
$$N_2 = \begin{cases} N_2^{(1)} & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ N_1^{(2)} & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



$$N_3 = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ N_2^{(2)} & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



numeración global.



Construyamos la matriz de rigidez, considerando la forma débil de Galerkin.

$$\int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \cdot k \left(\sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} \cdot f_j \right) dx = \int_0^1 N_i Q(x) dx + (N_i q)_0 - (N_i \bar{q})_1 ; i = 1, 2, 3:$$

Numeración global.

Para los datos del ejemplo $k = 1$, $Q = 3$, $\bar{q} = 2$.

$$\int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_3}{dx} \cdot f_3 \right) dx = \int_0^1 3N_i dx + [N_i q]_{x=0} - [2N_i]_{x=1}$$

Para $i = 1$.

$$\int_0^1 \frac{dN_1}{dx} \left[\frac{dN_1}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_3}{dx} \cdot f_3 \right] dx = \int_0^1 3N_1 dx + [N_1 q]_{x=0} - [2N_1]_{x=1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} \cdot \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \cdot f_2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} 3N_1^{(1)} dx + q_0$$

Para $i = 2$.

$$\int_0^1 \frac{dN_2}{dx} \left[\frac{dN_1}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_3}{dx} \cdot f_3 \right] dx = \int_0^1 3N_2 dx + [N_2 q]_{x=0} - [2N_2]_{x=1}$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \cdot f_2 \right] dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \cdot f_3 \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 3N_2^{(1)} dx + \int_{x_2}^{x_3} 3N_2^{(2)} dx \end{aligned}$$

Para $i = 3$

$$\int_0^1 \frac{dN_3}{dx} \left[\frac{dN_1}{dx} \cdot f_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_3}{dx} \cdot f_3 \right] dx = \int_0^1 3N_3 dx + [N_3 q]_{x=0} - [2N_3]_{x=1}$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \frac{dN_3^{(2)}}{dx} \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \cdot f_2 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \cdot f_3 \right] dx = \int_{x_2}^{x_3} 3N_3^{(2)} dx - 2 \frac{q}{q}$$

Haciendo:

$$k_{ij}^{(e)} = \int_{l(\Theta)} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx \quad ; \quad f_i^{(e)} = \int_{l(\Theta)} N_i^{(e)} \cdot Q(x) dx$$

Se construye el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} + q_0 \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} - \bar{q} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$N_1^{(1)}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1/2}{-1/2} \Rightarrow \frac{dN_1^{(1)}}{dx} = -\frac{2}{1}$$

$$N_2^{(1)}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{1/2} \Rightarrow \frac{dN_2^{(1)}}{dx} = \frac{2}{1}$$

$$N_1^{(2)}(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{x - 1}{-1/2} \Rightarrow \frac{dN_1^{(2)}}{dx} = -\frac{2}{1}$$

$$N_2^{(2)}(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x - 1/2}{1/2} \rightarrow \frac{dN_2^{(2)}}{dx} = \frac{2}{1}$$

Calculando:

$$k_{11}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-2}{1}\right) \left(\frac{-2}{1}\right) dx = \frac{2}{1} \quad ; \quad k_{11}^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{-2}{1}\right) \left(\frac{-2}{1}\right) dx = \frac{2}{1}$$

$$k_{12}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-2}{1}\right) \left(\frac{2}{1}\right) dx = -\frac{2}{1} \quad ; \quad k_{12}^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{-2}{1}\right) \left(\frac{2}{1}\right) dx = -\frac{2}{1}$$

$$k_{21}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{-2}{1}\right) dx = -\frac{2}{1} \quad ; \quad k_{21}^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{-2}{1}\right) dx = -\frac{2}{1}$$

$$k_{22}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{2}{1}\right) dx = \frac{2}{1} \quad ; \quad k_{22}^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{2}{1}\right) dx = \frac{2}{1}$$

$$f_1^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} 3 \left(\frac{x - 1/2}{-1/2}\right) dx = \frac{3}{4} 1 \quad ; \quad f_2^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} 3 \cdot \left(\frac{x}{1/2}\right) \cdot dx = \frac{3}{4} 1$$

$$f_1^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} 3 \left(\frac{x - 1}{-1/2}\right) dx = \frac{3}{4} 1 \quad ; \quad f_2^{(2)} = \int_{x_2}^{x_3} 3 \cdot \left(\frac{x - 1/2}{1/2}\right) \cdot dx = \frac{3}{4} 1$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & 0 \\ -\frac{2}{1} & \frac{2}{1} + \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} \\ 0 & -\frac{2}{1} & \frac{2}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} 1 + q_0 \\ \frac{3}{4} 1 + \frac{3}{4} 1 \\ \frac{3}{4} 1 - \bar{q} \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} 1 + q_0 \\ \frac{3}{2} 1 \\ \frac{3}{4} 1 - 2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo: $f_1 = 1$, $f_2 = 1 - \frac{3}{8}l^2 - \frac{q_0}{2}l$, $f_3 = 1 - l - \frac{q_0}{2}l$

La solución aproximada para cada elemento finito se expresa como:

$$\bar{f}^{(1)}(x) = -\frac{2x}{l} + 1 + \frac{2x}{l} \left(1 - \frac{3}{8}l^2 - \frac{q_0}{2}l \right) ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

$$\bar{f}^{(2)}(x) = \left(-\frac{2x}{l} + 2 \right) \left(1 - \frac{3}{8}l^2 - \frac{q_0}{2}l \right) + \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) \left(1 - l - \frac{q_0}{2}l \right); \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

$$\bar{f}(x) = N_1(x) \cdot a_1 + N_2(x) \cdot a_2 ; \quad N_j(x) = \text{sen} \left(\frac{jpx}{l} \right)$$

$$w_1(x) = N_1(x) = \text{sen} \left(\frac{px}{l} \right) \quad w_2(x) = N_2(x) = \text{sen} \left(\frac{2px}{l} \right)$$

Desarrollando:

$$k_{ij} = \left(\frac{jpx}{l} \right)^2 \int_0^l N_i(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{jpx}{l} \right) dx ; \quad f_i = \int_0^l N_i(x) \cdot Q(x) dx$$

$$k_{11} = \left(\frac{px}{l} \right)^2 \int_0^l \text{sen}^2 \left(\frac{px}{l} \right) dx = \frac{p^2}{2l}$$

$$k_{12} = \left(\frac{2px}{l} \right)^2 \int_0^l \text{sen} \left(\frac{px}{l} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2px}{l} \right) dx = 0$$

$$f_1 = \int_0^l \text{sen} \left(\frac{px}{l} \right) \cdot Q(x) dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \text{sen} \left(\frac{px}{l} \right) dx = \frac{l}{p}$$

$$k_{21} = \left(\frac{px}{l} \right)^2 \int_0^l \text{sen} \left(\frac{2px}{l} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{px}{l} \right) dx = 0$$

$$f_2 = \int_0^l \text{sen} \left(\frac{2px}{l} \right) \cdot Q(x) dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \text{sen} \left(\frac{2px}{l} \right) dx = \frac{l}{p}$$

Reemplazando en la matriz:

$$\begin{pmatrix} p^2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2l^2}{p^3} \\ a_2 = \frac{l^2}{2p^3} \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2l^2}{p^3} \cdot \text{sen}\left(\frac{px}{l}\right) + \frac{l^2}{2p^3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2px}{l}\right) \dots \text{solución aproximada.}$$

CAPÍTULO III

Metodología Empleada

3.1. ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Se utiliza el enfoque cualitativo, que se fundamenta en resolver una ecuación diferencial de tipo elíptico para solucionarlo mediante el método de elementos finitos, debido que proporciona un procedimiento además de sistemática.

3.2. MÉTODOS EMPLEADOS EN LA INVESTIGACIÓN

3.2.1. Método Deductivo: Nos ha permitido comprobar ejercicios sobre casos especiales de los resultados obtenidos.

3.2.2. Método Inductivo: Partimos de casos mostrados en $\Omega = \Omega$, podemos generalizar los resultados para $\Omega'' = \Omega$.

3.2.3. Método Hipotético – Deductivo: Por medio de la conceptualización de la hipótesis y mediante métodos deductivos se demostró la existencia y unicidad de la ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos, que es motivación de la investigación.

3.3. METODOLOGÍA PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

En la comprobación de la existencia para la resolución de una ecuación diferencial unidimensional de tipo elíptico, se consideró un modelo

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2\right) + Q(x)u = f(x) ; 0 < x < L \\ \left|\frac{du(0)}{dx}\right| = q \\ k(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 \Big|_{x=L} = p \end{cases}$$

Mientras que en la unicidad fue el resultado de considerar dos soluciones que satisficieran la ecuación diferencial unidimensional de tipo elíptico.

3.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Análisis Documental: Propició analizar, e interpretar la información patentada por otros investigadores en publicaciones científicas: impresas y electrónicas.	Fichas textuales.
Método Deductivo	Demostración.

3.5. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para ejecutar la presente investigación, se implementaron los siguientes procesos

3.5.1. Variables, definición conceptual y operacional: Por la naturaleza de la investigación es necesario el manejo de las variables de estudio del presente proyecto de investigación son:

Variables	Operacionalización
Variable independiente: Método de elementos finitos	Dado que no es conveniente realizar mediciones o procesamientos de datos estadísticos, operacionalizamos las variables con diversos métodos, teoremas y herramientas matemáticas, para así elaborar nuestra metodología de estudio.
Variable dependiente: Problema unidimensional de tipo elíptico	

3.6. PROCEDIMIENTO DE LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Se emplearon variedad de técnicas lógicas: Inducción, Deducción, Análisis y Síntesis en la recolección de datos para así obtener información destacada.

3.7. OBSERVACIONES Y/O DIFICULTADES: Presentamos algunas dificultades y/o debilidades para ejecutar el trabajo

*) No se encuentra trabajos prácticos realizados que puedan guiar la mejor comprensión del trabajo realizar.

*) Además no se trabaja con procesos de datos estadísticos.

*) El presente trabajo de investigación está enfocada a proponer soluciones aproximadas empleando elementos finitos, a su vez se le aplicará mejoras sucesivas.

CAPÍTULO IV

Resultados y Discusión

4.1. RESULTADOS

Los resultados del presente trabajo de investigación, se obtuvo después de ejecutar la metodología de investigación sugerida anteriormente en el proyecto, del cual partimos:

En el siguiente modelo:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \right) + Q(x)u = f(x) ; 0 < x < L \\ \left| \frac{du(0)}{dx} \right| = q \\ k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \Big|_{x=L} = p \end{cases}$$

Multiplicando por f e integrando en $\Omega^I = (x_1^I, x_3^I)$

$$\int_{\Omega^I} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \right) f(x) dx + \int_{\Omega^I} Q(x)u(x)f(x) dx = \int_{\Omega^I} f(x)f(x) dx$$

Integrando por partes

$$-k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 f(x) \Big|_{x_1^I}^{x_3^I} + \int_{\Omega^I} k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \frac{df}{dx} dx + \int_{\Omega^I} Q(x)u(x)f(x) dx = \int_{\Omega^I} f(x)f(x) dx$$

$$\int_{\Omega'} k(x) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \frac{df}{dx} dx + \int_{\Omega'} Q(x) u(x) f(x) dx = \int_{\Omega'} f(x) f(x) dx - k(x_1') \left| \frac{du(x_1')}{dx} \right|^2 f(x_1')$$

$$+ k(x_3') \left| \frac{du(x_3')}{dx} \right|^2 f(x_3')$$

Sean: $u(x) = u_1^l f_1^l(x) + u_2^l f_2^l(x) + u_3^l f_3^l(x)$ y $f = f_j^l$, $j=1,2,3$ Resulta:

$$\int_{\Omega'} k(x) \left| \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^3 u_i^l f_i^l(x) \right) \right|^2 \frac{df_j^l}{dx} + \int_{\Omega'} Q(x) \left(\sum_{i=1}^3 u_i^l f_i^l(x) \right) f_j^l(x) dx = \int_{\Omega^e} f(x) f_j^l(x) dx$$

$$+ k(x_3') \left| \frac{du(x_3')}{dx} \right|^2 f_j^l(x_3') - k(x_1') \left| \frac{du(x_1')}{dx} \right|^2 f_j^l(x_1')$$

Desarrollando la sumatoria:

$$\int_{\Omega'} k(x) \left[(u_1^l)^2 \left(\frac{df_1^l}{dx} \right)^2 + (u_2^l)^2 \left(\frac{df_2^l}{dx} \right)^2 + (u_3^l)^2 \left(\frac{df_3^l}{dx} \right)^2 + 2u_1^l u_2^l \frac{df_1^l}{dx} \frac{df_2^l}{dx} + 2u_1^l u_3^l \frac{df_1^l}{dx} \frac{df_3^l}{dx} \right.$$

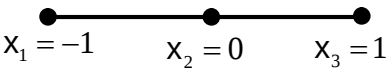
$$\left. + 2u_2^l u_3^l \frac{df_2^l}{dx} \frac{df_3^l}{dx} \right] \frac{df_j^l}{dx} dx + \int_{\Omega'} Q(x) [u_1^l f_1^l(x) + u_2^l f_2^l(x) + u_3^l f_3^l(x)] f_j^l(x) dx = \int_{\Omega^e} f(x) f_j^l(x) dx$$

$$+ k(x_3') \left| \frac{du(x_3')}{dx} \right|^2 f_j^l(x_3') - k(x_1') \left| \frac{du(x_1')}{dx} \right|^2 f_j^l(x_1')$$

Donde $j=1,2,3$ Además:

$$f_1^l(x) = \frac{(x-x_2^l)(x-x_3^l)}{(x_1^l-x_2^l)(x_1^l-x_3^l)} ; f_2^l(x) = \frac{(x-x_1^l)(x-x_3^l)}{(x_2^l-x_1^l)(x_2^l-x_3^l)} \text{ y } f_3^l(x) = \frac{(x-x_1^l)(x-x_2^l)}{(x_3^l-x_1^l)(x_3^l-x_2^l)}$$

Haciendo el cambio de coordenadas:

$$x = \frac{2(x-x_2^l)}{L^l}$$


$$\begin{cases} N_1^l(x) = f_1^l(x) = \frac{x(x-1)}{2} & ; x = \frac{L}{2n}(x+2), n=2, L=4 \\ N_2^l(x) = f_2^l(x) = (1-x)(1+x) & ; k(x) = x, Q(x) = 1 \\ N_3^l(x) = f_3^l(x) = \frac{x(x+1)}{2} \end{cases}$$

Además: $\frac{dN_1^l}{dx} = x - \frac{1}{2} ; \frac{dN_2^l}{dx} = -2\left(x - \frac{1}{2}\right); \frac{dN_3^l}{dx} = x + \frac{1}{2}$

La nueva expresión es:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 k(x) \left[(u_1^l)^2 \left| \frac{dN_1^l}{dx} \right|^2 \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 + (u_2^l)^2 \left| \frac{dN_2^l}{dx} \right|^2 \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 + (u_3^l)^2 \left| \frac{dN_3^l}{dx} \right|^2 \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 + 2u_1^l u_2^l \frac{dN_1^l}{dx} \frac{dN_2^l}{dx} \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2u_1^l u_3^l \frac{dN_1^l}{dx} \frac{dN_3^l}{dx} \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 + 2u_2^l u_3^l \frac{dN_2^l}{dx} \frac{dN_3^l}{dx} \left(\frac{2}{L^l} \right)^2 \right] \frac{dN_j^l}{dx} dx + Q(x) [u_1^l N_1^l(x) + u_2^l N_2^l(x) + \\ & + u_3^l N_3^l(x)] N_j^l(x) \left(\frac{L^l}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 f(x) N_j^l(x) \frac{L^l}{2} dx + k(x_3^l) \left| \frac{du(x_3^l)}{dx} \right|^2 f_j^l(x_3^l) - k(x_1^l) \left| \frac{du(x_1^l)}{dx} \right|^2 f_j^l(x_1^l) \end{aligned}$$

Para $j=1$

$$\begin{aligned} & (u_1^l)^2 \int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_1^l}{dx} \right)^3 dx + (u_2^l)^2 \int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_2^l}{dx} \right)^2 \frac{dN_1^l}{dx} dx + (u_3^l)^2 \int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_3^l}{dx} \right)^2 \frac{dN_1^l}{dx} dx + \\ & + 2u_1^l u_2^l \int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_1^l}{dx} \right)^2 \frac{dN_2^l}{dx} dx + 2u_1^l u_3^l \int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_1^l}{dx} \right)^2 \frac{dN_3^l}{dx} dx + 2u_2^l u_3^l \int_{-1}^1 k(x) \frac{dN_1^l}{dx} \frac{dN_2^l}{dx} \frac{dN_3^l}{dx} dx + \\ & + u_1^l \left(\frac{L^l}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 Q(x) (N_1^l(x))^2 dx + u_2^l \left(\frac{L^l}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 Q(x) N_1^l(x) N_2^l(x) dx + u_3^l \left(\frac{L^l}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 Q(x) N_1^l(x) N_3^l(x) dx \\ & = \left(\frac{L^l}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 f(x) N_1^l(x) dx + \left(\frac{L^l}{2} \right)^2 \left[k(x_3^l) \left| \frac{du(x_3^l)}{dx} \right|^2 f_1^l(x_3^l) - k(x_1^l) \left| \frac{du(x_1^l)}{dx} \right|^2 f_1^l(x_1^l) \right] \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
& (u_1')^2 \int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^3 dx + (u_2')^2 \int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_2'}{dx} \right)^2 \frac{dN_1'}{dx} dx + (u_3')^2 \int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_3'}{dx} \right)^2 \frac{dN_1'}{dx} dx + \\
& + 2u_1' u_2' \int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^2 \frac{dN_2'}{dx} dx + 2u_1' u_3' \int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^2 \frac{dN_3'}{dx} dx + 2u_2' u_3' \int_{-1}^1 x \frac{dN_1'}{dx} \frac{dN_2'}{dx} \frac{dN_3'}{dx} dx + \\
& + u_1' \left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 (N_1')^2 dx + u_2' \left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 N_1' N_2' dx + u_3' \left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 N_1' N_3' dx = \\
& = \left(\frac{L'}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 f(x) N_1'(x) dx + \left(\frac{L'}{2} \right)^2 \left[k(x_3') \left| \frac{du(x_3')}{dx} \right|^2 f_1'(x_3') - k(x_1') \left| \frac{du(x_1')}{dx} \right|^2 f_1'(x_1') \right]
\end{aligned}$$

Para $j = 2$ y $j = 3$ de calcula de manera similar. Por otro lado, se procede a evaluar cada una de las integrales:

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^3 dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 dx = \frac{9}{10}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_2'}{dx} \right)^2 \frac{dN_1'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{36}{10}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_3'}{dx} \right)^2 \frac{dN_1'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{14}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^2 \frac{dN_2'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] dx = -\frac{18}{10}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^2 \frac{dN_3'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{14}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_1^l}{dx} \frac{dN_2^l}{dx} \frac{dN_3^l}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right) \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{28}{60}$$

$$\int_{-1}^1 \left(N_1^l \right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x(x-1)}{2} \right]^2 dx = \frac{1}{60}$$

$$\int_{-1}^1 N_1^l N_2^l dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x-1)}{2} (x+1)(1-x) dx = \frac{2}{15}$$

$$\int_{-1}^1 N_1^l N_3^l dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x-1)}{2} \frac{x(x+1)}{2} dx = -\frac{1}{15}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) N_1^l dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - x \right) \frac{x(x-1)}{2} dx = \frac{1}{6}$$

$$k(x_3^l) = x_3^l - 2 = 1; k(x_1^l) = x_1^l - 2 = -1; f_1^l(x_3^l) = 0; f_1^l(x_1^l) = 1$$

Consecuentemente:

$$\frac{9}{10} \left(u_1^l \right)^2 + \frac{36}{10} \left(u_2^l \right)^2 + \frac{14}{60} \left(u_3^l \right)^2 + 2u_1^l u_2^l \left(-\frac{18}{10} \right) + 2u_1^l u_3^l \left(\frac{14}{60} \right) + 2u_2^l u_3^l \left(-\frac{28}{60} \right) + u_1^l \left(\frac{1}{60} \right)$$

$$+ u_2^l \left(\frac{2}{15} \right) + u_3^l \left(-\frac{1}{15} \right) = \frac{1}{6} + \left| \frac{du(0)}{dx} \right|^2 = \frac{1}{6} + q^2 = L_1^l$$

Para $j = 2$

$$\int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_1^l}{dx} \right)^2 \frac{dN_2^l}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] dx = -\frac{18}{10}$$

$$\int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_2^l}{dx} \right)^3 dx = \int_{-1}^1 x \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^3 dx = -\frac{72}{10}$$

$$\int_{-1}^1 k(x) \left(\frac{dN_3'}{dx} \right)^2 \frac{dN_2'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] dx = -\frac{28}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_1'}{dx} \left(\frac{dN_2'}{dx} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right) \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] dx = \frac{36}{10}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_1'}{dx} \frac{dN_2'}{dx} \frac{dN_3'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{28}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_2'}{dx} \right)^2 \frac{dN_3'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{28}{15}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 N_1' N_2' dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x-1)}{2} (1-x)(1+x) dx = \frac{4}{60}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 (N_2')^2 dx = \int_{-1}^1 (1-x)^2 (1+x)^2 dx = \frac{16}{15}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right) \int_{-1}^1 N_3' N_2' dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x+1)}{2} (1-x)(1+x) dx = \frac{4}{60}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) N_1' dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - x \right) (1-x^2) dx = -\frac{1}{3}$$

Para $j=3$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_1'}{dx} \right)^2 \frac{dN_3'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{14}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_2'}{dx} \right)^2 \frac{dN_3'}{dx} dx = \int_{-1}^1 x \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{56}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \left(\frac{dN_3^l}{dx} \right)^3 dx = \int_{-1}^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right)^3 dx = \frac{9}{10}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_1^l}{dx} \frac{dN_2^l}{dx} \frac{dN_3^l}{dx} dx = -\frac{28}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_1^l}{dx} \left(\frac{dN_3^l}{dx} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 x \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{14}{60}$$

$$\int_{-1}^1 x \frac{dN_2^l}{dx} \left(\frac{dN_3^l}{dx} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 x \left[-2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx = -\frac{28}{60}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 N_1^l N_3^l dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x-1)}{2} \frac{x(x+1)}{2} dx = -\frac{4}{60}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 N_2^l N_3^l dx = \int_{-1}^1 (1-x)(1+x) \frac{x(x+1)}{2} dx = \frac{4}{60}$$

$$\left(\frac{L}{2n} \right)^3 \int_{-1}^1 \left(N_3^l \right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x(x+1)}{2} \right]^2 dx = \frac{31}{60}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) N_3^l dx = -\frac{1}{3}$$

$$k(x_1^l) \left| \frac{du(x_1^l)}{dx} \right|^2 f_1^l(x_1^l) = k(x_1^l) \left| \frac{du(x_1^l)}{dx} \right|^2 = p_1^l$$

$$k(x_3^l) \left| \frac{du(x_3^l)}{dx} \right|^2 f_3^l(x_3^l) = k(x_3^l) \left| \frac{du(x_3^l)}{dx} \right|^2 = p_3^l$$

Por lo tanto:

$$\frac{9}{10}(u_1')^2 + \frac{36}{10}(u_2')^2 + \frac{14}{60}(u_3')^2 + 2u_1' u_2' \left(-\frac{18}{10}\right) + 2u_1' u_3' \left(\frac{14}{60}\right) + 2u_2' u_3' \left(-\frac{28}{60}\right) + u_1' \left(\frac{1}{60}\right)$$

$$+ u_2' \left(\frac{8}{60}\right) + u_3' \left(-\frac{4}{60}\right) = \frac{1}{6} + q^2 > 0$$

$$\frac{18}{10}(u_1')^2 + \frac{72}{10}(u_2')^2 + \frac{9}{10}(u_3')^2 + 2u_1' u_2' \left(-\frac{28}{60}\right) + 2u_1' u_3' \left(\frac{14}{60}\right) + 2u_2' u_3' \left(-\frac{28}{60}\right) - \frac{4}{60} u_1'$$

$$- \frac{16}{15} u_2' - \frac{4}{60} u_3' = \frac{1}{3}$$

$$\frac{14}{60}(u_1')^2 + \frac{56}{10}(u_2')^2 + \frac{9}{10}(u_3')^2 + 2u_1' u_2' \left(-\frac{28}{60}\right) + 2u_1' u_3' \left(\frac{14}{60}\right) + 2u_2' u_3' \left(-\frac{28}{60}\right) - \frac{4}{60} u_1'$$

$$+ \frac{4}{60} u_2' + \frac{31}{60} u_3' = -\frac{1}{3} + p_3' > 0$$

Ecuación 1:
$$\begin{cases} u_1 = w_1 + L_1 \\ u_2 = w_2 + L_2 \\ u_3 = w_3 + L_3 \end{cases}$$

Considerando los términos:

$$\frac{9}{10}(2w_1 h_1 + h_1^2) + \frac{36}{10}(2w_2 h_2 + h_2^2) + \frac{14}{60}(2w_3 h_3 + h_3^2) + 2\left(-\frac{18}{10}\right)(w_1 h_2 + w_2 h_1 + h_1 h_2) +$$

$$2\left(\frac{14}{60}\right)(w_1 h_3 + w_3 h_1 + h_2 h_3) + 2\left(-\frac{28}{60}\right)(w_2 h_2 + w_3 h_2 + w_3 h_3) + \frac{1}{60}(w_1 + h_1) + \frac{8}{60}(w_2 + h_2)$$

$$- \frac{4}{60}(w_3 + h_2) = \frac{1}{6} - q^2$$

Agrupando términos lineales: $w_1; w_2; w_3$

$$\begin{cases} w_1(\frac{9}{5}h_1 - \frac{18}{5}h_2 + \frac{7}{15}h_3 + \frac{1}{6}) = 0 \\ w_2(\frac{36}{5}h_2 - \frac{18}{5}h_1 - \frac{7}{15}h_3 + \frac{8}{60}) = 0 \\ w_3(\frac{7}{15}h_3 + \frac{7}{15}h_1 - \frac{7}{15}h_2 - \frac{1}{15}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0,9167 \\ h_2 = 0,4167 \\ h_3 = -0,3571 \end{cases}$$

Luego la ecuación 1 es equivalente a: Con q escogido convencionalmente de modo que:

$$\frac{9}{10}w_1^2 + \frac{18}{5}w_2^2 + \frac{7}{30}w_3^2 - \frac{18}{5}w_1w_2 + \frac{7}{15}w_1w_3 - \frac{7}{15}w_2w_3 = -1,2$$

$$\text{Ecuación 2: } \begin{cases} u_1 = w_1 + h_1 \\ u_2 = w_2 + h_2 \\ u_3 = w_3 + h_3 \end{cases}$$

Considerando los términos lineales:

$$\begin{aligned} & \frac{9}{5}(2w_1h_1 + h_1^2) + \frac{36}{5}(2w_2h_2 + h_2^2) + \frac{9}{10}(2w_3h_3 + h_3^2) + 2(-\frac{28}{60})(w_1h_2 + w_2h_1 + h_1h_2) + \\ & -\frac{4}{60}(w_1 + h_2) - \frac{16}{15}(w_2 + h_2) - \frac{4}{60}(w_3 + h_3) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Agrupando términos $w_1; w_2; w_3$

$$\begin{cases} w_1(\frac{18}{5}h_1 - \frac{14}{15}h_2 + \frac{7}{15}h_3 - \frac{1}{15}) = 0 \\ w_2(\frac{72}{5}h_2 - \frac{7}{15}h_1 - \frac{7}{15}h_3 + \frac{16}{15}) = 0 \\ w_3(\frac{9}{5}h_3 - \frac{7}{15}h_1 - \frac{7}{15}h_2 - \frac{1}{15}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0,301 \\ h_2 = 0,0772 \\ h_3 = 0,0648 \end{cases}$$

Luego la ecuación 2 es:

$$\frac{9}{5}w_1^2 + \frac{36}{5}w_2^2 + \frac{9}{10}w_3^2 + 2(-\frac{28}{60})w_1w_2 + 2(\frac{14}{60})w_1w_3 + 2(-\frac{28}{60})w_2w_3 = 10$$

Ecuación 3:
$$\begin{cases} u_1 = w_1 + h_1 \\ u_2 = w_2 + h_2 \\ u_3 = w_3 + h_3 \end{cases}$$

Considerando los términos lineales:

$$\begin{aligned} & \frac{14}{60}(2w_1h_1 + h_1^2) + \frac{56}{10}(2w_2h_2 + h_2^2) + \frac{9}{10}(2w_3h_3 + h_3^2) - 2\left(\frac{28}{60}\right)(w_1h_2 + w_2h_1 + h_1h_2) + \\ & -\frac{4}{60}(w_1 + h_1) + \frac{4}{60}(w_2 + h_2) + \frac{31}{60}(w_3 + h_3) = -\frac{1}{3} + p_3 \end{aligned}$$

Agrupando términos $w_1; w_2; w_3$

$$\begin{cases} w_1\left(\frac{28}{5}h_1 - \frac{28}{30}h_2 + \frac{28}{60}h_3 - \frac{1}{60}\right) = 0 \\ w_2\left(\frac{56}{5}h_2 - \frac{25}{30}h_1 - \frac{28}{30}h_3 + \frac{4}{60}\right) = 0 \\ w_3\left(\frac{9}{5}h_3 + \frac{14}{30}h_1 - \frac{28}{30}h_2 + \frac{31}{60}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0,5946 \\ h_2 = 0,0071 \\ h_3 = -0,4375 \end{cases}$$

Para $l=1;2$ Haciendo: $v_1^l = (u_1^l)^2$, $v_2^l = (u_2^l)^2$, $v_3^l = (u_3^l)^2$

Luego de una traslación y rotación respectivamente se obtiene:

$$\begin{cases} \bar{I}_1^l v_1^l + \bar{I}_2^l v_2^l + \bar{I}_3^l v_3^l = \frac{1}{6} + q^2 \\ \hat{I}_1^l v_1^l + \hat{I}_2^l v_2^l + \hat{I}_3^l v_3^l = -\frac{1}{3} + p_3^l > 0 \end{cases}$$

El ensamblaje se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_1^1 &= v_1 \\ v_2^1 &= v_2 = v_1^2 \\ v_3^1 &= v_3 = v_2^2 \\ v_4 &= v_3^2 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_3^1 + b_2^2 \\ b_3^2 \end{bmatrix}}_B$$

La matriz de ensamblaje que da expresado como: $K v = B$

Donde: $b_1^1 = \frac{1}{6} + q^2$

$$b_2^1 + b_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + q^2 = \frac{1}{2} + q^2$$

$$b_3^1 + b_2^2 = (p_3^1)^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = (p_3^1)^2 = \left| \frac{du(x_3^1)}{dx} \right|^2$$

$$b_3^2 = (p_3^2)^2 - \frac{1}{3} = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{3} > 0$$

$$b_3^1 = -\frac{1}{3} + \left| \frac{du(x_3^1)}{dx} \right|^2$$

$$b_3^2 = -\frac{1}{3} + \left| \frac{du(x_3^2)}{dx} \right|^2 = \left| \frac{du(L)}{dx} \right|^2 - \frac{1}{3} = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{3}$$

$$k(L) \left| \frac{du(L)}{dx} \right|^2 = p \Rightarrow \left| \frac{du(L)}{dx} \right|^2 = \frac{p}{k(L)} = \frac{p}{L-2} = \frac{p}{2}, \quad L = 4$$

Usando Matlab, se resuelve el sistema $k v = B$

4.2. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

De acuerdo con el objetivo general afirmar que existirá y es única la solución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos, y así aplicar este método en algunos ejercicios de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico usando Elementos Finitos para obtener una solución de manera óptima, por lo cual se puede verificar el objetivo general.

CAPÍTULO V

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. CONCLUSIONES

5.1.1. La existencia en la resolución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico empleando Elementos Finitos en el sucesivo Modelo No Lineal de la forma:

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + F(u) = f(x)$$

Sujeto a condiciones de entorno.

5.1.2. La unicidad en la resolución de una ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico empleando Elementos Finitos en el siguiente Modelo No Lineal de la forma dada.

5.1.3. El método de elementos finitos nos permite determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales unidimensionales del tipo elíptico, utilizando la discretización de la ecuación diferencial.

5.2. RECOMENDACIONES

Se recomienda emular la experiencia, pero trabajando en la solución de problemas de 2 y mas dimensiones de tipo elíptico, empleando elementos finitos para otras propuestas de solución. Asimismo, se sugiere:

- 5.2.1. Que el presente trabajo de investigación permitirá desarrollar posteriores investigaciones haciendo uso de Elementos Finitos para solucionar problemas unidimensionales de tipo Elíptico
- 5.2.2. Además, permite extender el uso de los Elementos Finitos y aplicarlos para la resolución de problemas unidimensionales de tipo elíptico en diferentes situaciones que involucren equilibrio o fenómenos estacionarios en una dimensión. Esta variedad de problemas se puede encontrar en la conducción de calor, la mecánica de fluidos, la elasticidad y la electrostática.
- 5.2.3. Debido al avance tecnológico es posible obtener la solución a una aplicación de la ecuación diferencial unidimensional del tipo elíptico mediante el método de elementos finitos utilizando programas computacionales en Matlab que nos permitiría acelerar los procesos y a visualizar geométricamente nuestros resultados.
- 5.2.4. Utilizar como guía para los estudiantes de la Carrera Profesional de Matemáticas e Ingenierías, donde se desarrolle el tema de Ecuaciones diferenciales unidimensionales de tipo Elíptico por elementos finitos.
- 5.2.5. Continuar con la aplicación del método de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones diferenciales unidimensionales del tipo elíptico.

Referencias Bibliográficas

- [1] Johnson, C. (2012). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation.
- [2] Llanos Sánchez, A. (2013). *Desarrollo y aplicación de un modelo de elementos finitos para cálculo de vigas con materiales compuestos laminados basado en la teoría de Timoshenko* [Tesis de maestría, Universidad no especificada].
- [3] Ferziger, J. H., y Perić, M. (2002). Solution of the Navier-Stokes equations. En *Computational methods for fluid dynamics* (pp. 157–216). Springer Berlin Heidelberg.
- [4] Strang, G., y Fix, G. J. (1973). *An analysis of the finite element method* (Vol. 212). Prentice-Hall.
- [5] Shames, I. (1995). *Mecánica de fluidos* (Edición no especificada). [Editorial no especificada].
- [6] Thomas, J. W. (2013). *Numerical partial differential equations: finite difference methods* (Vol. 22). Springer Science y Business Media.
- [7] Dantray, R., y Lions, J. L. (2000). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology* (Vol. 2). [Editorial no especificada].
- [8] Ciarlet, P. G. (2002). *The finite element method for elliptic problems* (Vol. 40). Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [9] LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems* (Vol. 98). Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [10] Antón Mayoral, J. (2012). *Simulación numérica de interacción fluido-estructura* [Tesis de maestría, Universidad no especificada].
- [11] Nigro, N. (1993). *Resolución por elementos finitos de problemas de mecánica de fluidos*. [Editorial o institución no especificada].
- [12] Morales, H., y Cortez, M. (2016). Existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico. *Agroindustrial Science*, 5(2), 161–165.
<https://doi.org/10.17268/agroind.science.2016.02.09> (si conoces el DOI o enlace, reemplaza este placeholder)

- [13] Obidio Rubio, M. (1999). *Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales y dinámica de fluidos computacional*. [Editorial o institución no especificada].
- [14] Obidio Rubio, M. (2007). *El método del elemento finito*. [Editorial o institución no especificada].