UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSGRADO

Programa de Doctorado en Matemática

Soluciones positivas para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y con valores en la frontera

Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática

Autor:
Ms. C. Yglesias Jáuregui, Miguel Ángel
Código Orcid: 0000-0003-3094-4582
DNI Nº 18148367

Asesor:
Dr. Cortez Gutierrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de Investigación
Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025

ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA", por el maestro Miguel Ángel Yglesias Jáuregui, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, junio del 2025.

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"Soluciones Positivas para un Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden y con Valores en la Frontera"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

....
DR. HERÓN JUAN MORALES MARCHENA
PRESIDENTE
CODIGO ORCID: 0000-0002-5394-0958
DNI N° 32837715

....
DR. JULIO ANTONIO LECCA VERGARA
SECRETARIO
CODIGO ORCID: 0000-0001-5402-8453
DNI N° 17845785

....
DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ
VOCAL
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los veinticinco días del mes de junio del año 2025, siendo las 13 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral Nº 417-2025-EPG-UNS de fecha 01.04.2025, conformado por los docentes: Dr. Herón Juan Morales Marchena (Presidente), Dr. Julio Antonio Lecca Vergara (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada: ***"SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA";*** presentado por el tesista **Miguel Ángel Yglesias Jáuregui,** egresado del programa de Doctorado en Matemática.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 595-2025-EPG-UNS de fecha 19 de junio de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como Aprobado, asignándole la calificación de Bueno (18).

Siendo las 1.30 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Herón Juan Morales Marchena
Presidente

Dr. Julio Antonio Lecca Vergara
Secretario

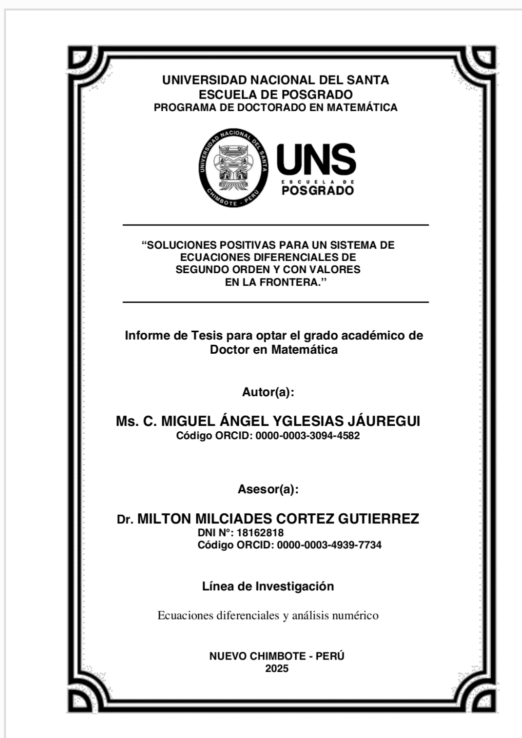
Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
Vocal/Asesor

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI
Título del ejercicio:	Tesis
Título de la entrega:	SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES D...
Nombre del archivo:	TESIS_.pdf
Tamaño del archivo:	593.12K
Total páginas:	64
Total de palabras:	15,172
Total de caracteres:	59,770
Fecha de entrega:	21-mar.-2025 05:38p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega:	2621422825


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA

UNS POSGRADO

"SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA."

Informe de Tesis para optar el grado académico de Doctor en Matemática

Autor(a):

Ms. C. MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI
Código ORCID: 0000-0003-3094-4582

Asesor(a):

Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ
DNI N°: 18162818
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734

Línea de Investigación

Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

NUEVO CHIMBOTE - PERÚ
2025

SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA.

INFORME DE ORIGINALIDAD

20%	18%	9%	4%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	8%
2	1library.co Fuente de Internet	1%
3	Castillo Neciosup, David Guillermo. "Simulación Unidimensional del Comportamiento Dinámico de Una tubería Horizontal Biempotrada Que Transporta Flujo bifásico Gas - líquido Usando un Modelo homogéneo.", Pontificia Universidad Catolica del Peru (Peru), 2024 Publicación	<1%
4	Infante, Gennaro, and Paolamaria Pietramala. "Multiple nonnegative solutions of systems with coupled nonlinear boundary conditions : G. INFANTE AND P. PIETRAMALA", Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013. Publicación	<1%
5	www.worldacademicunion.com Fuente de Internet	<1%
6	Mengyan Cui, Yuke Zhu, Huihui Pang. "Existence and uniqueness results for a coupled fractional order systems with the multi-strip and multi-point mixed boundary	<1%

DEDICATORIA

Dedico esta Tesis a toda mi familia, muy en especial, para mi madre Luz Margarita, por la guía, sus oraciones y sus enseñanzas que me condujeron a encarar las adversidades con rectitud. Para mi amada esposa Liszeth Paola, por su amor, paciencia, comprensión, empeño y motivación para conseguir la realización de esta tesis. Para mis amados Hijos, Cristina, Samin y Estefania, quienes son el motor y la motivación que me impulsan a seguir creciendo en todos los aspectos personales. A mis queridos hermanos, mis tíos Washington y Elva, mis amigos, a todos ellos, muchas gracias.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por concederme la vida y la sabiduría que han conducido a formarme como profesional y la persona que soy. Agradezco a la Universidad Nacional del Santa por la oportunidad que me ha dado para seguir mis estudios de Doctorado en Matemática, así mismo, agradecer a mi asesor el Doctor Milton Milciades Cortez Gutiérrez, por su paciencia, guía y su invalorable apoyo en la conclusión del presente trabajo de Tesis. Por otro lado, agradezco a todos mis colegas de promoción del Programa Doctoral por el ánimo en cada actividad de estudio y a la Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja de la cual soy parte, por las facilidades concedidas.

Índice General

Resumen

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, son sistemas dinámicos que permiten abordar problemas muy diversos; en los que concierne a la existencia y unicidad de soluciones positivas, permiten desenrollar diferentes métodos que puedan dar con la solución determinística o realizar su simulación que demuestra su comportamiento geométrico o aplicar técnicas de aproximación. Uno de los problemas de estudio del cual se han obtenido varios resultados, es el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, los cuales han demostrado la existencia de soluciones positivas, en función a las características impuestas a las condiciones de frontera. De este modo, el presente trabajo de investigación tiene por objeto analizar la existencia y unicidad de una solución positiva para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y con valores en la frontera, precisamente de la forma:

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x'(t) + b_1(t)x(t) + f_1(t, x(t), y(t)) = 0, t \in (0,1) \\ y''(t) + a_2(t)y'(t) + b_2(t)y(t) + f_2(t, x(t), y(t)) = 0, t \in (0,1) \end{cases}$$

con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} &x(0) = \int_0^1 y(t)d\alpha(t), \quad y(0) = \int_0^1 x(t)d\beta(t) \\ &x(1) = 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$

Donde $a_i, b_i, i = 1, 2$ son funciones de $L^1(0,1), f_1, f_2$ funciones en $C^0((0,1)\times\ [0,+\infty) \times (0,+\infty))$ y $C^0((0,1) \times (0,+\infty) \times [0,+\infty))$. Para obtener el resultado, se hace uso de un teorema de punto fijo sobre un cono de un espacio de Banach.

Palabras clave: soluciones positivas, sistema de ecuaciones diferenciales, solución fundamental, condiciones de contorno acopladas, teoremas de existencia.

Abstract

Systems of nonlinear ordinary differential equations are dynamic systems that allow us to address very diverse problems; those referring to the existence and uniqueness of positive solutions allow the development of different methods that can provide the deterministic solution or simulate it to show its geometric behavior or apply approximation techniques. One of the problems studied for which various results have been obtained is the system of two ordinary second-order differential equations, in which the existence of positive solutions has been demonstrated, depending on the characteristics imposed on the boundary conditions. Thus, the purpose of this research work is to analyze the existence and uniqueness of a positive solution for a system of differential equations of second order and with boundary conditions, precisely of the form:

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x'(t) + b_1(t)x(t) + f_1(t, x(t), y(t)) = 0, t \in (0, 1) \\ y''(t) + a_2(t)y'(t) + b_2(t)y(t) + f_2(t, x(t), y(t)) = 0, t \in (0, 1) \end{cases}$$

and the boundary conditions given by

$$\begin{aligned} &x(0) = \int_0^1 y(t)d\alpha(t), \quad y(0) = \int_0^1 x(t)d\beta(t) \\ &x(1) = 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$

Where $a_i, b_i, i = 1, 2$ are functions of $L^1(0, 1)$ and f_1, f_2 belong to the space of continuous functions $C^0((0, 1) \times [0, +\infty) \times (0, +\infty))$ and $C^0((0, 1) \times (0, +\infty)\times [0, +\infty))$ respectively. To obtain the result, we used a fixed point theorem applied on a cone of a Banach space.

Keywords: positive solutions, system of differential equations, fundamental solution, coupled boundary conditions, existence theorems.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de Investigación intitulado **"SOLUCIONES POSITIVAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA"** se trata de analizar la existencia y unicidad de una solución positiva para el sistema (1)-(3).

Naturalmente, el análisis de dicho sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, está basado fuertemente en el análisis no lineal de problemas en conos abstractos de un espacio de Banach.

Inicialmente se desarrolla el Capítulo I, en la que se trata del problema de investigación, es decir su planteamiento así como su formulación. Ya en el Capítulo II, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, en el cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

Así mismo, en el Capítulo III, se trata del Marco Metodológico, la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas. Cabe resaltar que la ciencia usa herramientas matemáticas que facilitan la existencia y unicidad de solución para problemas que modelan los sistemas de ecuaciones diferenciales. Para el trabajo de Investigación en mención se asocia un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el que se le expresa de forma mas simple de analizar.

En el Capítulo IV, se realiza el desarrollo de los resultados y discusión del trabajo de investigación. Finalmente, el Capítulo V, se logra obtener las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior, además se brinda algunas sugerencias del trabajo de investigación para futuros estudios posteriores.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación se analiza un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, en lo que concierne a la existencia de soluciones positivas y además la unicidad de solución. Evidentemente, a partir de allí se puede desenvolver diferentes métodos que puedan dar con la solución determinística o realizar su simulación que demuestra su comportamiento geométrico o aplicar técnicas de aproximación. Uno de los problemas de estudio del cual se han obtenido varios resultados, es el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto del cual varios investigadores como Asif et al. (2010), Asif y Khan (2012), han demostrado la existencia de soluciones positivas, según las características impuestas a las condiciones de contorno (o de frontera). En ese sentido, la investigación consiste en considerar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x'(t) + b_1(t)x(t) + f_1(t, x(t), y(t)) = 0, & t \in (0,1) \\ y''(t) + a_2(t)y'(t) + b_2(t)y(t) + f_2(t, x(t), y(t)) = 0, & t \in (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

con las condiciones de frontera:

$$x(0) = \int_0^1 y(t)d\alpha(t), \quad y(0) = \int_0^1 x(t)d\beta(t) \tag{2}$$

$$x(1) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{3}$$

Donde α y β son continuas por la derecha en $t = 0$, continuas por la izquierda en $t = 1$, y no decrecientes sobre $[0, 1]$, con $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, donde $\int u(s)d\alpha(s)$ y $\int u(s)d\beta(s)$ denotan integrales del Riemann Stieltjes de u con respecto a α y β, además, $f \in C((0, 1) \times [0, +\infty) \times$

$(0,+\infty),[0,+\infty))$, $g \in C((0,1)\times(0,+\infty)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$.

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

El área de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias tuvo un intenso estudio a mediados del siglo XIX, con aplicaciones a la mecánica, Biología, etc., el crecimiento incesante de la ciencia, motivó el estudio de tales sistemas. El problema de investigación consiste en demostrar la existencia de soluciones positivas de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden dados por la relaciones (1)-(3). Desde el punto de vista aplicativo es importante encontrar valores positivos de las soluciones, puesto que denotan cantidades significativas del mundo real, tal como se aprecia en los modelos de Lodka-Volterra, movimientos armónicos, etc.

1.2 Antecedentes de la investigación

En los últimos años, se tiene muchas investigaciones respecto de las soluciones positivas para sistemas de ecuaciones diferenciales singulares de la forma:

$$\begin{aligned} -x''(t) &= f(t,x(t),y(t)) \\ -y''(t) &= g(t,x(t),y(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

donde las condiciones de contorno mantienen algunas características de acuerdo a las cuales se han estudiado sus soluciones (Lü et al., 2005; Liu et al., 2008; Asif et al., 2010). Por ejemplo, Lii et al. (2005) encontraron que mediante el uso del teorema del punto fijo de expansión y compresión del cono, se demuestra la existencia de múltiples soluciones positivas para problemas de valores en la frontera singulares de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} &u^{(4)} = f(t,v), \quad (t,v)\in\langle 0,1\rangle\times\mathbb{R}^+ \\ &-v''(t) = g(t,u), \quad (t,u)\in\langle 0,1\rangle\times\mathbb{R}^+ \\ &u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \\ &v(0)=v(1)=0 \end{aligned}$$

donde $f \in \mathrm{C}\left[\langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{+}\right]$, $g \in \mathrm{C}\left[\langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{+}\right]$, es decir, f y g son probablemente singulares en $t=0$ y $t=1$. Así también, Cheng y Zhong (2005), demuestran la existencia de soluciones positivas para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$\begin{cases} -u''=f_1(t,u(t))+h_1(u(t),v(t)), \quad 0<t<1 \\ -v''=f_2(t,v(t))+h_2(u(t),v(t)), \quad 0<t<1 \\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=0 \end{cases}$$

donde $f_i \in \mathrm{C}\left(I \times \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{+}\right), h_i \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{+}\right)$, para $i=1,2$ e $I=[0,1]$, en este caso los autores afirman que f_1 y h_1 son superlineales mientras que f_2 y h_2 son sublineales.

Liu et al. (2008) también trabajaron con soluciones positivas para atender problemas singulares de segundo orden de valor en la frontera de tres puntos, presentando soluciones positivas mediante la aplicación del teorema del índice de punto fijo bajo algunas condiciones más débiles con respecto al primer valor propio correspondiente al operador lineal asociado al problema:

$$\begin{aligned} & u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)+h(t)f(t,u)=0, \quad 0<t<1 \\ & u(0)=0, \quad u(1)=\alpha u(\eta) \end{aligned}$$

donde $h(t)$ puede que sea singular en $t=0$ y $t=1$, además, f puede ser singular en $u=0$.

Por su parte, Asif et al. (2010) mostraron algunos resultados sobre la existencia de soluciones positivas de clase C^1 para el siguiente sistema acoplado de dos puntos singulares en las condiciones de frontera

$$\begin{cases} -x''(t)=p(t)f\left(t,y(t),x'(t)\right), \quad t\in\langle 0,1\rangle \\ -y''(t)=q(t)g\left(t,x(t),y'(t)\right), \quad t\in\langle 0,1\rangle \\ a_1x(0)-b_1x'(0)=x'(1)=0 \\ a_2y(0)-b_2y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$$

donde las aplicaciones no lineales $f,g:[0,1]\times[0,+\infty\rangle\times\langle 0,+\infty\rangle\to[0,+\infty\rangle$ son continuas y pueden ser singulares en $x'=0$, $y'=0$, $p,q\in\mathrm{C}\langle 0,1\rangle$ son positivas sobre $\langle 0,1\rangle$ y las constantes a_1,a_2,b_1 y b_2 son reales.

Del mismo modo, Asif y Khan (2012) demuestran la existencia de soluciones positivas para un sistema singular no lineal de la forma (1) con condiciones de contorno acopladas de cuatro puntos del tipo:

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha y(\xi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = \beta y(\eta)$$

donde las aplicaciones no lineales $f, g : \langle 0, 1\rangle \times [0, +\infty\rangle \times [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ son continuas y singulares en $t = 0$ y $t = 1$, mientras los parámetros α, β, η satisfacen que $\xi, \eta \in \langle 0, 1\rangle$, $0 < \alpha\beta\xi\eta < 1$. En esta misma línea, también se tiene el trabajo de Cui y Sun (2012), quienes investigan la existencia de soluciones positivas para sistemas diferenciales de problemas de valores de contorno de integral acoplada superlineales y singulares de la forma:

$$\begin{cases} -x''(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in \langle 0, 1\rangle \\ -y''(t) = f_2(t, x(t), y(t)), \quad t \in \langle 0, 1\rangle \\ x(0) = y(0) \\ x(1) = \alpha[y] \\ y(1) = \beta[x] \end{cases}$$

donde $\alpha[x], \beta[x]$ son funcionales acotadas sobre $C[0, 1]$ dadas por

$$\alpha[x] = \int_0^1 x(t)dA(t), \quad \beta[x] = \int_0^1 x(t)dB(t)$$

siendo A y B funciones de variación acotada con medidas positivas.

El trabajo de Cui et al. (2013), está relacionado con la existencia de soluciones positivas para sistemas diferenciales singulares con problemas de valores de contorno de integral acoplada, en el cual se estudia el sistema de ecuaciones (4) pero con las condiciones (2) y (3), donde α y β son continuas por derecha en $t = 0$, continuas por izquierda en $t = 1$, y no decrecientes sobre $[0, 1]$, con $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Además, $\int_0^1 u(s)d\alpha(s)$ y $\int_0^1 u(s)d\beta(s)$ denotan las integrales de Riemann-Stieltjes de u con respecto a α y β respectivamente, así también,

$$f, g \in C(\langle 0, 1\rangle \times [0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle, [0, +\infty\rangle)$$

esto es, $f(t,x,y)$ puede ser singular en $t=0$, $t=1$ e $y=0$, y $g(t,x,y)$ puede ser singular en $t=0$, $t=1$ y $x=0$. Llegando a determinar que (4), sujeta a las condiciones de (2) y (3), tiene una única solución positiva (x^*,y^*), tal como lo demuestran Cuit et al. (2013).

Finalmente, Cui y Zou (2015) obtienen la unicidad de solución positiva para el sistema diferencial ordinario singular de segundo orden con condiciones de valor de frontera integrales acopladas

$$\begin{cases} -x''(t) = f(t,x(t)), \quad 0<t<1 \\ -y'' = g(t,y(t)), \quad 0<t<1 \\ x(0)=y(0)=0, \quad x(1) =\propto [y], \quad y(1)=\beta[x] \end{cases}$$

donde f y $g : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ son continuas y pueden ser singulares en $t=0$, $t=1$; $\alpha[x]$, $\beta[x]$ son funcionales acotadas sobre $C[0,1]$ dadas por:

$$\alpha[x] = \int_0^1 x(t)dA(t), \quad \beta[x] = \int_0^1 x(t)dB(t)$$

involucrando integrales de Stieltjes, en particular, A; B son funciones de variación acotada con medidas positivas. Esta investigación está basada en el trabajo de Cui et al. (2013), relacionado con la existencia de soluciones positivas para sistemas diferenciales singulares con problemas de valores de contorno de integral acoplada, en el cual se estudia el sistema de ecuaciones (4) pero con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} & x(0) = \textstyle\int_0^1 y(t)d\alpha(t), \quad y(0) = \int_0^1 x(t)d\beta(t) \\ & x(1)=y(1)=0 \end{aligned} \tag{5}$$

Donde α y β son continuas por derecha sobre $t=0$, continuas por izquierda en $t=1$, y no decrecientes sobre $[0,1]$, con $\alpha(0)=\beta(0)=0$. Además, $\int u(s)d\alpha(s)$ y $\int u(s)d\beta(s)$ denotan las integrales de Riemann-Stieltjes de u con respecto a α y β respectivamente, así también, $f,g \in C(\langle 0,1\rangle \times [0,+\infty\rangle \times \langle 0,+\infty\rangle, [0,+\infty\rangle)$, esto es, $f(t,x,y)$ puede ser singular en $t=0$, $t=1$ e $y=0$, y $g(t,x,y)$ puede ser singular en $t=0$, $t=1$ y $x=0$; llegando a determinar que (4), sujeta a las condiciones de (5), tiene una única solución positiva (x^*,y^*), tal como lo demuestran Cuit et al. (2013).

1.3 Formulación del problema de investigación

El presente trabajo de investigación consiste en: dado el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma (1) con las condiciones de frontera (2) y (3). ¿Existe solución positiva para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y con valores en la frontera de la forma (1)-(3)?

1.4 Delimitación del estudio

La investigación se encuentra dentro del contexto de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, específicamente en los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden, donde las funciones f_1 y f_2 de (1) pueden ser funciones singulares y las condiciones de contorno en $t = 0$ se dan mediante integrales acopladas. Por la naturaleza de la investigación, esta no tiene limitantes, temporales ni espaciales.

1.5 Justificación e importancia de la investigación

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden dentro del campo de las aplicaciones guardan conectividad con problemas de mecánica. Puesto que el problema de estudio (1) contiene términos de primer orden, este permitirá estudiar y simular las vibraciones de un sistema mecánico que contenga elementos de amortiguación. Asimismo, el hecho de trabajar problemas de valores de contorno con integrales acopladas, nos permitirá introducirnos en situaciones con casos que puedan tener ese tipo de modelación.

1.6 Objetivos de la investigación

1.6.1 Objetivo general

Determinar la existencia y unicidad de soluciones positivas para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y con valores en la frontera.

1.6.2 Objetivos específicos

(a) Caracterizar el sistema de ecuaciones diferenciales (1) y todos los elementos que intervienen en sus condiciones de contorno.

(b) Encontrar una transformación que permita llevar el sistema de ecuaciones diferenciales (1) a uno equivalente en la forma reducida.

(c) Aplicar los resultados de Cui et al. (2013), para estudiar las condiciones que deben cumplir f_1, f_2, α y β para luego demostrar la existencia y unicidad de soluciones positivas de (1)

(d) Consolidar los resultados en un teorema.

(e) Aplicar los resultados en un ejemplo práctico.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

La teoría matemática que se relaciona al problema de estudio tiene que ver con la existencia de soluciones positivas de sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales ordinarias singulares de segundo orden, donde las condiciones también presentan acoplamientos, como es (1) con (2) y (3).

Definición 1. *Según Cuit et al. (2013), una solución positiva del sistema de ecuaciones diferenciales (1) es*

$$(x, y) \in \big(\mathrm{C}[0,1] \cap \mathrm{C}^2\langle 0,1\rangle\big) \times \big(\mathrm{C}[0,1] \cap \mathrm{C}^2\langle 0,1\rangle\big)$$

donde (x, y) satisface (1) con las condiciones de contorno (2), (3), y $x > 0$ e $y > 0$ sobre $[0, 1]$.

Definición 2. *Para Asif y Khan (2012), el sistema de ecuaciones diferenciales (1)-(3) es singular cuando f_1 y f_2 son funciones singulares, es decir, f_1 y f_2 son funciones no acotadas en $t = 0$ y $t = 1$.*

En el presente trabajo de investigación, se sigue el siguiente marco teórico

- Espacio de Banach
- Operadores compactos o completamente continuos
- Teorema de Arzelá - Ascoli

- Teorema de extensión de Tietze's
- Teorema de punto fijo
- Distribuciones en (0,1)
- Solución fundamental
- La función de Green
- Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

En los cuales se precisarán de manera adecuada los resultados que permitan resolver el problema planteado.

2.2 Marco Conceptual

2.2.1 Espacio de Banach

Definición 3. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado E cuya norma induce una métrica, el cual forma un espacio métrico completo.*

Ejemplo 1. *Sea $E = \mathrm{C}[0,1]$ el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con la norma $\|u\| = \max\{|u(t)| : t \in [0,1]\}$ para $u \in E$; evidentemente $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

Ejemplo 2. *El espacio vectorial $E = \mathrm{C}[0,1] \times \mathrm{C}[0,1]$, tal que para cada $(x,y) \in E$, se define la norma $\|(x,y)\|_1 = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, naturalmente $(E, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.*

Ejemplo 3. *Según Botelho et al. (2015), también es espacio de Banach el espacio de funciones $E = C^1[0,1]$ con la norma $\|u\|_{C^1} = \|u\| + \|u'\|$ para $u \in C^1[0,1]$.*

Definición 4. *Sean E y F espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, un operador lineal de E en F es una función $T : E \to F$ que satisface:*

1. *$T(x+y) = T(x) + T(y)$, para cualquier $x, y \in E$.*
2. *$T(ax) = aT(x)$, para todo $a \in \mathbb{K}$ y cualquier $x \in E$.*

y es un operador continuo si T es acotado en E.

El conjunto de todos los operadores lineales continuos de E en F es denotado por $\mathcal{L}(E,F)$, es claro que $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Cuando $F = \mathbb{K}$ se escribe

E' en lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. A este espacio se le llama el dual topológico de E, o simplemente el dual de E. Los elementos de este espacio son funcionales lineales continuas.

Teorema 1. *Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : E \to F$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es lipschitziana.

(b) T es uniformemente continua.

(c) T es continua.

(d) T es continua en algún punto de E.

(e) T es continua en el origen.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe una constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Este teorema es muy importante en el desenvolvimiento de los resultados que se buscan y su demostración está en Botelho et al. (2015), asi como el teorema de Banach –Steinhaus.

Teorema 2 (de Banach-Steinhaus)**.** *Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado y $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores en $\mathcal{L}(E, F)$ satisfaciendo la condición de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x$$

Entonces $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

2.2.2 Operadores compactos o completamente continuos

Sean E y F espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, el operador lineal $T : E \to F$ es compacto o completamente continuo, cuando para toda sucesión acotada $(x_n) \subset E$, la sucesión $(T(x_n))$ tiene una subsucesión convergente. Un resultado importante para este tipo de operadores es el siguiente:

Teorema 3. *Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Entonces:*

(a) *T es compacto si, y solo si, para cada conjunto acotado $A \subset E$ se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto.*

(b) *Si $T(\bar{B}(0,1))$ es relativamente compacto, entonces T es compacto.*

(c) *Si T es compacto, entonces T es acotado.*

(d) *La familia de operadores compactos de E en F es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$; y en el caso de que E y F fueran espacios de Banach, dicha familia de operadores es cerrado en $\mathcal{L}(E,F)$.*

2.2.3 Teorema de Arzelá - Ascoli

Definición 5. *Una familia $\mathcal{C}$ de funciones definidas en $[a,b]$, es equiacotada, cuando existe una constante $k > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq k, \quad \forall x \in [a,b], \forall f \in \mathcal{C}$$

Definición 6. *Una familia $\mathcal{C}$ de funciones definidas en $[a,b]$, es equicontinua, cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{C} \quad \text{y} \quad \forall x, y \in [a,b], \quad \text{tal que } |x-y| < \delta$$

Teorema 4. *Sea $\mathcal{C}$ una familia de funciones derivables en un intervalo I. Si existe una constante $C > 0$ tal que $|f'(x)| \leq C$ para cada $f \in \mathcal{C}$ y cada $x \in I$, entonces la familia $\mathcal{C}$ es equicontinua.*

Teorema 5 (de Arzelá-Ascoli)**.** *Para que una familia $\mathcal{C}$ de funciones continuas, definidas en $[a,b]$ sea relativamente compacto en $\mathcal{C}$, es necesario y suficiente que esta familia sea equiacotada y equicontinua.*

2.2.4 Teorema de extensión de Tietze's

Según Reed (1981), se tiene las definiciones que sustentan el teorema de extensión de Tietze.

Definición 7. *Una seminorma sobre un espacio vectorial V es una aplicación $\rho : V \to [0,\infty)$ que satisface*

1. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

2. $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$, *para* $\alpha \in \mathbb{C}$ *(o* $\mathbb{R}$*).*

   La familia de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *separa puntos si*

3. $\rho_\alpha(x) = 0$ *para todo* $\alpha \in \Lambda$, *implica que* $x = 0$.

Definición 8. *Un espacio localmente convexo es un espacio vectorial* X *(sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) con una familia* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *de seminormas que separa puntos.*

Teorema 6 (de Extensión del teorema de Tietze's)**.** *Sea* X *un espacio métrico,* A*, un subconjunto cerrado de* X*,* L *un espacio vectorial localmente convexo and* $f : A \to L$ *una aplicación continua. Entonces existe una extension continua* $F : X \to L$ *de* f*.*

Demostración. Ver Dugundji (1951). $\square$

2.2.5 Teorema de punto fijo

Teorema 7 (de punto fijo de expansión y compresión del cono de tipo norma)**.** *Sean* K *un cono y* $\Omega_1,\ \Omega_2$ *dos subconjuntos abiertos y acotados de un espacio de Banach* E*, tal que* $0 \in \Omega_1$*,* $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ *y* $T : K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right) \to K$ *un operador completamente continuo. Suponga que una de las condiciones se verifica*

1. $\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$*, y*

2. $\|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Entonces T *tiene al menos un punto fijo en* $K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$*.*

Demostración. Ver Dajun y Lakshmikanthan (1988). $\square$

2.2.6 Distribuciones

Definición 9. *Sea* X *un espacio topológico y la función* $f : X \to \mathbb{C}$*. El soporte de* f *es la cerradura del conjunto de los puntos en los cuales* f *es distinta de cero:*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

En el caso de que $f : X \to \mathbb{C}$ sea continua. Se dice que f es de soporte compacto si $\operatorname{supp}(f)$ es compacto.

Definición 10. *Una distribución sobre* $(0,1)$ *es una funcional lineal y continua en* $C_0^\infty(0,1)$ *(funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en* $(0,1)$*) y se representa por* $\langle T, \varphi \rangle$*. El conjunto de las distribuciones se le denota por* $\mathcal{D}'(0,1)$*.*

Es importante recordar que toda función de $L^1_{loc}(0,1)$ se identifica con una distribución sobre $(0,1)$, equivalentemente la aplicación $\Psi : u \in L^1_{loc}(0,1) \to T_u \in \mathcal{D}'(0,1)$ definida por

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx \tag{6}$$

es inyectiva,

Definición 11. *La derivada de una distribución* $T \in \mathcal{D}'(0,1)$ *se define como:*

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle \tag{7}$$

En general, la derivada de orden n *se define por:*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dx^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dx^n} \right\rangle \tag{8}$$

2.2.7 Solución fundamental

Definición 12. *Una solución fundamental de una Ecuación diferencial ordinaria* $Lu = f$ *es aquella que puede obtenerse resolviendo* $Lu = \delta$*, donde* δ *es la distribución* δ *de Dirac.*

2.2.8 Función de Green

Se define la función de Green

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), 0 \le s \le t \le 1 \end{cases} \tag{9}$$

y está asociada al problema

$$\begin{aligned} &-x''(t) = \delta(t-s),\ 0 < t < 1 \\ &x(0) = x(1) = 0 \end{aligned}$$

Aquí, $\mathrm{G}(t,s)$ es una función continua no negativa.

2.2.9 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

En esta sección tomaremos conceptos y resultados de Rudin (1987).

Definición 13. *Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de un conjunto X es una σ-álgebra en X si $\mathcal{M}$ posee las siguientes propiedades:*

1. $X \in \mathcal{M}$.

2. *Si* $A \in \mathcal{M}$*, entonces* $A^c = X - A \in \mathcal{M}$.

3. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una familia de conjuntos en* $\mathcal{M}$*, entonces*

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Definición 14 (de espacio medible)**.** *Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X, entonces X es un espacio medible y a los elementos de $\mathcal{M}$ se les llama conjuntos medibles en X.*

Definición 15 (De medida positiva)**.** *Se llama medida positiva a una función μ definida en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ con valores en $[0, \infty]$ y que es numerablemente aditiva.*

Definición 16 (De espacio de medida)**.** *Un espacio de medida es un espacio medible en el cual está definida una función de medida positiva sobre la σ-álgebra de sus conjuntos medibles.*

Definición 17. *Definimos $L^1(\mu)$ como una colección de todas las funciones complejas medibles f en X para las que*

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Dentro de la teoría de integración, uno de los más importantes es el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, el cual establece las condiciones para cambiar el orden en la toma de límites en el cálculo de integrales cuando intervienen series de funciones medibles y acotadas. Con este teorema se demuestra la convergencia de integrales construidas a partir de una sucesión de funciones medibles.

Teorema 8 (de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones complejas medibles en X tales que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \textit{para todo } x \in X$$

Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ para cada } n = 1, 2, \cdots, \ x \in X$$

entonces $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \tag{10}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{11}$$

Demostración. Ver Rudin (1987). □

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la metodología utilizada en las diferentes etapas del estudio y los instrumentos de recolección de datos utilizados, para analizar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (1) con las condiciones de frontera (2) y (3).

Inicialmente, se reescribirá de manera equivalente el sistema (1)-(3). Para lograr ello, tomamos la ecuación diferencial

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{12}$$

donde a, b y f son continuas en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y la transformación

$$x(t) = c(t)u(t) \tag{13}$$

que nos permita ir de la variable x a la variable u y convertir (12) en una ecuación diferencial que carezca de u'. Haciendo el cálculo de $x'(y)$ y $x''(t)$ se obtiene

$$x'(t) = c'(t)u(t) + c(t)u'(t) \quad \text{y} \quad x''(t) = c''(t)u(t) + 2c'(t)u'(t) + c(t)u''(t)$$

que al reemplazar estas derivadas en (12) nos da

$$c(t)u'' + [2c'(t) + a(t)c(t)]\, u' + [a(t)c'(t) + b(t)c(t) + c''(t)]\, u = 0 \tag{14}$$

Aquí en (14) el objetivo se logra haciendo $2c'(t) + a(t)c(t) = 0$, de donde

$$c(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

para algún $t_0 \in I$. Con este resultado se ha obtenido la transformación que conviene, y está dada por la expresión

$$u(t) = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x(t) \tag{15}$$

Tomando como referencia a (15), se tiene las transformaciones

$$u(t) = e^{\frac{1}{2}\int_0^t a_1(\tau)d\tau} x(t), \quad v(t) = e^{\frac{1}{2}\int_0^t a_2(\tau)d\tau} y(t) \tag{16}$$

que convierten al sistema de ecuaciones (1) con las condiciones de frontera (2) y (3), en un sistema más simple

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t), v(t)) \\ -v''(t) = g(t, u(t), v(t)) \end{cases} \tag{17}$$

con las condiciones de frontera

$$u(0) = \int_0^1 \sigma_1(t)v(t)d\alpha(t), \quad v(0) = \int_0^1 \sigma_2(t)u(t)d\beta(t) \tag{18}$$

$$u(1) = 0, \quad v(1) = 0 \tag{19}$$

donde

$$\sigma_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_2(\tau)d\tau}, \quad \sigma_2(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_1(\tau)d\tau}$$

y $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ se escogen convenientemente.

Suponga que σ_1, σ_2 son funciones de $L^\infty(0, 1)$.

3.1 Hipótesis central de la investigación

Se considera las siguientes hipótesis:

H1) Para $f \in C^0((0, 1) \times [0, +\infty) \times (0, +\infty), [0, +\infty))$ se verifica $f(t, u, v)$ es creciente en u y decreciente en v, además existe $\lambda_1, \mu_1 \in [0, 1)$ tal que $\forall u, v > 0$ y $a \in (0, 1)$ se tiene

$$a^{\lambda_1} f(t, u, v) \leq f(t, au, v) \tag{20}$$

$$f(t, u, av) \leq a^{-\mu_1} f(t, u, v) \tag{21}$$

$$0 < \int_0^1 f(t, 1, 1-t)dt < +\infty \tag{22}$$

A partir de la hipótesis H1) se tiene las siguientes consecuencias:

C1) Para $a > 1$ se tiene

$$f(t, au, v) \leq a^{\lambda_1} f(t, u, v), \forall u, v > 0$$

$$f(t, u, v) \leq a^{\mu_1} f(t, u, av), \forall u, v > 0$$

En efecto, $1/a \in (0, 1)$, consecuentemente de (20) se tiene:

$$(1/a)^{\lambda_1} f(t, u, v) \leq f\left(t, \frac{1}{a}u, v\right),$$

entonces

$$f(t, u, v) \leq a^{\lambda_1} f\left(t, \frac{1}{a}u, v\right) \Rightarrow f(t, au, v) \leq a^{\lambda_1} f(t, u, v)$$

Análogamente

$$f\left(t, u, \frac{v}{a}\right) \leq (1/a)^{-\mu_1} f(t, u, v) \Rightarrow f(t, u, v) \leq a^{\mu_1} f(t, u, av)$$

C2)

$$0 < \int_0^1 f(t, 1-t, 1)dt < +\infty$$

En efecto, de (20), haciendo $u = 1 - t, v = 1$, se deduce

$$f(t, 1-t, 1) \leq a^{-\lambda_1} f(t, a(1-t), 1) \tag{23}$$

Por otro lado, de (21) y haciendo $u = a(1-t)$, $av = 1$, se obtiene

$$f(t, a(1-t), 1) \leq a^{-\mu_1} f\left(t, a(1-t), \frac{1}{a}\right)$$

Como $a(1-t) < 1$, entonces $1 - t < \frac{1}{a}$. Siendo que f creciente en la segunda variable y decreciente en la tercera variable se consigue la desigualdad:

$$f(t, a(1-t), 1) \leq a^{-\mu_1} f\left(t, a(1-t), \frac{1}{a}\right) \leq a^{-\mu_1} f(t, 1, 1-t) \tag{24}$$

Luego, de (23) y (24)

$$f(t, 1-t, 1) \leq a^{-\lambda_1} f(t, a(1-t), 1) \leq a^{-\lambda_1} a^{-\mu_1} f(t, 1, 1-t)$$

Consecuentemente, integrando de 0 a 1 y de la relación (9) se tiene:

$$0 < \int_0^1 f(t, 1-t, 1)dt \leq a^{-(\lambda_1+\mu_1)} \int_0^1 f(t, 1, 1-t)dt < +\infty$$

es decir,

$$0 < \int_0^1 f(t, 1-t, 1)dt < +\infty$$

De igual forma para $g \in C^0((0,1) \times (0,+\infty) \times [0,+\infty), [0,+\infty))$, se verifica que $g(t,u,v)$ es decreciente en u y creciente en v, además, existe $\lambda_2, \mu_2 \in [0,1)$ tal que $\forall u, v > 0$ y $a \in (0,1)$ se tiene

$$a^{\lambda_2} g(t,u,v) \leq g(t,u,av) \tag{25}$$

$$g(t,au,v) \leq a^{-\mu_2} g(t,u,v) \tag{26}$$

$$0 < \int_0^1 g(t, 1-t, 1)dt < +\infty \tag{27}$$

Y con estos resultados, la siguiente consecuencia.

C3) Para $a > 1$ se tiene $0 < \frac{1}{a} < 1$, usando esto en (25) se consigue que:

$$(1/a)^{\lambda_2} g(t,u,v) \leq g\left(t, u, \frac{v}{a}\right),$$

de donde

$$g(t,u,av) \leq a^{\lambda_2} g(t,u,v) \tag{28}$$

Análogamente, siendo que $0 < \frac{1}{a} < 1$, en (26) se logra que:

$$g\left(t, \frac{u}{a}, v\right) \leq (1/a)^{-\mu_2} g(t,u,v),$$

de donde

$$g(t,u,v) \leq a^{\mu_2} g(t,au,v) \tag{29}$$

Combinando adecuadamente las desigualdades obtenidas en (28) y (29) se obtiene

$$g(t,u,av) \leq a^{\lambda_2+\mu_2} g(t,au,v)$$

Si en esta última desigualdad tomamos $v = 1$ y $au = 1-t$ con el cual $u = \frac{1-t}{a} < 1$ (o también $1 - t < a$), entonces

$$g(t, 1, 1-t) \leq g\left(t, \frac{1-t}{a}, a\right) \leq a^{\lambda_2+\mu_2} g(t, 1-t, 1)$$

Integrando de 0 a 1 y considerando (27) se encuentra que

$$0 < \int_0^1 g(t, 1, 1-t)dt \leq a^{\lambda_2+\mu_2} \int_0^1 g(t, 1-t, 1)dt < +\infty$$

es decir,

$$0 < \int_0^1 g(t, 1, 1-t)dt < +\infty \tag{30}$$

H2) Dada las integrales

$$\xi_1 = \int_0^1 (1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t) \quad \text{y} \quad \xi_2 = \int_0^1 (1-t)\sigma_2(t)d\beta(t)$$

se verifica

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \text{además}, \quad \xi = 1 - \xi_1 \cdot \xi_2 > 0$$

3.2 Variables e indicadores de la investigación

Variable Independiente: SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA.

Variable Independiente: SOLUCIONES POSITIVAS

3.3 Métodos de la investigación

El método de investigación es hipotético deductivo, puesto que se obtiene los resultados elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas. Consecuentemente, se llega a las conclusiones a través de un procedimiento de cálculo formal. Usaremos las herramientas matemáticas como son: soluciones fundamentales en ecuaciones diferenciales, es decir, en el sentido de la teoría de las distribuciones y un resultado fundamental del Análisis funcional, más precisamente, el teorema de punto fijo sobre un cono de un espacio de Banach.

Por otro lado, la investigación es del tipo básica, puesto que busca ampliar los conocimientos y teorías que relacionan con otros temas como es la teoría de distribuciones en ecuaciones diferenciales. Así mismo, de acuerdo al grado de manipulación de las variables, se trata de una investigación no experimental y por el tiempo que se realiza, es una investigación transversal, puesto que se hizo un acopio de información en base a revistas y/o artículos especializados durante todo el trabajo de investigación.

3.4 Diseño o esquema de la investigación

Para contrastar la hipótesis de la investigación, dado que el tipo de investigación es pura y básica, el diseño de la investigación es de carácter básicamente explicativo y descriptivo basado en la discusión y el análisis crítico de las condiciones de frontera acopladas para obtener soluciones positivas que puedan consolidarse en un teorema.

3.5 Población y muestra

Población: Por el tipo de investigación (básica) que se realiza en matemática, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra dentro de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Muestra: Según el estudio que se realizará, la muestra será los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias singulares de segundo orden con condiciones de contorno de integral acoplada.

3.6 Actividades del proceso investigativo

Etapas de la investigación con sus correspondientes técnicas e instrumentos de recolección consta de las siguientes fases:

- FASE INICIAL

  En esta fase se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y /o herramientas a estudiar. Luego se recopiló la información de manera más completa de revistas y/o artículos especializados, que permitió describir el método de estudio y las herramientas que se utilizaron para el presente trabajo de investigación.

- FASE INTERMEDIA

  En esta fase se realizó el desarrollo y el análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias singulares de segundo orden con condiciones de contorno de integral acoplada.

- FASE FINAL

  Se realizó la contrastación de la hipótesis mediante un teorema de punto fijo sobre un cono de un espacio de Banach. Contribuyendo de esta manera con el objetivo central.

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación

Los datos han sido obtenidos con base a revistas especializadas y/o artículos sobre el tema en cuestión.

- Para la variable independiente (SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y CON VALORES EN LA FRONTERA) se ha revisado los temas relacionados con el trabajo de investigación que lo involucran en base al marco teórico y el cálculo formal y lógico.

- Para la variable dependiente (SOLUCIONES POSITIVAS) se relacionó con otros trabajos, de modo que se enfoque el método con mayor efíciencia para el trabajo de investigación.

- Validación de los Instrumentos

  La validación de los instrumentos se hizo a través de propiedades cualitativas de las ecuaciones diferenciales que conducen a las soluciones positivas y garantizar de esta manera el resultado principal.

3.8 Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos)

Debido al tipo de investigación pura o básica el procedimiento para la recolección de los datos será: buscar, recopilar, clasificar, analizar e interpretar la información del área de matemática pura y aplicada, registrada por otros investigadores en revistas científicas ya sea impresas o electrónicas, así como trabajos de investigación, libros, etc.

La validación de los datos recopilados en el presente trabajo de investigación la realizó la Universidad Nacional del Santa como Universidad Licenciada por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU).

3.9 Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

La técnica para la recolección de los datos en la presente investigación será el análisis documental teniendo acceso a bibliotecas especializadas online de diferentes Universidades o centros de investigación donde desarrollan esta área de la matemática. Los instrumentos para la recolección de los datos serán las fichas textuales y de resumen. Una vez recolectada la información necesaria para la investigación, la técnica a utilizarse para el procesamiento de los datos será la demostración matemática, con la finalidad de analizar los resultados obtenidos. Dichos resultados serán contrastados con los resultados basados en trabajos (papers) recientes publicados en revistas científicas de actualidad y someter a opinión en el área de matemática y áreas afines.

Para el procesamiento y análisis de los datos tomados respecto a las variables: sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y con valores en la frontera y soluciones positivas, se han considerado soluciones elementales de ecuaciones diferenciales de segundo orden, mediante la revisión de bibliografía especializada, es decir libros y artículos de la materia. Utilizando resultados de la teoría de las distribuciones.

El proceso de la representación integral de las soluciones, se desarrolló como la inversa de una matriz asociada al sistema.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Introducción

En este capítulo, se presenta un análisis e interpretación de datos basado en la metodología que se presentó en los capítulos anteriores, lo que implicará en los resultados y la discusión respectiva del trabajo de investigación. Para tal fin, se introduce la solución fundamental de una ecuación diferencial de segundo orden y con el principio de Duhamel, se llega a su representación integral, utilizando las funciones de Green. Por otro lado, para las soluciones positivas, se aplica un resultado del análisis matemático, más precisamente, el teorema de punto fijo sobre un cono de un espacio de Banach, conforme a Dajun y Lakshmikanthan (1988). Además, el teorema de Arzelá-Ascoli es otra herramienta matemática que servirá como sustento en la demostración de las soluciones positivas para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

4.2 Análisis de datos

En esta sesión se determina la solución fundamental de una ecuación diferencial de segundo orden, de la forma:

$$-u''(t) = \delta(t-s) \tag{31}$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \tag{32}$$

Se sabe, que la derivada distribucional de la función escalón unitaria $H_s(t) = \begin{cases} 0, & t < s \\ 1, & t \geq s \end{cases}$, es la distribución delta de Dirac $\delta_s(t) = \delta(t-s)$. Consecuentemente, de la ecuación (31) se tiene:

$$-u''(t) = \delta(t-s) = H_s'(t) \implies u'(t) + H_s(t) = C$$

integrando de 0 a t se obtiene:

$$u(t) = Ct + D - \int_0^t H_s(\tau)d\tau$$

que equivalentemente es

$$u(t) = \begin{cases} Ct + D, & 0 \leq t < s < 1 \\ Ct + D + s - t, & 0 < s < t \leq 1 \end{cases}$$

Haciendo uso de la condiciones de frontera (32), se obtiene $D = 0$ y $C = 1 - s$. Por lo tanto, esta función $u(t)$ se conoce como la función de Green $G(t, s)$

$$G(t,s) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \leq t < s < 1 \\ s(1-t), & 0 < s < t \leq 1 \end{cases} \tag{33}$$

que es la que se muestra en Cui et al. (2013). La función de Green es fundamental para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} -u''(t) = p(t) \\ -v''(t) = q(t) \end{cases} \tag{34}$$

con las condiciones de frontera

$$u(1) = 0, \quad v(1) = 0 \tag{35}$$

$$u(0) = \int_0^1 \sigma_1(t)v(t)d\alpha(t), \quad v(0) = \int_0^1 \sigma_2(t)u(t)d\beta(t) \tag{36}$$

donde $\sigma_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_2(\tau)d\tau}$ y $\sigma_2(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_1(\tau)d\tau}$. Con el principio de Duhamel, se procede para cada ecuación diferencial de la siguiente manera:

En el problema: $\begin{cases} -u''(t) = p(t), \ 0 < t < 1 \\ u(0) = \int_0^1 \sigma_1(t)v(t)d\alpha(t) \\ u(1) = 0 \end{cases}$, tomamos

$$-u''(t) = p(t) \tag{37}$$

con

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \tag{38}$$

y luego se considera

$$-u''(t) = 0 \tag{39}$$

con

$$u(0) = \int_0^1 \sigma_1(t)v(t)d\alpha(t), \quad u(1) = 0 \tag{40}$$

1. Para (37) y (38) se deduce que $u(t) = A + Bt + \int_0^t (s-t)p(s)ds$; que al aplicar las condiciones de (38) se obtiene que

   $$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \int_0^1 (1-s)p(s)ds$$

   con lo cual,

   $$\begin{aligned} u(t) &= t\int_0^1 (1-s)p(s)ds + \int_0^t (s-t)p(s)ds \\ &= \int_0^t t(1-s)p(s)ds + \int_t^1 t(1-s)p(s)ds + \int_0^t (s-t)p(s)ds \\ &= \int_0^t s(1-t)p(s)ds + \int_t^1 t(1-s)p(s)ds \end{aligned}$$

   que en concordancia con la solución fundamental de (31) y (32), la solución de (37) y (38) es:

   $$u(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)ds \tag{41}$$

   donde la función $G(t,s)$, es la función de Green dada en (33).

2. Para (39) y (40) se obtiene

   $$u(t) = (1-t)u(0) \tag{42}$$

   Finalmente, de (41) y (42) se consigue que la solución del problema es:

   $$u(t) = (1-t)u(0) + \int_0^1 G(t,s)p(s)ds \tag{43}$$

Análogamente, si el problema:

$$\begin{cases} -v''(t) = q(t) \\ v(0) = \int_0^1 \sigma_2(t)u(t)d\beta(t), \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

lo descomponemos en los subproblemas

$$\begin{cases} -v''(t) = 0 \\ v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -v''(t) = q(t) \\ v(0) = \int_0^1 \sigma_2(t)u(t)d\beta(t), \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

procediendo de manera similar al caso anterior se obtiene

$$v(t) = (1-t)v(0) + \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \tag{44}$$

4.3 Interpretación de datos

4.3.1 Representación integral del sistema diferencial (34)-(36)

Multiplicando las funciones obtenidas en las relaciones (43) y (44) por $\sigma_2(t)$ y $\sigma_1(t)$ respectivamente, se tiene:

$$\begin{cases} \sigma_2(t)u(t) = u(0)(1-t)\sigma_2(t) + \sigma_2(t)\int_0^1 G(t,s)p(s)ds \\ \sigma_1(t)v(t) = v(0)(1-t)\sigma_1(t) + \sigma_1(t)\int_0^1 G(t,s)q(s)ds \end{cases} \tag{45}$$

Si en este sistema se integra respecto a $d\beta(t)$ y $d\alpha(t)$ de 0 a 1 respectivamente, se obtiene:

$$\begin{cases} \int_0^1 \sigma_2(t)u(t)d\beta(t) = u(0)\int_0^1 (1-t)\sigma_2(t)d\beta(t) + \int_0^1 \sigma_2(t)\left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds\right)d\beta(t) \\ \\ \int_0^1 \sigma_1(t)v(t)d\alpha(t) = v(0)\int_0^1 (1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t) + \int_0^1 \sigma_1(t)\left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds\right)d\alpha(t) \end{cases}$$

que es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} v(0) - u(0)\int_0^1 (1-t)\sigma_2(t)d\beta(t) = \int_0^1 \sigma_2(t)\left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds\right)d\beta(t) \\ \\ u(0) - v(0)\int_0^1 (1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t) = \int_0^1 \sigma_1(t)\left(\int_0^1 G(t,s)q(s)ds\right)d\alpha(t) \end{cases}$$

Expresando en la forma matricial, se obtiene

$$\begin{bmatrix} -\xi_2 & 1 \\ 1 & -\xi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \sigma_2(t) \left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds \right) d\beta(t) \\ \\ \int_0^1 \sigma_1(t) \left(\int_0^1 G(t,s)q(s)ds \right) d\alpha(t) \end{bmatrix}$$

Donde

$$\xi_1 = \int_0^1 (1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t), \quad \xi_2 = \int_0^1 (1-t)\sigma_2(t)d\beta(t)$$

El determinante de la matriz de la izquierda es $\xi = 1 - \xi_1\xi_2 \neq 0$, y con esto

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} \xi_1 & 1 \\ 1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^1 \sigma_2(t) \left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds \right) d\beta(t) \\ \\ \int_0^1 \sigma_1(t) \left(\int_0^1 G(t,s)q(s)ds \right) d\alpha(t) \end{bmatrix}$$

que realizando los cálculos correspondientes se obtiene

$$u(0) = \frac{\xi_1}{\xi} \int_0^1 \sigma_2(t) \left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds \right) d\beta(t) + \frac{1}{\xi} \int_0^1 \sigma_1(t) \left(\int_0^1 G(t,s)q(s)ds \right) d\alpha(t) \tag{46}$$

y

$$v(0) = \frac{1}{\xi} \int_0^1 \sigma_2(t) \left(\int_0^1 G(t,s)p(s)ds \right) d\beta(t) + \frac{\xi_2}{\xi} \int_0^1 \sigma_1(t) \left(\int_0^1 G(t,s)q(s)ds \right) d\alpha(t) \tag{47}$$

Aplicando el teorema de Fubini a las relaciones (46) y (47) y sustituyendo en las ecuaciones (43) y (44), se tiene

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(1-t)\xi_1}{\xi} \int_0^1 p(s) \left(\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) \right) ds \\ &\quad + \frac{1-t}{\xi} \int_0^1 q(s) \left(\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) \right) ds + \int_0^1 G(t,s)p(s)ds \\ &= \int_0^1 p(s) \left[\frac{(1-t)\xi_1}{\xi} \int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) + G(t,s) \right] ds \\ &\quad + \frac{1-t}{\xi} \int_0^1 q(s) \left(\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) \right) ds \end{aligned}$$

y a partir de esto,

$$u(t) = \int_0^1 U_1(t,s)p(s)ds + \int_0^1 V_1(t,s)q(s)ds \tag{48}$$

donde,

$$U_1(t,s) = \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) + G(t,s)$$

y

$$V_1(t,s) = \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t)$$

En forma similar se consigue que

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 p(s)\left(\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t)\right)ds \\
&\quad + \frac{(1-t)\xi_2}{\xi}\int_0^1 q(s)\left(\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t)\right)ds + \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \\
&= \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 p(s)\left(\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t)\right)ds \\
&\quad + \int_0^1 q(s)\left[\frac{(1-t)\xi_2}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) + G(t,s)\right]ds
\end{aligned}$$

que se va escribir como

$$v(t) = \int_0^1 U_2(t,s)p(s)ds + \int_0^1 V_2(t,s)q(s)ds \tag{49}$$

donde

$$U_2(t,s) = \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t)$$

y

$$V_2(t,s) = \frac{(1-t)\xi_2}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) + G(t,s)$$

Las expresiones obtenidas en (48) y (49) son las representaciones integrales de las soluciones del sistema diferencial (34)-(36)

4.3.2 Cono de un espacio de Banach

Definición 18. *Según Dajun y Lakshmikanthan (1988), en un espacio de Banach E, un subconjunto convexo no vacío K de E es un cono, si satisface las siguientes condiciones:*

1. $x \in K$, $\lambda \geq 0$ *entonces* $\lambda x \in K$.

2. $x \in K$, $-x \in K$, *entonces* $x = 0$.

K *es llamado un cono en* E.

Ejemplo 4. *Sea $E = C([0,1])$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma: $\|u\| = \max\{|u(t)| \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$, evidentemente es un espacio de Banach. Considere el conjunto*

$$K = \{(u,v) \in E \times E; u(t), v(t) \geq \eta(1-t)\|(u,v)\|_1, t \in [0,1]\}$$

donde

$$\|(u,v)\|_1 = \max\{\|u\|, \|v\|\}, \qquad \eta = \frac{\nu}{\rho} \in [0,1]$$

y

$$\begin{aligned} \nu = \min\Bigg\{ & \frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 t(1-t)\sigma_2(t)d\beta(t), \ \ \frac{\xi_2}{\xi}\int_0^1 t(1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t), \\ & , \frac{1}{\xi}\int_0^1 t(1-t)\sigma_2(t)d\beta(t), \ \ \frac{1}{\xi}\int_0^1 t(1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t)\Bigg\} \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \rho = \max\Bigg\{ & \frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)d\beta(t)+1, \ \ \frac{\xi_2}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)d\alpha(t)+1, \\ & , \frac{1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)d\beta(t), \ \ \frac{1}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)d\alpha(t)\Bigg\} \end{aligned} \tag{51}$$

K es un cono convexo cerrado no vacío de $E \times E$.

En lo que sigue, tomaremos $K_* = K\backslash\{0\}$ y $\mathcal{C}_+([0,1]) \subset E$, el espacio de la funciones continuas no negativas en $[0,1]$.

Note que la función de Green satisface las siguientes desigualdades que serán necesarias para hacer acotaciones:

$$\begin{aligned} G(t,s)\cdot G(t,s) = t(1-t)s(1-s) \leq G(t,s) \leq t(1-t)(\text{o} \ \ s(1-s)) \\ G(t,t)\cdot G(s,s) = t(1-t)s(1-s) \leq G(t,s) \leq t(1-t)(\text{o} \ \ s(1-s)) \end{aligned} \tag{52}$$

4.3.3 Algunas estimativas

E1)

$$\begin{cases} U_i(t,s) \leq \rho s(1-s)(\text{o} \ \ \rho(1-t)) \\ V_i(t,s) \leq \rho s(1-s)(\text{o} \ \ \rho(1-t)) \end{cases}, \quad i = 1,2 \tag{53}$$

E2)

$$\begin{cases} U_i(t,s) \geq \nu(1-t)s(1-s) \\ V_i(t,s) \geq \nu(1-t)s(1-s) \end{cases}, \quad i = 1,2 \tag{54}$$

E3)

$$\begin{cases} f(t,u(t),v(t)) \le a^{\lambda_1} b^{\mu_1} f(t,1,1-t) \\ g(t,u(t),v(t)) \le a^{\lambda_2} b^{\mu_2} g(t,1-t,1) \end{cases}, \quad \forall t \in [0,1] \tag{55}$$

donde $(u,v) \in K$, $a > 1$ y $\|(u,v)\|_1 < a$, además, $b = \frac{a}{\eta\|(u,v)\|_1}$

E4)

$$\begin{cases} U_i(t,s) \ge \eta(1-t)U_j(\tau,s) \\ V_i(t,s) \ge \eta(1-t)V_j(\tau,s) \end{cases}, \quad i,j = 1,2 \tag{56}$$

E5)

$$\begin{cases} U_i(t,s) \ge \eta(1-t)V_j(\tau,s) \\ V_j(t,s) \ge \eta(1-t)U_i(\tau,s) \end{cases}, \quad i,j = 1,2,\ i \ne j \tag{57}$$

La demostración de cada una de las desigualdades se hace a continuación

Demostración de E1): Aplicando (52) y (51)

$$\begin{aligned} U_1(t,s) &= \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) + G(t,s) \\ &\le \frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)s(1-s)d\beta(t) + s(1-s) \\ &= s(1-s)\left[\frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)d\beta(t) + 1\right] \le s(1-s)\rho \end{aligned}$$

entonces

$$U_1(t,s) \le s(1-s)\rho$$

o también

$$\begin{aligned} U_1(t,s) &= \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) + G(t,s) \\ &\le \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)d\beta(t) + t(1-t), \quad \text{siendo} \quad t \le 1 \ \mathbf{y} \ 1-t \le 1 \\ &\le \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)d\beta(t) + (1-t) < (1-t)\rho \end{aligned}$$

entonces

$$U_1(t,s) \le (1-t)\rho$$

Para $V_1(t,s)$ se tiene

$$\begin{aligned} V_1(t,s) &= \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) \\ &\leq \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)s(1-s)d\alpha(t), \text{ siendo } 0\leq t\leq 1 \text{ y } 0\leq 1-t\leq 1 \\ &\leq s(1-s)\frac{1}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)d\alpha(t)\leq s(1-s)\rho \end{aligned}$$

entonces

$$V_1(t,s)\leq s(1-s)\rho$$

Análogamente se procede para $U_2(t,s)$ y $V_2(t,s)$.

Demostración de E2): Aplicando (52) y (50)

$$\begin{aligned} U_1(t,s) &= \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t)+G(t,s) \\ &\geq \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)s(1-s)d\beta(t)+t(1-t)s(1-s) \\ &= \frac{(1-t)s(1-s)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)d\beta(t)+t(1-t)s(1-s) \\ &\geq (1-t)s(1-s)\left[\frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)d\beta(t)\right]\geq (1-t)s(1-s)\nu \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$U_1(t,s)\geq (1-t)s(1-s)\nu$$

Procediendo para $V_1(t,s)$ se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} V_1(t,s) &= \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t)\geq \frac{1-t}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)t(1-t)s(1-s)d\alpha(t) \\ &= (1-t)s(1-s)\left[\frac{1}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)t(1-t)d\alpha(t)\right]\geq (1-t)s(1-s)\nu \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V_1(t,s)\geq (1-t)s(1-s)\nu$$

En forma similar y con los mismos argumentos se consigue las otras estimativas de E2).

Demostración de E3): Si tomamos $(u,v)\in K$, entonces $\forall t\in[0,1]$, u y v verifican

$$\eta(1-t)\|(u,v)\|_1 \le u(t) \le \|(u,v)\|_1$$
$$\eta(1-t)\|(u,v)\|_1 \le v(t) \le \|(u,v)\|_1$$

Además, sea $a>1$ para el cual $\|(u,v)\|_1 < a$, entonces $u(t)<a$, $\forall t\in[0,1]$. También, $\frac{\eta}{a}\|(u,v)\|_1 < \eta\|(u,v)\|_1$ y $\frac{\eta}{a}\|(u,v)\|_1 < 1$. Ponemos $\frac{1}{b} = \frac{\eta}{a}\|(u,v)\|_1$. Siendo que f es creciente en la segunda variable y decreciente en la tercera variable, aplicando convenientemente (21) de la hipótesis H1) y consecuencia C1) se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(t,u(t),v(t)) &\le f\left(t,\|(u,v)\|_1,\eta(1-t)\|(u,v)\|_1\right) \le f\left(t,a,\frac{\eta}{a}\|(u,v)\|_1(1-t)\right) \\ &= f\left(t,a\cdot 1,\frac{1}{b}(1-t)\right) \le a^{\lambda_1}\left(\frac{1}{b}\right)^{-\mu_1} f(t,1,1-t) \\ &= a^{\lambda_1}b^{\mu_1}f(t,1,1-t),\ \forall t\in[0,1] \end{aligned}$$

En forma similar, si tomamos en cuenta que g es decreciente en la segunda variable y creciente en la tercera variable, y si usamos (26) de la hipótesis H1) y (28) de la consecuencia C3), se consigue:

$$\begin{aligned} g(t,u(t),v(t)) &\le g\left(t,\eta(1-t)\|(u,v)\|_1,\|(u,v)\|_1\right) \le g\left(t,\frac{\eta}{a}(1-t)\|(u,v)\|_1,a\right) \\ &= g\left(t,\frac{1}{b}(1-t),a\cdot 1\right) \le \left(\frac{1}{b}\right)^{-\mu_2} a^{\lambda_2} g(t,1-t,1) \\ &= a^{\lambda_2}b^{\mu_2}g(t,1-t,1),\ \forall t\in[0,1] \end{aligned}$$

Demostración de E4): usando la estimativa E2) y E1) se obtiene lo siguiente

$$\nu(1-\tau)s(1-s) \le U_j(\tau,s) \le \rho s(1-s), \quad j=1,2 \tag{58}$$

multiplicando (58) por $\nu(1-t)$ se llega a las desigualdades

$$\nu(1-t)U_j(\tau,s) \le \rho\nu(1-t)s(1-s) \le \rho U_i(t,s)$$

de donde se obtiene

$$U_i(t,s) \ge \eta(1-t)U_j(\tau,s)$$

Del mismo modo, se consigue de E2) y E1) lo siguiente

$$\nu(1-\tau)s(1-s) \leq V_j(\tau,s) \leq \rho s(1-s), \quad j=1,2 \tag{59}$$

aquí en (59) se multiplica por $\nu(1-t)$ para obtener las desigualdades

$$\nu(1-t)V_j(\tau,s) \leq \rho\nu(1-t)s(1-s) \leq \rho V_i(t,s)$$

de donde

$$V_i(t,s) \geq \eta(1-t)V_j(\tau,s)$$

Demostración de E5): en este caso, al multiplicar (58) por $\nu(1-t)$ y comparando con (59) se obtiene

$$\nu(1-t)U_i(\tau,s) \leq \rho\nu(1-t)s(1-s) \leq \rho V_j(t,s)$$

siendo $\eta = \frac{\nu}{\rho}$, entonces se concluye que $V_j(t,s) \geq \eta(1-t)U_i(\tau,s)$. De manera similar, si se multiplica (59) por $\nu(1-t)$ y se compara con (58) se concluye la desigualdad $U_i(t,s) \geq \eta(1-t)V_j(\tau,s)$.

Las desigualdades que se han obtenido serán muy importantes en el proceso de acotamiento del siguiente operador que nos permitirá manipular las soluciones de nuestro problema.
A continuación, considere el operador

$$T : K_* \to K \quad \text{dado por} \quad T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v)) \tag{60}$$

donde, los operadores $T_i : K_* \to \mathcal{C}_+([0,1])$, están definidos para cada $i=1,2$ por:

$$T_1(u,v)(t) = \int_0^1 U_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_1(t,s)(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \tag{61}$$

$$T_2(u,v)(t) = \int_0^1 U_2(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_2(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \tag{62}$$

Proposición 1. *El operador $T : K_* \to K$, dado por $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ está bien definido sobre K_**

Demostración. Sea $(u,v)\in K_*$, aplicando la estimativa (53) a cada operador T_i con $i=1,2$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
T_i(u,v)(t) &= \int_0^1 U_i(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_i(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \\
&\leq \rho\int_0^1 f(s,u(s),v(s))ds + \rho\int_0^1 g(s,u(s),v(s))ds
\end{aligned}
$$

Usando la estimativa (55) en la desigualdad anterior, se tiene:

$$
T_i(u,v)(t) \leq \rho\int_0^1 a^{\lambda_1}b^{\mu_1}f(s,1,1-s)ds + \rho\int_0^1 a^{\lambda_2}b^{\mu_2}g(s,1-s,1)ds
$$

Siendo que $\int_0^1 f(s,1,1-s)ds < +\infty$ y $\int_0^1 g(s,1-s,1)ds < +\infty$, por (22) y (27) de H1), entonces

$$
T_i(u,v)(t) < +\infty,\ \ \forall (u,v)\in K_*,\ \forall t\in[0,1]
$$

lo que significa que cada $T_i(u,v)$ es acotado. $\square$

Una bola abierta en K, de centro en cero y radio $r>0$ es:

$$
B_r(0) = \{(u,v)\in K\ :\ \|(u,v)\|_1 < r\} \tag{63}
$$

Si r y R son tales que $0<r<R$, entonces

$$
\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0) = \{(u,v)\in K\ :\ r\leq \|(u,v)\|_1 \leq R\} \tag{64}
$$

Proposición 2. *Sean* $0<r<R$. *El operador* $T:\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)\to K$ *verifica*

$$
T\left(\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)\right)\subset K
$$

Demostración. Sea $(u,v)\in\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$, para cada $t\in[0,1]$, usando (56)

$$
\begin{aligned}
T_i(u,v)(t) &= \int_0^1 U_i(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_i(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \\
&\geq \int_0^1 \eta(1-t)U_i(\tau,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 \eta(1-t)V_i(\tau,s)g(s,u(s),v(s))ds \\
&= \eta(1-t)T_i(u,v)(\tau), \text{ para todo } \tau\in[0,1]
\end{aligned}
$$

Acá se observa que para cada t en el intervalo $[0,1]$,

$$T_i(u,v)(t) \geq \eta(1-t)T_i(u,v)(\tau), \text{ para todo } \tau \in [0,1]$$

Esto significa que para cada t, la desigualdad acontece en todo el recorrido de τ, por lo cual,

$$T_i(u,v)(t) \geq \eta(1-t)\left\|T_i(u,v)\right\|$$

Por otro lado, usando también (56)

$$\begin{aligned}
T_i(u,v)(t) &= \int_0^1 U_i(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_i(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \\
&\geq \int_0^1 \eta(1-t)U_j(\tau,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 \eta(1-t)V_j(\tau,s)g(s,u(s),v(s))ds \\
&= \eta(1-t)T_j(u,v)(\tau), \text{ para todo } \tau \in [0,1]
\end{aligned}$$

entonces con el mismo razonamiento del caso anterior,

$$T_i(u,v)(t) \geq \eta(1-t)\left\|T_j(u,v)\right\|, \ \forall i,j = 1,2$$

Consecuentemente, se deduce que

$$T_1(u,v)(t) \geq \eta(1-t)\left\|(T_1(u,v),T_2(u,v))\right\|_1$$
$$T_2(u,v)(t) \geq \eta(1-t)\left\|(T_1(u,v),T_2(u,v))\right\|_1$$

Luego, de la definición de K se infiere que $T(u,v) = ((T_1(u,v),T_2(u,v)) \in K$, es decir, $T\left(\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)\right) \subset K$ □

Proposición 3. *Sea* $0 < r < R$*. El operador* $T : \overline{B_R(0)}\backslash B_r(0) \to K$*, es continuo.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $T_1, T_2 : \overline{B_R(0)}\backslash B_r(0) \longrightarrow \mathcal{C}_+([0,1])$ son operadores continuos.

Para ello, sea $\{(u_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$ una sucesión tal que $(u_n,v_n) \to (u,v) \in \overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$. Equivalentemente

$$\left\|(u_n,v_n)-(u,v)\right\|_1 \to 0, \quad n\to\infty$$

Procediendo para T_1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T_1\left(u_n, v_n\right)(t) - T_1(u,v)(t) &= \int_0^1 U_1(t,s) f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) ds + \int_0^1 V_1(t,s) g\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) ds \\
&\quad - \int_0^1 U_1(t,s) f(s, u(s), v(s)) ds - \int_0^1 V_1(t,s) g(s, u(s), v(s)) ds \\
&= \int_0^1 U_1(t,s)\left[f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - f(s, u(s), v(s))\right] ds \\
&\quad + \int_0^1 V_1(t,s)\left[g\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - g(s, u(s), v(s))\right] ds
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la estimativa E1) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mid T_1\left(u_n, v_n\right)(t) - T_1(u,v)(t) \mid &\leq \int_0^1 \rho \left| f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - f(s, u(s), v(s)) \right| ds + \\
&\quad + \int_0^1 \rho \left| g\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - g(s, u(s), v(s)) \right| ds
\end{aligned}$$

Sea $M = \sup\left\{\|(u,v)\|_1, \|(u_n, v_n)\|\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces existe una constante positiva $a > 0$ tal que $r \leq M < a$, además, sea $b = \frac{a}{\eta r}$, se verifica que $\frac{1}{b} = \frac{\eta r}{a} < 1$. Usando la estimativa E3), con constantes a y b,

$$\begin{aligned}
\left| f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - f(s, u(s), v(s)) \right| &\leq \left\| f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) \right\| + \| f(s, u(s), v(s)) \| \\
&\leq a^{\lambda_1} b^{\mu_1} f(s, 1, 1-s) + a^{\lambda_1} b^{\mu_1} f(s, 1, 1-s) \\
&= 2a^{\lambda_1} b^{\mu_1} f(s, 1, 1-s) \\
&= \frac{2a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s, 1, 1-s)
\end{aligned}$$

quedando

$$\left| f\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - f(s, u(s), v(s)) \right| \leq \frac{2a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s, 1, 1-s) \tag{65}$$

Del mismo modo se obtiene

$$\left| g\left(s, u_n(s), v_n(s)\right) - g(s, u(s), v(s)) \right| \leq \frac{2a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} g(s, 1-s, 1) \tag{66}$$

Por otro lado, como

$$\left(u_n, v_n\right), (u,v) \in \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0)$$

Podemos escoger $0 < \delta < \frac{1}{2}$, tal que

$$u_n(t) \geq \eta r\delta, \quad v_n(t) \geq \eta r\delta, \quad u(t) \geq \eta r\delta \ \text{ y } \ v(t) \geq \eta r\delta \ \text{ para } \ t \in [\delta, 1-\delta]$$

Siendo, $f(s,u(s),v(s)), g(s,u(s),v(s))$ uniformemente continua en $[\delta, 1-\delta] \times [\eta r\delta, R] \times [\eta r\delta, R]$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} |f(s,u_n(s),v_n(s)) - f(s,u(s),v(s))| = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} |g(s,u_n(s),v_n(s)) - g(s,u(s),v(s))| = 0$$

uniformemente en $s \in [\delta, 1-\delta]$. Del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\delta}^{1-\delta} |f(s,u_n(s),v_n(s)) - f(s,u(s),v(s))|\, ds \to 0 \\ \displaystyle\int_{\delta}^{1-\delta} |g(s,u_n(s),v_n(s)) - g(s,u(s),v(s))|\, ds \to 0 \end{array}\right., \text{ cuando } n \to +\infty \qquad (67)$$

Además, para $\varepsilon > 0$, existe δ con $0 < \delta < \frac{1}{2}$, tal que, de la hipótesis H1) (la relación (22) y (27)) aplicada en (65) y (66) se consigue respectivamente

$$\int_{[0,\delta]\cup[1-\delta,1]} |f(s,u_n(s),v_n(s)) - f(s,u(s),v(s))|\, ds \leq \int_{[0,\delta]\cup[1-\delta,1]} \frac{2a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s,1,1-s)ds < \varepsilon/4$$

y

$$\int_{[0,\delta]\cup[1-\delta,1]} |g(s,u_n(s),v_n(s)) - g(s,u(s),v(s))|\, ds \leq \int_{[0,\delta]\cup[1-\delta,1]} \frac{2a^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta r)^{\mu_2}} g(s,1-s,1)ds < \varepsilon/4$$

La convergencia en (67) permite que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq n_0$ entonces:

$$\int_{\delta}^{1-\delta} |f(s,u_n(s),v_n(s)) - f(s,u(s),v(s))|\, ds < \varepsilon/4$$

y

$$\int_{\delta}^{1-\delta} |g(s,u_n(s),v_n(s)) - g(s,u(s),v(s))|\, ds < \varepsilon/4$$

Consecuentemente, siendo que $[0,1] = [0,\delta] \cup [\delta, 1-\delta] \cup [1-\delta, 1]$, las acotaciones de las integrales sobre $[0,\delta] \cup [1-\delta,1]$ y $[\delta, 1-\delta]$ permiten que

$$\|T_1(u_n,v_n) - T_1(u,v)\| \leq \varepsilon$$

y con este resultado, $T_1(u,v)$ es un operador continuo. Con los mismos argumentos se demuestra que $T_2(u,v)$ es un operador continuo en $\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$, así, T es continuo. $\square$

Proposición 4. *Sea* $0<r<R$. *El operador continuo* $T:\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)\to K$ *es un operador compacto.*

Demostración. Sea $B\subset\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$ un subconjunto acotado, se debe demostrar que $T(B)$ es relativamente compacto.

Afirmación 1: $T(B)$ es uniformemente acotado.

En efecto, por ser $B\subset\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$ un subconjunto acotado, existe $M>0$ tal que $\|(u,v)\|_1\le M, \quad \forall (u,v)\in B$. Luego, aplicando la Proposición 1 para $a=M$, $b=\frac{M}{\eta r}$ y cada $i=1,2$, se tiene

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &\le \rho\int_0^1 \frac{M^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}f(s,1,1-s)ds+\rho\int_0^1 \frac{M^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}g(s,1-s,1)ds \\ &= \rho\frac{M^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}\left[\int_0^1 f(s,1,1-s)ds+\int_0^1 g(s,1-s,1)ds\right] \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis H1) (la relación (22) y (27)) a las dos integrales, se deduce que

$$T_i(u,v)(t)\le\rho\frac{M^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}\tilde{C}\le C, \text{ donde } \tilde{C}=\int_0^1 f(s,1,1-s)ds+\int_0^1 g(s,1-s,1)ds$$

luego,

$$\|T_i(u,v)\|\le C, i=1,2, \quad \forall (u,v)\in B$$

Equivalentemente

$$\|T(u,v)\|_1=\max_{1\le i\le 2}\|T_i(u,v)\|\le C, \ \forall (u,v)\in B$$

luego, $T(B)$ es uniformenente acotada y esto demuestra la afirmación 1.

Afirmación 2: $T(B)$ es un operador equicontinuo.

Es suficiente demostrar que cada $T_i(u,v)$ tiene derivada acotada, en efecto

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1 U_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds+\int_0^1 V_1(t,s)g(s,u(s),v(s))ds$$

Sustituyendo $U_1(t,s)$ y $V_1(t,s)$ se tiene

$$T_1(u,v)(t) = \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)f(s,u(s),v(s))d\beta(t)ds+$$
$$+\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \frac{(1-t)}{\xi}\int_0^1\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)g(s,u(s),v(s))d\alpha(t)ds$$

De la definición de función de Green, la cual se escribió como $G(t,s)$, se tiene

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds = \int_0^t s(1-t)f(s,u(s),v(s))ds + \int_t^1 t(1-s)f(s,u(s),v(s))ds$$

Derivando respecto a t por la Regla de Leibnitz, se obtiene:

$$\left(\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\right)' = -\int_0^t sf(s,u(s),v(s))ds + \int_t^1 (1-s)f(s,u(s),v(s))ds$$

Luego, derivando respecto a t el operador $T_1(u,v)(t)$ nos conduce a la expresión

$$\begin{aligned} T_1'(u,v)(t) &= \frac{-\xi_1}{\xi}\int_0^1\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)f(s,u(s),v(s))d\beta(t)ds - \int_0^t sf(s,u(s),v(s))ds \\ &\quad + \int_t^1 (1-s)f(s,u(s),v(s))ds - \frac{1}{\xi}\int_0^1\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)g(s,u(s),v(s))d\alpha(t)ds \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto a ambos lados de la igualdad y aplicando Fubini, acontece

$$\begin{aligned} |T_1'(u,v)(t)| &= \Bigg|-\frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 f(s,u(s),v(s))ds\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) - \int_0^t sf(s,u(s),v(s))ds \\ &\quad + \int_t^1 (1-s)f(s,u(s),v(s))ds - \frac{1}{\xi}\int_0^1 g(s,u(s),v(s))ds\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t)\Bigg| \\ &\leq \frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 |f(s,u(s),v(s))|ds\left|\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t)\right| + \int_0^t s|f(s,u(s),v(s))|ds + \\ &\quad \int_t^1 (1-s)|f(s,u(s),v(s))|ds + \frac{1}{\xi}\int_0^1 |g(s,u(s),v(s))|ds\left|\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t)\right| \end{aligned}$$

Como σ_1 y σ_2 son funciones de $L^\infty(0,1)$, existen constantes positivas c_1 y c_2 tal que

$$\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) \leq c_2, \qquad \int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) \leq c_1$$

Luego,

$$\begin{aligned}|T_1'(u,v)(t)| &= \frac{c_2\xi_1}{\xi}\int_0^1 |f(s,u(s),v(s))|ds + \int_0^t s|f(s,u(s),v(s))|ds + \\ &\int_t^1 (1-s)|f(s,u(s),v(s))|ds + \frac{c_1}{\xi}\int_0^1 |g(s,u(s),v(s))|ds\end{aligned}$$

Tomando a y b como en la proposición anterior y aplicando (55) de E3), se obtiene la siguiente acotación

$$\begin{aligned}|T_1'(u,v)(t)| &\leq \frac{c_2\xi_1}{\xi}\int_0^1 \frac{a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s,1,1-s)ds + \int_0^t s\frac{a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s,1,1-s)ds + \\ &\int_t^1 (1-s)\frac{a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}} f(s,1,1-s)ds + \frac{c_1}{\xi}\int_0^1 \frac{a^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta r)^{\mu_2}} g(s,1-s,1)ds\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}|T_1'(u,v)(t)| &\leq \frac{a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}\left(\frac{c_2\xi_1}{\xi}\int_0^1 f(s,1,1-s)ds + \int_0^t sf(s,1,1-s)ds + \right. \\ &\left. + \int_t^1 (1-s)f(s,1,1-s)ds\right) + \frac{a^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta r)^{\mu_2}}\frac{c_1}{\xi}\int_0^1 g(s,1-s,1)ds\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la hipótesis H1) (la relación (22) y (27)) en la desigualdad anterior, se tiene que existe el número positivo C tal que

$$\begin{aligned}C &= \frac{a^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta r)^{\mu_1}}\left(\frac{c_2\xi_1}{\xi}\int_0^1 f(s,1,1-s)ds + \int_0^t sf(s,1,1-s)ds + \right. \\ &\left. + \int_t^1 (1-s)f(s,1,1-s)ds\right) + \frac{a^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta r)^{\mu_2}}\frac{c_1}{\xi}\int_0^1 g(s,1-s,1)ds\end{aligned}$$

y con esto, $|T_1'(u,v)(t)| \leq C$, que en concordancia con el teorema 4, se concluye que T_1 es equicontinuo. Análogamente, se consigue $|T_2'(u,v)(t)| \leq C$, lo cual implica que T_2 es equicontinuo. Por lo tanto, $T(B)$ es equicontinuo.

De ambas afirmaciones y por el Teorema de Arzelá-Ascoli, se deduce que $T(B)$ es relativamente compacto para cada conjunto acotado $B \subset \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0)$. $\square$

Proposición 5. *Sea* (u,v) *una solución positiva del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (17)-(19). Entonces existe* $a \in \mathbb{R}$*, tal que* $0 < a < 1$ *y se verifica*

$$\begin{cases} a(1-t) \leq u(t) \leq \frac{1}{a}(1-t) \\ a(1-t) \leq v(t) \leq \frac{1}{a}(1-t) \end{cases}, t \in [0,1]$$

Demostración. De la proposición 4 , se tiene que $(u,v)\in K\backslash\{0\}$, consecuentemente

$$\eta\|(u,v)\|_1(1-t)\leq u(t)\leq \|(u,v)\|_1$$
$$\eta\|(u,v)\|_1(1-t)\leq v(t)\leq \|(u,v)\|_1$$

Escogiendo $a=\min\left\{\eta\|(u,v)\|_1,\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{2}\right\}$, entonces

$$a(1-t)\leq \eta\|(u,v)\|_1(1-t)\leq u(t)$$

Siendo que las expresiones obtenidas en (48) y (49) son las soluciones en su representación integral del sistema diferencial (34)-(36), poniendo $p(t)=f(t,u(t),v(t))$ y $q(t)=g(t,u(t),v(t))$, las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones del sistema (17)-(19), donde

$$u(t)=\int_0^1 U_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds+\int_0^1 V_1(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \tag{68}$$

y

$$v(t)=\int_0^1 U_2(t,s)f(s,u(s),v(s))ds+\int_0^1 V_2(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \tag{69}$$

Procediendo con la función $u(t)$, sea b una constante tal que $\frac{\|(u,v)\|_1}{b}<1$ y $b>\frac{1}{\eta}$, luego aplicando las estimativas E1) y E3) como en la proposición 3, se tiene

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 U_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds+\int_0^1 V_1(t,s)g(s,u(s),v(s))ds\\
&\leq \rho(1-t)\int_0^1 f(s,u(s),v(s))ds+\rho(1-t)\int_0^1 g(s,u(s),v(s))ds\\
&\leq \rho(1-t)\int_0^1 f\left(s,b,\frac{\eta\|(u,v)\|_1}{b}(1-s)\right)ds+\rho(1-t)\int_0^1 g\left(s,\frac{\eta\|(u,v)\|_1}{b}(1-s),b\right)ds\\
&\leq \frac{b^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta\|(u,v)\|_1)^{\mu_1}}\rho(1-t)\int_0^1 f(s,1,1-s)ds+\frac{b^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta\|(u,v)\|_1)^{\mu_2}}\rho(1-t)\int_0^1 g(s,1-s,1)ds\\
&= c(1-t)
\end{aligned}$$

donde

$$c=\frac{b^{\lambda_1+\mu_1}}{(\eta\|(u,v)\|_1)^{\mu_1}}\rho\int_0^1 f(s,1,1-s)ds+\frac{b^{\lambda_2+\mu_2}}{(\eta\|(u,v)\|_1)^{\mu_2}}\rho\int_0^1 g(s,1-s,1)ds$$

Tomando a de tal manera que $c < \frac{1}{a}$, de la desigualdad anterior se obtiene

$$u(t) \leq \frac{1}{a}(1-t), \quad t \in [0,1]$$

y así,

$$a(1-t) \leq u(t) \leq \frac{1}{a}(1-t), \quad t \in [0,1]$$

Con los mismos argumentos anteriores se demuestra

$$a(1-t) \leq v(t) \leq \frac{1}{a}(1-t), \; t \in [0,1]$$

□

Teorema 9 (del punto fijo de expansión y compresión del cono de tipo norma)**.** *Sea K un cono y Ω_1, Ω_2 dos subconjuntos abiertos y acotados de un espacio de Banach E, tal que $0 \in \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ y $T : K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right) \to K$ un operador completamente continuo. Suponga que una de las condiciones se verifica*

C1) $\|Tu\| \leq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Tu\| \geq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

C2) $\|Tu\| \geq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Tu\| \leq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Entonces T tiene al menos un punto fijo en $K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.

Demostración. Ver Dajun y Lakshmikanthan (1988). □

4.4 Interpretación de los resultados

Teorema 10. *Suponga que $f \in C^0((0,1) \times [0,+\infty) \times (0,+\infty), [0,+\infty))$, $g \in C^0((0,1) \times (0,+\infty) \times [0,+\infty), [0,+\infty))$ verifican la hipótesis (H1) y sean*

$$\xi_1 = \int_0^1 (1-t)\sigma_1(t)d\alpha(t), \;\; \xi_2 = \int_0^1 (1-t)\sigma_2(t)d\beta(t)$$

para σ_1 y σ_2 en $L^\infty(0,1)$ tal que $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, además $\xi = 1 - \xi_1 \cdot \xi_2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, $\mu_1 + \mu_2 < 1$. Entonces existe una única solución positiva (u,v) del sistema de ecuaciones diferenciales (17)-(19).

Demostración. 1. **Existencia:** Sean $0 < r < 1 < R$. De la proposición 4, el operador continuo $T : \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0) \to K$ es un operador compacto. Por el teorema 6, de extensión de Tietze's que es tratado en Dugundji (1951), el operador $T : \overline{B_R(0)} \to K$ es continuo y por ende, resulta ser un operador compacto. Sea $(u, v) \in \partial B_r(0)$, entonces $r = \|(u, v)\|_1$. Usando la desigualdad (52) en $U_1(t, s)$ se consigue

$$\begin{aligned}
U_1(t,s) &= \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)G(t,s)d\beta(t) + G(t,s) \\
&\geq \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)s(1-s)d\beta(t) + t(1-t)s(1-s) \\
&\geq \frac{(1-t)\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)s(1-s)d\beta(t) \\
&= \left[\frac{\xi_1}{\xi}\int_0^1 \sigma_2(t)t(1-t)d\beta(t)\right](1-t)s(1-s) \\
&\geq \nu(1-t)s(1-s)
\end{aligned}$$

esto es,

$$U_1(t,s) \geq \nu(1-t)s(1-s)$$

Donde ν es el número definido según (50) del ejemplo 4. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
V_1(t,s) &= \frac{(1-t)}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)G(t,s)d\alpha(t) \geq \frac{(1-t)}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)t(1-t)s(1-s)d\alpha(t) \\
&= \left[\frac{1}{\xi}\int_0^1 \sigma_1(t)t(1-t)s(1-s)d\alpha(t)\right](1-t)s(1-s) \\
&\geq \nu(1-t)s(1-s)
\end{aligned}$$

o también,

$$V_1(t,s) \geq \nu(1-t)s(1-s)$$

De manera similar, las mismas desigualdades acontecen para $U_2(t, s)$ y $V_2(t, s)$, de modo que, para $t \in [0, 3/4]$ y cada $i = 1, 2$ se obtiene:

$$T_i(u,v)(t) \geq \int_0^1 \nu(1-t)s(1-s)f(s,u(s),v(s))ds \geq \frac{\nu}{4}\int_0^1 s(1-s)f(s,u(s),v(s))ds$$

es decir,

$$T_i(u,v)(t) \geq \frac{\nu}{4}\int_0^1 s(1-s)f(s,u(s),v(s))ds \tag{70}$$

Como $(u,v) \in \partial B_r(0)$, entonces u y v satisfacen $\begin{cases} \eta r(1-t) \le u(t) \le r \\ \eta r(1-t) \le v(t) \le r \end{cases}$. Consecuentemente para $t \in [0,1]$ y $r \le \frac{1}{2} < 1$; de la hipótesis sobre f, aplicada a la desigualdad (70) resulta

$$T_i(u,v)(t) \ge \frac{\nu}{4}\int_0^1 s(1-s)f(s,\eta r(1-s),1)ds \tag{71}$$

Usando (20) de la hipótesis H1) a la función f en (71) se consigue

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &\ge \frac{\nu}{4}(\eta r)^{\lambda_1}\int_0^1 s(1-s)f(s,1-s,1)ds \\ &= \left(\frac{\nu}{4}\eta^{\lambda_1}\int_0^1 s(1-s)f(s,1-s,1)ds\right) r^{-(1-\lambda_1)}\cdot r \\ &\ge r = \|(u,v)\|_1 \end{aligned}$$

es decir, $T_i(u,v)$ está acotado inferiormente según la expresión

$$T_i(u,v)(t) \ge r = \|(u,v)\|_1,\ \forall t \in [0,1],\ \forall (u,v) \in \partial B_r(0) \tag{72}$$

donde r se tiene que tomar de tal manera que:

$$0 < r \le \min\left\{\left(\frac{v}{4}\eta^{\lambda_1}\int_0^1 s(1-s)f(s,1-s,1)ds\right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}},\ \frac{1}{2}\right\}$$

De (72) se concluye que

$$\|(u,v)\|_1 \le \|T(u,v)\|_1,\ \forall (u,v) \in \partial B_r(0) \tag{73}$$

Para determinar la acotación superior de $T_i(u,v)(t)$, sea $(u,v) \in \partial B_R(0)$, es decir, $R = \|(u,v)\|_1$. Aplicando la estimativa (53) para cada $i = 1,2$ al operador $T_i(u,v)(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &= \int_0^1 U_i(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \int_0^1 V_i(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \\ &\le \rho\int_0^1 f(s,u(s),v(s))ds + \rho\int_0^1 g(s,u(s),v(s))ds \end{aligned}$$

$$T_i(u,v)(t) \leq \rho \int_0^1 f(s,u(s),v(s))ds + \rho \int_0^1 g(s,u(s),v(s))ds \tag{74}$$

Siendo que $(u,v) \in \partial B_R(0)$, u y v también satisfacen $\begin{cases} \eta R(1-t) \leq u(t) \leq R \\ \eta R(1-t) \leq v(t) \leq R \end{cases}$, para todo $t \in [0,1]$.

Usando la hipótesis H1) (relación (21)) y consecuencia C2) (relación (26)) a f y g respectivamente en (74) se consigue

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &\leq \rho \int_0^1 f(s,R,\eta R(1-s))ds + \rho \int_0^1 g(s,\eta R(1-s),R)ds \\ &\leq \rho(\eta R)^{-\mu_1} \int_0^1 f(s,R,(1-s))ds + \rho(\eta R)^{-\mu_2} \int_0^1 g(s,(1-s),R)ds \end{aligned}$$

que tomando $R \geq 1/\eta$,

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &\leq \rho \int_0^1 f(s,R,\eta R(1-s))ds + \rho \int_0^1 g(s,\eta R(1-s),R)ds \\ &\leq \rho(\eta R)^{-\mu_1} \int_0^1 f(s,R,(1-s))ds + \rho(\eta R)^{-\mu_2} \int_0^1 g(s,(1-s),R)ds \\ &\leq \rho \int_0^1 f(s,R,(1-s))ds + \rho \int_0^1 g(s,(1-s),R)ds \end{aligned}$$

es decir,

$$T_i(u,v)(t) \leq \rho \int_0^1 f(s,R,(1-s))ds + \rho \int_0^1 g(s,(1-s),R)ds \tag{75}$$

Para $R \geq 2 > 1$, aplicando consecuencia C1) y consecuencia C3) de la hipótesis central de investigación a f y g en (75) se tiene

$$\begin{aligned} T_i(u,v)(t) &\leq \rho R^{\lambda_1} \int_0^1 f(s,1,(1-s))ds + \rho R^{\lambda_2} \int_0^1 g(s,(1-s),1)ds \\ &\leq 1.\rho R^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\}} \left(\int_0^1 f(s,1,(1-s))ds + \int_0^1 g(s,(1-s),1)ds \right) \\ &\leq R.\rho R^{-(1-\max\{\lambda_1,\lambda_2\})} \left(\int_0^1 f(s,1,(1-s))ds + \int_0^1 g(s,(1-s),1)ds \right) \\ &\leq R = \|(u,v)\|_1 \end{aligned}$$

es decir,

$$T_i(u,v)(t) \leq R = \|(u,v)\|_1, \ \forall t \in [0,1], \ \forall (u,v) \in \partial B_R(0) \tag{76}$$

donde se ha tomado R de tal manera que

$$R \geq \max\left\{\left(\rho\int_0^1 f(s,1,(1-s))ds+\rho ds\right)^{\frac{1}{1-\max\{\lambda_1,\lambda_2\}}}, \frac{1}{\eta}, 2\right\}$$

De (76) se concluye que

$$\|T(u,v)\|_1 \leq \|(u,v)\|_1,\ \forall (u,v)\in \partial B_R(0) \tag{77}$$

Luego, siendo que el operador $T:\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)\to K$ satisface (73) y (77), aplicando el Teorema 7, del punto fijo, dicho operador tiene un punto fijo (u,v) en $\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$ y por ende una solución positiva en $\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$.

2. **Unicidad:** Suponga que $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ son dos soluciones positivas en $\overline{B_R(0)}\backslash B_r(0)$ del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (17)-(19). De la proposición 5, existen $a,b\in\mathbb{R}$, tal que $(a,b)\in(0,1)\times(0,1)$, verificando

$$\begin{cases} a(1-t)\leq u_1(t), \leq \frac{1}{a}(1-t) \\ a(1-t)\leq v_1(t)\leq \frac{1}{a}(1-t)\end{cases},\quad t\in[0,1] \tag{78}$$

y

$$\begin{cases} b(1-t)\leq u_2(t)\leq \frac{1}{b}(1-t) \\ b(1-t)\leq v_2(t)\leq \frac{1}{b}(1-t)\end{cases}, t\in[0,1] \tag{79}$$

Trabajando convenientemente las desigualdades de (78) y (79) para u_1 y u_2, se consigue:

$$u_2(t)\leq \frac{1}{b}(1-t)=\frac{a}{ba}(1-t)\leq\frac{1}{ba}u_1(t)$$

$$u_2(t)\geq b(1-t)=\frac{ba}{a}(1-t)\geq bau_1(t),$$

de donde, siguiendo la cadena de desigualdades se tiene

$$abu_1(t)\leq u_2(t)\leq\frac{1}{ab}u_1(t), ;\forall t\in[0,1] \tag{80}$$

Análogamente, para v_1 y v_2 se deduce que

$$abv_1(t)\leq v_2(t)\leq\frac{1}{ab}v_1(t),\ \forall t\in[0,1] \tag{81}$$

Como a y b son distintos de uno, sea

$$S = \sup\left\{a \;:\; au_1(t) \leq u_2(t) \leq \frac{1}{a}u_1(t),\; av_1(t) \leq v_2(t) \leq \frac{1}{a}v_1(t),\; t \in [0,1]\right\} \tag{82}$$

De la definición de supremo, se deduce que $0 < ab \leq S < 1$, además, S también cumple (80) y (81), por lo cual,

$$Su_1(t) \leq u_2(t) \leq \frac{1}{S}u_1(t), \;\; Sv_1(t) \leq v_2(t) \leq \frac{1}{S}v_1(t),\; t \in [0,1] \tag{83}$$

Si aplicamos hipótesis H1) para f usando las desigualdades de (83), se obtiene

$$\begin{aligned} f\left(t, u_2(t), v_2(t)\right) &\geq f\left(t, Su_1(t), \frac{1}{S}v_1(t)\right) \geq S^{\lambda_1+\mu_1} f\left(t, u_1(t), v_1(t)\right) \\ &\geq S^{\lambda} f\left(t, u_1(t), v_1(t)\right) \end{aligned}$$

esto es,

$$f\left(t, u_2(t), v_2(t)\right) \geq S^{\lambda} f\left(t, u_1(t), v_1(t)\right) \tag{84}$$

donde, $\lambda = \max\left\{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2\right\}$, tal que $\lambda < 1$. Consecuentemente, usando (84), se tiene

$$\begin{aligned} u_2(t) &= T\left(u_2, v_2\right)(t) = \int_0^1 U_1(t,s) f\left(s, u_2(s), v_2(s)\right) ds + \int_0^1 V_1(t,s) g\left(s, u_2(s), v_2(s)\right) ds \\ &\geq S^{\lambda}\left(\int_0^1 U_1(t,s) f\left(s, u_1(s), v_1(s)\right) ds + \int_0^1 V_1(t,s) g\left(s, u_1(s), v_1(s)\right) ds\right) \\ &= S^{\lambda} T\left(u_1, v_1\right)(t) = S^{\lambda} u_1(t) \end{aligned}$$

con lo cual,

$$u_2(t) \geq S^{\lambda} u_1(t) \tag{85}$$

Usando los mismos argumentos, se obtiene las desigualdades:

$$v_2(t) \geq s^{\lambda} v_1(t), \quad u_1(t) \geq s^{\lambda} u_2(t) \;\text{ y }\; v_1(t) \geq s^{\lambda} v_2(t) \tag{86}$$

Note que $(S, \lambda) \in (0,1) \times (0,1)$, y esto hace que $S^{\lambda} > S$. Además, combinando adecuadamente las desigualdades de (85) y (86) se obtiene la relación

$$S^{\lambda}u_1(t) \leq u_2(t) \leq \frac{u_t}{S^{\lambda}}$$

que es satisfecha para S^{λ} también. Como $S < S^{\lambda}$, consecuentemente de (82), se tiene una contradicción con el supremo S. Por lo tanto, se tiene la unicidad de la solución positiva.

$\square$

Este teorema es el principal resultado de nuestro problema de investigación, pues asegura la existencia y unicidad del sistema diferencial (1)-(3) que mediante las transformaciones de (16) nos han llevado al sistema (17)-(19).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 Conclusiones

1. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} -\xi_2 & 1 \\ 1 & -\xi_1 \end{pmatrix}$ al considerarse $\xi = 1 - \xi_1\xi_2 \neq 0$, es una hipótesis fundamental para que se pueda representar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante una integral.

2. Las consecuencias obtenidas de la hipótesis H1), desempeñaron un papel importante para demostrar que el operador $T : \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0) \to K$ está bien definido.

3. Las proposiciones $1, 2, 3$ y el Teorema de Arzelá -Ascoli, contribuyó para demostrar el hecho de que el operador T es completamente continuo.

4. El operador continuo $T : \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0) \to K$ se extendió al operador $T : \overline{B_R(0)} \to K$, debido al teorema de extensión de Tietze's dado en Dugundji (1951).

5. La existencia de una solución positiva en $\overline{B_R(0)} \backslash B_r(0)$ es consecuencia de tener un punto fijo el operador $T : \overline{B_R(0)} \backslash B_r(0) \to K$, como aplicación del teorema del punto fijo de expansión y compresión del cono de tipo norma, dado en Dajun y Lakshmikanthan (1988).

5.2 Sugerencias

- Se sugiere realizar un trabajo de investigación cuando se construya un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con valores de frontera del tipo convolución.

- Se sugiere generalizar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con valores de frontera en mayores dimensiones.

Referencias bibliográficas

[1] Asif, N. A., & Khan, R. A. (2012). Positive solutions to singular system withfour-point coupled boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 386(2), 848-861.

[2] Asif, N. A., Khan, R. A., & Henderson, J. (2010). Existence of positive solutions to a system of singular boundary value problems. Dynamic Systems and Applications, 19(2), 395-404.

[3] Botelho, G., Pellegrino, D. & Teixeira, E. (2015). Fundamentos de análise funcional (2da ed.). SBM.

[4] Cheng, X., & Zhong, C. (2005). Existence of positive solutions for a second-order ordinary differential system. Journal of Mathematical Analysis and Applications,312(1), 14-23.

[5] Cui, Y., Liu, L., & Zhang, X. (2013). Uniqueness and existence of positive solutions for singular differential systems with coupled integral boundary value problems. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2013). Hindawi Publishing Corporation.

[6] Cui, Y., & Sun, J. (2012). On existence of positive solutions of coupled integral boundary value problems for a nonlinear singular superlinear differential system.Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2012(41), 1- 13.

[7] Cui, Y., & Zou, Y. (2015). An existence and uniqueness theorem for a second order nonlinear system with coupled integral boundary value conditions. Applied Mathematics and computation, 2015(256), 438- 444.

[8] Dajun, G. & Lakshmikanthan, V.(1988). Nonlinear problems in abstract cones (Vol. 5). Academic Press, Inc.N.Y.

[9] Doering, C. & Lopes A. (2016). Equações diferenciais ordinárias. Instituto de matemática pura e aplicada-IMPA. (6ª Ed.). IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. 423 p.

[10] Dugundji, J.(1951). An extension of Tietze's Theorem, Pacific J. Math., 1, 353-367. Liu, B., Liu, L., y Wu, Y. (2008). Positive solutions for a singular second-order threepoint boundary value problem. Applied Mathematics and Computation, 196(2), 532- 541.

[11] Lü, H., Yu, H., & Liu, Y. (2005). Positive solutions for singular boundary value problems of a coupled system of differential equations. Journal of MathematicalAnalysis and Applications, 302(1), 14-29.

[12] Reed, M., & Simon, B. (1981). I: Functional analysis (Vol. 1). Academic press.

[13] Rudin, W. (1987). Análisis real y complejo (3^{a} ed). McGRAW-HILL.