

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA**  
**ESCUELA DE POSGRADO**  
**Programa de Doctorado en Matemática**



**UNS**  
**ESCUELA DE**  
**POSGRADO**

---

---

**Continuidad de atractores globales para ecuaciones de  
onda Riemannianas con amortiguamiento localizado  
óptimo en medida**

---

---

**Tesis para optar el grado de  
Doctor en Matemática**

**Autor:**

**Mg. Mendoza Arenas, Ruben Dario**  
**Código Orcid: 0000-0002-7861-7946**  
**DNI. N° 10797959**

**Asesor:**

**Dr. Núñez Villa, Julio César**  
**Código ORCID: 0000-0002-9190-8676**  
**DNI N° 45479946**

**Línea de investigación**  
**Ecuaciones diferenciales y análisis numérico**

**Nuevo Chimbote - PERÚ**  
**2025**



**UNS**  
ESCUELA DE  
POSGRADO

## CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Julio César Nuñez Villa, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "CONTINUIDAD DE ATRACTORES GLOBALES PARA ECUACIONES DE ONDA RIEMANNIANAS CON AMORTIGUAMIENTO LOCALIZADO ÓPTIMO EN MEDIDA", por el magister Rubén Darío Mendoza Arenas, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, enero del 2025.

Dr. Julio César Nuñez Villa  
ASESOR  
CODIGO ORCID: 0000-0002-9190-8676  
DNI N° 45479946



**UNS**  
ESCUELA DE  
POSGRADO

**CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR**

“Continuidad de Atractores Globales para Ecuaciones de Onda Riemannianas con Amortiguamiento Localizado Óptimo en Medida”.

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra  
PRESIDENTE  
CODIGO ORCID: 0000-0002-5474-8423  
DNI N°17850934

Dr. Teodoro Moore Flores  
SECRETARIO  
CODIGO ORCID: 0000-0002-1755-3459  
DNI N° 32763522

Dr. Julio César Nuñez Villa  
VOCAL  
CODIGO ORCID: 0000-0002-9190-8676  
DNI N° 45479946



**UNS**  
ESCUELA DE  
POSGRADO

### ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los catorce días del mes de enero del año 2025, siendo las 12:00 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 419-2024-EPG-UNS de fecha 13.08.2024, conformado por los docentes: Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario) y Dr. Julio César Nuñez Villa (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada : **"CONTINUIDAD DE ATRACTORES GLOBALES PARA ECUACIONES DE ONDA RIEMANNIANAS CON AMORTIGUAMIENTO LOCALIZADO ÓPTIMO EN MEDIDA"**; presentado por el tesista Rubén Darío Mendoza Arenas, egresado del programa de Doctorado en Matemática

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 028-2025-EPG-UNS de fecha 11 de enero de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de Diecinueve.

Siendo las 13:40 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

  
Dr. Lizandro Baldomero Reyna Zegarra  
Presidente

  
Dr. Teodoro Moore Flores  
Secretario

  
Dr. Julio César Nuñez Villa  
Vocal/Asesor



## Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Ruben Dario MENDOZA ARENAS  
Título del ejercicio: DOCTORADO 2024 - UNS  
Título de la entrega: Informe tesis\_RUBEN MENDOZA \_22-01-2025.pdf  
Nombre del archivo: Informe\_tesis\_RUBEN\_MENDOZA\_\_22-01-2025.pdf  
Tamaño del archivo: 1.79M  
Total páginas: 77  
Total de palabras: 21,757  
Total de caracteres: 103,535  
Fecha de entrega: 22-ene.-2025 12:13a. m. (UTC-0500)  
Identificador de la entrega... 2431690423

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA  
ESCUELA DE POSGRADO  
PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA



---

**“Continuidad de atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida”**

---

Tesis para optar el grado Académico de  
Doctor en Matemática

Autor:  
Mg. Rubén Darío Mendoza Arenas

Asesor:  
Dr. Julio César Núñez Villa  
DNI N° 45479946  
Código ORCID: 0000-0002-9190-8676

Línea de investigación  
Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ  
2025

## INFORME DE ORIGINALIDAD

22%

INDICE DE SIMILITUD

21%

FUENTES DE INTERNET

2%

PUBLICACIONES

1%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="http://laccei.org">laccei.org</a> Fuente de Internet	12%
2	<a href="http://repositorio.unac.edu.pe">repositorio.unac.edu.pe</a> Fuente de Internet	3%
3	<a href="http://arxiv.org">arxiv.org</a> Fuente de Internet	2%
4	<a href="http://repositorio.uns.edu.pe">repositorio.uns.edu.pe</a> Fuente de Internet	1%
5	"Long-time dynamics of two classes of beam and plate equations", 'Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA)' Fuente de Internet	1%
6	<a href="http://idus.us.es">idus.us.es</a> Fuente de Internet	1%
7	<a href="http://cybertesis.unmsm.edu.pe">cybertesis.unmsm.edu.pe</a> Fuente de Internet	1%
8	<a href="http://pdm.propesp.ufpa.br">pdm.propesp.ufpa.br</a> Fuente de Internet	<1%

## **Dedicatoria**

A Dios por ser el supremo creador de toda existencia en esta vida y en especial de la Matemática que es abstracta y hermosa y a mi familia por ser el motor y el impulso a ser mejor cada día.

# **Agradecimientos**

De manera especial a mi asesor y amigo Paulo Nicanor Seminario Huertas, por impulsarme a realizar esta Tesis en EDP.

También agradecer a mi amigo, el Dr. Julio César Núñez Villa, por ser parte de esta Tesis en la asesoría final.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>xii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN</b>	<b>4</b>
1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación . . . .	4
1.2 Antecedentes de la investigación . . . . .	8
1.3 Formulación del problema de investigación . . . . .	9
1.4 Delimitación del estudio . . . . .	10
1.4.1 Teóricas . . . . .	10
1.4.2 Espaciales . . . . .	10
1.4.3 Temporales . . . . .	10
1.5 Justificación e importancia de la investigación . . . . .	11
1.6 Objetivos de la Investigación: General y específicos . . . . .	12
1.6.1 Objetivo general . . . . .	12
1.6.2 Objetivos específicos . . . . .	12
1.6.3 Realidad genérica del problema . . . . .	12
1.6.4 Características de la realidad específica . . . . .	14
<b>II MARCO TEÓRICO</b>	<b>15</b>
2.1 Fundamentos básicos de la investigación . . . . .	15
2.1.1 Nociones Básicas de Geometría Riemanniana . . . . .	15
2.1.2 Geometría para la Región Óptima en Medida . . . . .	17
2.1.2.1 Condición de control óptima en medida . . . . .	17
2.1.2.2 Descomposición en conjuntos superpuestos . . . . .	19
2.1.3 Observabilidad y Continuación Única . . . . .	20
2.1.3.1 Un resultado de Triggiani y Yao . . . . .	20
2.1.3.2 Nueva desigualdad de observabilidad y continuación única . . . . .	21
2.1.4 Revisión Funcional de la Matemática . . . . .	22
2.1.4.1 Espacios de funciones . . . . .	22
2.1.4.2 Desigualdades . . . . .	28
2.1.5 Semigrupos . . . . .	29
2.1.6 Teoría de atractores . . . . .	31
2.1.7 Continuidad de atractores . . . . .	35

2.2	Revisión de la literatura sobre el problema ( $P_\beta$ ) . . . . .	36
2.2.1	Dinámica a largo plazo . . . . .	36
2.3	Marco conceptual . . . . .	42
<b>III</b>	<b>MARCO METODOLÓGICO</b>	<b>43</b>
3.1	Hipótesis central de la investigación . . . . .	43
3.2	Variables e indicadores de la investigación . . . . .	43
3.2.1	Definición conceptual . . . . .	43
3.2.2	Definición operacional . . . . .	44
3.2.3	Indicadores . . . . .	45
3.3	Métodos de la investigación . . . . .	45
3.4	Diseño o esquema de la investigación . . . . .	46
3.5	Población y muestra . . . . .	46
3.6	Actividades del proceso investigativo . . . . .	46
3.7	Técnicas e instrumentos de la investigación . . . . .	46
3.8	Procedimiento para la recolección de datos . . . . .	46
3.9	Técnicas de procesamiento y análisis de los datos . . . . .	47
<b>IV</b>	<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>48</b>
4.1	Resultados . . . . .	48
4.1.1	Existencia de un atractor exponencial . . . . .	48
4.1.1.1	Atractor exponencial . . . . .	48
4.1.2	Análisis de la continuidad . . . . .	53
4.2	Discusión . . . . .	57
<b>V</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>59</b>
5.1	Conclusiones . . . . .	59
5.2	Recomendaciones . . . . .	59
<b>VI</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>63</b>
<b>VII</b>	<b>ANEXOS</b>	<b>64</b>
7.1	Matriz de Consistencia . . . . .	64

# Índice de notaciones

1.  $M$ : Variedad Riemanniana compacta.
2.  $g$ : Métrica Riemanniana de  $M$ .
3.  $\omega \subset M$ : Región de amortiguamiento.
4.  $\chi_\epsilon(M)$ : Clase de conjuntos  $\epsilon$ -controlables en  $M$ .
5.  $u(t, x)$ : Desplazamiento de onda.
6.  $\partial_t u$ : Derivada temporal de  $u$ .
7.  $\partial_t^2 u$ : Derivada temporal de segundo orden de  $u$ .
8.  $\Delta u$ : Laplaciano de  $u$ .
9.  $f(u)$ : Función de no linealidad en  $u$ .
10.  $g(\partial_t u)$ : Amortiguamiento no lineal.
11.  $H_0^1(M)$ : Espacio de Sobolev con condición de frontera.
12.  $L^2(M)$ : Espacio de funciones cuadrado-integrables.
13.  $\epsilon$ : Parámetro de controlabilidad.
14.  $d$ : Función de potencial de escape.
15.  $\nabla d$ : Gradiente de  $d$ .
16.  $\text{Hess}(d)$ : Hessiano de  $d$ .
17.  $p_0, p_1$ : Funciones de términos potenciales.
18.  $T$ : Intervalo de tiempo.
19.  $C_T$ : Constante de observabilidad.
20.  $\text{med}_M(A)$ : Medida de Lebesgue de  $A$  en  $M$ .
21.  $\partial M$ : Borde de  $M$ .
22.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ : Producto interno en  $M$ .
23.  $\nu$ : Vector normal en  $\partial M$ .
24.  $V \subset M$ : Región de efectividad del amortiguamiento.
25.  $\inf_V |\nabla d|_g$ : Mínimo del gradiente de  $d$  en  $V$ .
26.  $W^{1,\infty}(M)$ : Espacio de funciones con derivada acotada.
27.  $\| \cdot \|_{L^2}$ : Norma en  $L^2(M)$ .

28.  $\|\cdot\|_{H^1}$ : Norma en  $H_0^1(M)$ .
29.  $\lambda$ : Constante de autovalor.
30.  $\text{dist}(x, \omega)$ : Distancia de  $x$  a  $\omega$ .
31.  $\|f(u)\|_{C^1}$ : Regularidad de  $f(u)$  en  $C^1$ .
32.  $E(t)$ : Funcional de energía de la onda.
33.  $u_0, u_1$ : Condiciones iniciales en  $H_0^1(M)$  y  $L^2(M)$ .
34.  $W^{2,q}(M)$ : Espacio de Sobolev de segundo orden.
35.  $a(x)$ : Coeficiente de amortiguamiento.
36.  $\text{supp}(u)$ : Soporte de  $u$ .
37.  $\mathcal{L}$ : Operador diferencial de la onda.
38.  $\rho(x)$ : Función de densidad en  $M$ .
39.  $T^*M$ : Espacio cotangente de  $M$ .
40.  $\alpha$ : Parámetro de control de amortiguamiento.
41.  $C^k(M)$ : Espacio de funciones  $k$ -veces diferenciables.
42.  $\text{div}_g(X)$ : Divergencia de un campo vectorial.
43.  $\mathcal{A}$ : Operador generador del semigrupo.
44.  $S(t)$ : Semigrupo de operadores para  $u$ .
45.  $\mathcal{K} \subset H$ : Atractor global en  $H$ .
46.  $R(x)$ : Curvatura de Ricci en  $M$ .
47.  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ : Norma del supremo en  $L^\infty(M)$ .
48.  $C_p(M)$ : Constante de Poincaré.
49.  $\langle u, v \rangle$ : Producto interno en  $L^2(M)$ .
50.  $\tau$ : Intervalo de observación.
51.  $\xi$ : Variable en análisis microlocal.
52.  $\text{Id}$ : Operador identidad.
53.  $\text{Tr}$ : Operador traza en  $H^1(M)$ .
54.  $\kappa$ : Constante de curvatura de Gauss.
55.  $\mathcal{F}$ : Transformada de Fourier.

- 56.  $C_r$ : Constante dependiente de la región de control.
- 57.  $\mathbb{R}^n$ : Espacio Euclidiano de dimensión  $n$ .
- 58.  $\delta$ : Parámetro de perturbación.
- 59.  $\text{ess sup}$ : Supremum esencial.
- 60.  $\gamma$ : Coeficiente de disipación.

# Índice de figuras

0.1	$\epsilon$ -controlabilidad y GCC en variedades 2-dimensionales con borde . . .	2
1.1	Colapso del puente de Tacoma Narrows . . . . .	4
1.2	Puente Chilina en Arequipa - Perú . . . . .	5
1.3	Amortiguador bien localizado y óptimo en medida . . . . .	6
1.4	Puente en Tbilisi - Georgia . . . . .	7
1.5	Variedad semiesférica "Casa Domo" . . . . .	7
1.6	Mallado $\omega$ sobre una variedad . . . . .	14

# Resumen

Este trabajo recopila resultados presentados en el artículo Mendoza et al. (2023) mostrando inicialmente la existencia de un atractor exponencial generalizado para una clase de ecuaciones de ondas Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida. Posteriormente, probaremos la continuidad de estos atractores cuando las fuerzas externas son perturbadas.

La primera parte del trabajo se basará en los resultados mostrados en Cavalcanti et al. (2021), mientras que el análisis de la continuidad seguirá lo probado por Ma y Seminario-Huertas (2020).

El método a emplearse es el de la buena colocación usando teoría de semigrupos, mostraremos la existencia de atractores globales bajo el estudio de teoría de sistemas cuasiestables y demostraremos la continuidad de atractores usando la teoría de conjuntos residuales.

**Palabras clave:** Ecuaciones de onda Riemannianas, atractores globales, continuidad de atractores globales, conjuntos  $\varepsilon$ -controlables en medida.

# Abstract

This work compiles results presented in the article Mendoza et al. (2023) initially showing the existence of a generalized exponential attractor for a class of Riemannian wave equations with optimal localized damping in measurement. The continuity of these attractors is subsequently tested when external forces are disturbed.

The first part of the work will be based on the results shown in Cavalcanti et al. (2021), while the continuity analysis will follow what was proven by Ma y Seminario-Huertas (2020).

The method to be used is good placement using semigroup theory, the existence of global attractors is shown under the study of quasi-stable systems theory and the continuity of attractors is demonstrated using residual set theory.

**Keywords:** Riemannian wave equations, global attractors, continuity of global attractors,  $\varepsilon$ -controllable sets in measure.



# Introducción

Consideremos  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta con borde suave  $\partial M$  y métrica  $g$ . Para profundizar en el problema, inicialmente, analizaremos la ecuación de onda lineal:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \chi_\omega \partial_t u = 0, & \text{en } M \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial M, \\ u(0) = u_0, \\ \partial_t u(0) = u_1, \end{cases} \quad (0.1)$$

donde

$\Delta$ : es el operador de Laplace-Beltrami en  $M$

$\chi_\omega$ : es la función característica de un subconjunto abierto  $\omega$  de  $M$ .

La energía del sistema se define como:

$$E = \frac{1}{2} \int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx, \quad (0.2)$$

donde  $\nabla$  denota la conexión de Levi-Civita sobre  $M$ . Es ampliamente conocido que la energía  $E(t)$  decae exponencialmente a cero si y solo si  $\omega$  satisface la condición geométrica de control (GCC) Bardos et al. (1992). Esta condición estipula que existe un  $T_0 > 0$  tal que cualquier geodésica generalizada, viajando a velocidad 1, entra en  $\omega$  antes de que transcurra el tiempo  $T_0$ . La noción de que la geodésica debe intersectar una región de control  $\omega$  fue previamente considerada para variedades sin borde por Rauch y Taylor (1975, 1974), remontándose a los trabajos de Ralston (1969) en un contexto euclidiano. Una característica notable es que  $\omega$  puede ser seleccionada con un volumen arbitrariamente pequeño en relación con la medida de  $M$ .

Nos interesa la dinámica a largo plazo de ondas semilineales con disipación de amortiguamiento efectiva solo en una región  $\varepsilon$ - controlable. Como es bien conocido Chueshov y Lasiecka (2008); Feireisl y Zuazua (1993), se necesita una propiedad de continuación única adecuada y desigualdades de observabilidad. Recordemos que los métodos utilizados por Bardos et al. (1992) combinan resultados detallados sobre la propagación de singularidades por Melrose y Sjöstrand (1978, 1982) y análisis microlocal. Sus argumentos requieren que las soluciones posean alta regularidad. Considerando que analizamos soluciones de ecuaciones de onda semilineales con  $H^2(M)$ -regularidad, emplearemos otro enfoque. De hecho, se sigue parcialmente las ideas desarrolladas en Cavalcanti et al. (2021, 2010), basadas en los resultados de Triggiani y Yao (2002) y Lasiecka y Tataru (1993). Sus argumentos emplean el concepto de campos vectoriales espaciales (véase Miller (2003); Lasiecka et al. (2000); Yao (2011)) y su objetivo es construir una región de control dividiendo el borde  $\partial M$  respecto al signo de  $\langle H, \nu \rangle$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria y  $H$  es un campo vectorial estratégico. Este método requiere menos regularidad y sigue las estimaciones de Carleman. Basándonos en estos resultados, y en particular en Cavalcanti et al. (2021), se pretende estudiar el sistema  $(P_\beta)$ , el cual está bien planteado y posee un atractor global regular con dimensión fractal finita  $A_\beta$ , con el fin de mostrar la

convergencia de dichas regiones de estabilización cuando  $\beta$  varía en  $[0, 1]$ , siguiendo lo presentado por Ma y Seminario-Huertas (2020). Cabe señalar que, en cualquier caso, se busca conservar la región de localización para la disipación en el sentido  $\varepsilon$ -controlable en medida. Este objetivo representa un resultado significativo para un sector relevante en la matemática especializada.

Una de las preocupaciones, para cumplir nuestro objetivo, es el control de la medida de la región  $\omega$  de observación. Analicemos el siguiente ejemplo que usará, únicamente, geometría del espacio. Consideremos  $M$  como se muestra en la figura 0.1. Las regiones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen (GCC) y, a pesar que,  $\text{med}_M(\omega_1)$  puede ser tomado arbitrariamente pequeña, puede suceder que  $\text{med}_{\partial M}(\omega_1 \cap \partial M) > 3$ . Por otro lado, para  $\omega_2$ , la suma de las medidas del interior y del borde  $\text{med}_M(\omega_2) + \text{med}_{\partial M}(\omega_2 \cap \partial M)$  pueden ser tomadas arbitrariamente pequeñas. Aquí, se dice que un subconjunto  $\omega$  de  $M$  es  $\varepsilon$ -controlable (en medida) si dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{med}_M(\omega) + \text{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon.$$

La pregunta de si la medida del borde  $\text{med}_{\partial M}$  de un conjunto  $\omega$  satisfaciendo la condición geométrica del control puede ser arbitrariamente pequeña y fue estudiada por Cavalcanti et al. (2009), Cavalcanti et al. (2010) y Cavalcanti et al. (2021).

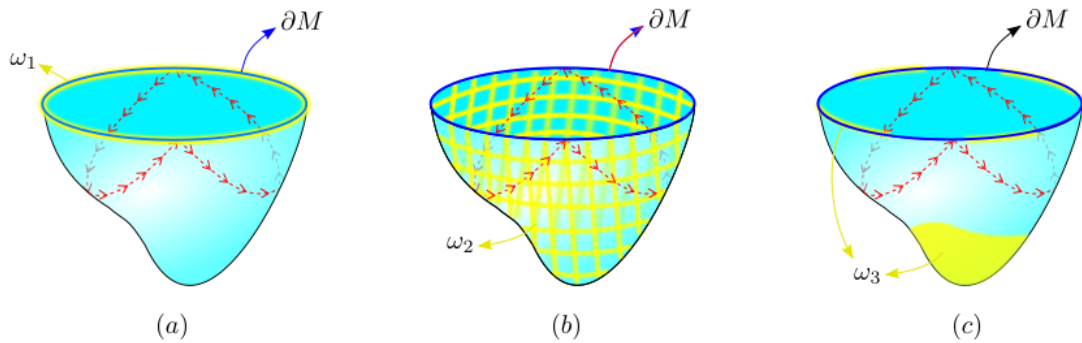


Figura 0.1:  $\varepsilon$ -controlabilidad y GCC en variedades 2-dimensionales con borde Sea  $M$  una variedad 2-dimensional con borde. Es fácil ver que las regiones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen (GCC). La región  $\omega_2$  es  $\varepsilon$ -controlable pero  $\omega_1$  no lo es, pues  $\text{med}_{\partial M}(\omega_1)$  no es controlable. Debido que  $M$  posee rayos atrapados, la región  $\omega_3$  no satisface (GCC).

De este modo, podemos resumir las principales contribuciones del presente trabajo como sigue:

- (a) La existencia de atractores  $\mathcal{A}_\beta$  para los sistemas  $(\mathcal{H}, S_\beta(t))$ , definidos por  $(P_\beta)$ , pueden ser avalados por Cavalcanti et al. (2021). No obstante, dado que el efecto del término de amortiguamiento suele limitarse a una región cercana a  $\partial M$ , resulta complicado determina el tamaño de un conjunto absorbente acotado. En resumen, dado una condición inicial  $z$  dentro de un conjunto acotado  $B \subset \mathcal{H}$ , se demuestra que existe una constante  $C_{fh} > 0$ , que no depende de

$B$  tal que

$$\|S_\beta(t)z\|_{\mathcal{H}} \leq C_B e^{-\gamma t} + C_{fh}, \quad \beta \in [0, 1], \quad t \geq 0. \quad (0.3)$$

Esta última estimación implica que los atractores  $\mathcal{A}_\beta$  son uniformemente acotados. De hecho, en Cavalcanti et al. (2021) los autores probaron la disipatividad del sistema explorando su estructura gradiente. En Feireisl y Zuazua (1993), los autores demostraron la existencia de un conjunto absorbente acotado usando el teorema de la continuación única (Ruiz (1992)) combinado con un argumento de contradicción, sin mostrar un estimado como en (0.3). Es así, que pretendemos mostrar que los atractores  $\mathcal{A}_\beta$  están acotados uniformemente con respecto a  $\beta \in [0, 1]$ .

- (b) Adicionalmente una vez probado que los atractores  $\mathcal{A}_\beta$  son uniformemente acotados, se puede aplicar un resultado reciente de Hoang et al. (2015) que estudian la continuidad de  $\beta \mapsto \mathcal{A}_\beta$  con respecto a la métrica de Hausdorff. Luego, se prueba que  $\mathcal{A}_\beta$  es continua sobre cualquier  $\beta \in \Lambda$ , siendo  $\Lambda$  un subconjunto residual denso de  $[0, 1]$ . Mostraremos que la semicontinuidad superior de  $\mathcal{A}_\beta$  con respecto al parámetro es válido para todo  $\beta \in [0, 1]$ . Para esto se seguirá lo mostrado en Ma y Seminario-Huertas (2020).

# I. PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

Surgen problemas cuando se diseñan estructuras curvadas como puentes, por ejemplo: los pilares que sirven de soporte muchas veces están mal colocados o las distancias entre columnas contiguas no son las óptimas y estas formas de construcción pueden ocasionar el derrumbe de estos puentes. En esta situación, los ingenieros civiles juegan un papel fundamental para poder evitar que ocurran estos incidentes. Además, existe una teoría con la cual podemos abordar esta problemática y tiene que ver con profesionales de alta gama como son los matemáticos y los físicos: ellos pueden dar un soporte teórico y experimental con respecto a la construcción de estas estructuras y acá entra la optimización en la buena localización de amortiguadores y la medida de estos, que sea la mínima posible, y que brinde la seguridad de que el puente no llegue a colapsar.

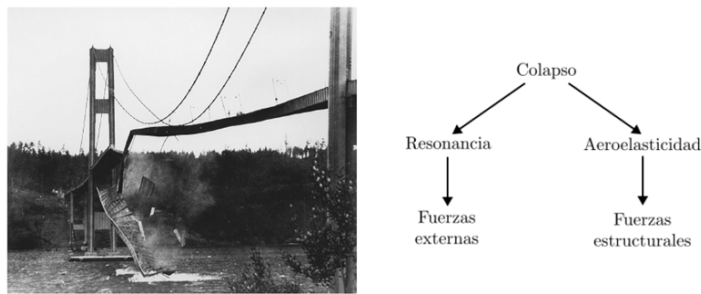


Figura 1.1: Colapso del puente de Tacoma Narrows

En 1940, en Estados Unidos, ocurrió un evento fatal que marcó un antes y un después en la ingeniería estructural: el colapso del Puente Tacoma Narrows, que conectaba las ciudades de Tacoma y Narrows. Este puente experimentó un fenómeno conocido como “flutter” aeroelástico, donde las interacciones entre el viento y la estructura generaron oscilaciones crecientes que llevaron al colapso. Inicialmente, se creyó que el desastre se debía únicamente a la resonancia provocada por fuerzas externas, pero posteriormente se concluyó que la causa principal fue la aeroelasticidad, una interacción compleja entre las fuerzas del viento y las propiedades estructurales del puente.

A partir de este desastre, se impulsó el desarrollo de tecnologías avanzadas, como los amortiguadores de masa sintonizada (Tuned Mass Dampers, TMD), diseñados para disipar energía y prevenir resonancias peligrosas en estructuras expuestas a condiciones extremas.



Figura 1.2: Puente Chilina en Arequipa - Perú  
 Apreciamos un puente que tiene una estructura sólida donde los pilones funcionan como amortiguadores.

Por otro lado, el Puente Chilina en Arequipa, inaugurado en 2014, representa un enfoque moderno y preventivo en la ingeniería de puentes. Equipado con sistemas avanzados de amortiguación sísmica, este puente es capaz de disipar la energía generada por terremotos, garantizando su estabilidad incluso en una región con alta actividad sísmica. Este diseño combina simulaciones computacionales y análisis dinámicos para optimizar la ubicación y efectividad de los amortiguadores, adaptándose a los desafíos naturales y funcionales del entorno.

La comparación entre el Puente Tacoma Narrows y el Puente Chilina evidencia la evolución de la ingeniería estructural: desde respuestas reactivas frente a desastres hasta diseños proactivos y preventivos que integran tecnología moderna para garantizar la seguridad y funcionalidad de las estructuras.

Surgen algunas preguntas fundamentales para continuar mejorando la ingeniería de puentes:

¿Los expertos en el diseño del Puente Tacoma Narrows consideraron adecuadamente los fenómenos físicos de resonancia y aeroelasticidad? Si estos fenómenos desempeñaron un papel clave en el colapso, ¿qué estrategias pueden adoptarse para evitar incidentes similares? ¿Podrá la teoría matemática contribuir de manera óptima al diseño y localización adecuada de amortiguadores en estructuras complejas como puentes curvados?

Es aquí donde se da la conexión entre la Física y la Matemática, pues debido a la Ley de Hooke generalizada, a partir de una ecuación de onda Riemanniana con disipación localizada, presentamos el sistema:

$$(P_\beta) : \begin{cases} u_{tt} - \Delta_g u + a(x)u_t + f(u) = \beta h(x) & , \text{ en } M \times (0, \infty) \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial M \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) , u_t(x, 0) = u_1(x) & , x \in M \end{cases}$$

donde:

- i)  $(M, g)$  representa una variedad Riemanniana  $C^\infty$ , 3-dimensional, compacta y con borde  $\partial M$  lo suficientemente suave,
- ii)  $\Delta_g$  representa al operador de Laplace-Beltrami asociado a la conexión de Levi-Civita de  $(M, g)$ ,
- iii)  $\beta$  un parámetro de perturbación sobre la fuerza externa  $h(x)$  que varía en el intervalo  $[0, 1]$ , y
- iv)  $f(u)$  las fuerzas estructurales del problema con las condiciones usuales de disipatividad y crecimiento crítico de Sobolev, esto es  $f \sim u^3$



Figura 1.3: Amortiguador bien localizado y óptimo en medida  
Se observa un amortiguador colocado debajo de un puente. La localización  $a(x)$  es buena y la medida  $g$  asociada la métrica Riemanniana es óptima.

Con respecto a la localización de la disipación  $a(x)u_t$ , se considerará que:

$$a \geq 0, a \in L^\infty(M), a \geq a_0 \text{ c.s. en } \omega$$

donde  $\omega \subseteq M$  es una región  $\varepsilon$ -controlable en medida, es decir, para un  $\varepsilon > 0$  se tiene que

$$\text{med}_M \omega + \text{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon,$$

además, dicha región satisface algunas propiedades importantes que serán descritas más adelante.



Figura 1.4: Puente en Tbilisi - Georgia

En este puente de forma de variedad Riemanniana (paraboloide hiperbólico), se observa que el mallado de tubos que cubre el puente es la región  $\omega$ , que es un conjunto abierto de la variedad y representa la región de disipación o amortiguamiento.



Figura 1.5: Variedad semiesférica "Casa Domo"

Las casas Domo son un claro ejemplo de variedades Riemannianas que son estructuras curvadas y semiesféricas, siendo las regiones  $\omega$ , también los mallados de tubos que hacen que la estructura sea compacta y permanezca estable.

Se tiene que el problema  $(P_\beta)$  genera una familia de atractores globales

$$\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in [0,1]} \subset \mathcal{H}$$

donde  $\mathcal{H}$  representa al espacio de fase débil.

Es así que el presente trabajo pretende estudiar dos cosas:

- A) Los atractores  $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  son exponenciales generalizados (véase Definición 14).

B) La continuidad de esta familia de atractores cuando  $\beta \rightarrow \beta_0$  con  $\beta_0 \in \Lambda \subset [0, 1]$ , siendo  $\Lambda$  un conjunto residual de  $[0, 1]$ , esto es, mostrar que existe  $\Lambda \subset [0, 1]$  conjunto residual, tal que:

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} d_H(\mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_{\beta_0}) = 0$$

donde:  $d_H(\cdot, \cdot)$  representa a la distancia de Hausdorff entre conjuntos y  $\beta_0 \in \Lambda$ .

**Observación 1.** En el caso de atractores globales, la continuidad implica la persistencia de las propiedades de estabilidad y la robustez frente a perturbaciones. Probar la semicontinuidad superior significa verificar que las soluciones no divergen abruptamente, y si el sistema está suficientemente bien condicionado (como en el caso de ecuaciones lineales o soluciones suavizables), esto es suficiente para concluir con la continuidad de los atractores globales.

## 1.2. Antecedentes de la investigación

1. Cavalcanti et al. (2019) en su trabajo titulado: *Dynamics of Riemann waves with sharp measure-controlled damping*, estudiaron ecuaciones de onda semilineales localmente amortiguadas definidas sobre variedades Riemannianas compactas con borde. Los autores presentan una construcción de regiones de amortiguamiento controlada en medida que son óptimas en el sentido de que las sumas de las medidas de su interior y de su borde son arbitrariamente pequeñas. Los autores utilizan una construcción geométrica para crear conjuntos abiertos de esta clase, lo cual les permite establecer una nueva desigualdad de observabilidad basada en la energía potencial en lugar de la tradicional energía cinética. Además, demuestran una propiedad de continuación única. De este modo, establecen la existencia de atractores globales suaves de dimensión finita para un conjunto de ecuaciones de onda que incluyen amortiguamiento no lineal y fuerzas con crecimiento crítico de Sobolev. Además, mediante una condición de control de obstáculos, demuestran que sus conjuntos de regiones controladas en medida cumplen la bien conocida condición de control geométrico (GCC). Por lo tanto, muchos de los resultados conocidos para la estabilización de ecuaciones de onda se mantienen válidos en este contexto.
2. Cavalcanti et al. (2010) en su trabajo titulado: *Asymptotic Stability of the Wave Equation on Compact Manifolds and Locally Distributed Damping: A Sharp Result*, consideran una variedad Riemanniana  $(M, g)$  compacta  $n$ -dimensional, con  $n \geq 2$ , donde  $g$  denota una métrica Riemanniana de clase  $C^\infty$ . Este artículo se basa en el estudio de una ecuación de onda con amortiguamiento localmente distribuido sobre una variedad Riemanniana  $M$ , descrita por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_g u + a(x)g(u_t) = 0 & , \quad \text{sobre } M \times ]0, \infty[ \\ u = 0 & , \quad \text{sobre } \partial M \times ]0, \infty[ \end{cases}$$

donde



$\partial M$ : es el borde de  $M$

$a(x)g(u_t)$ : es el término de amortiguamiento.

El objetivo principal de este trabajo fue mostrar una construcción geométrica asociada al operador de onda que permita controlar en medida la región de amortiguamiento con la finalidad de probar la estabilidad exponencial de la energía del problema. Para esto los autores construyen un potencial de escape en el interior de  $(M, g)$  y un campo de escape sobre porciones del borde  $\partial M$  lo que permite demostrar una desigualdad de observabilidad y una propiedad de continuación única asociada a la ecuación de onda planteada.

3. Ma et al. (2021) en su trabajo titulado: *Attractors for locally damped Bresse systems and a unique continuation property*, estudian la existencia de atractores globales para un sistema de Bresse, el cual es un modelo robusto para vigas circulares, dado por un conjunto de tres ecuaciones de ondas acopladas. El objetivo principal fue establecer la existencia de regiones compactas de estabilización para el semigrupo asociado al problema semilineal con amortiguamiento localizado. Para esto, los autores muestran una propiedad de continuación única, la cual no existía para modelos de Bresse. La estrategia consistió en establecer el problema en el marco de las Variedades Riemannianas y ver el sistema como una sola ecuación con diferentes métricas realizando estimaciones Carleman para obtener el resultado.
4. Ma, T. and Seminario-Huertas, P. (2020) en su trabajo titulado: *Attractors for semilinear wave equations with localized damping and external forces*, los autores tratan con dinámicas a largo plazo sobre ecuaciones de onda semilineales definidas en dominios acotados de  $\mathbb{R}^3$  con términos no lineales cúbicos y amortiguamiento localmente distribuido. A partir de la existencia de atractores globales para los semigrupos generados para la ecuación de onda con perturbaciones en las fuerzas externas, los autores muestran que dichos atractores poseen una acotación uniforme con respecto al parámetro de perturbación lo que permite la continuidad de los mismos sobre un conjunto residual. Adicionalmente muestran la semicontinuidad superior de los atractores cuando las fuerzas externas desaparecen.

### 1.3. Formulación del problema de investigación

#### Problema general:

¿Es posible demostrar la existencia y continuidad de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?

## **Problema Específico 1:**

¿Existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?

## **Problema Específico 2:**

¿Es posible demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?

## **1.4. Delimitación del estudio**

### **1.4.1. Teóricas**

Debido a la naturaleza teórica del presente trabajo, se requirió una profunda revisión de material bibliográfico principalmente de artículos científicos, los cuales conllevan un costo para ser conseguidos. Esto presentó una principal limitación en la búsqueda de nuevas teorías para el desarrollo de esta tesis.

### **1.4.2. Espaciales**

Gran parte de esta investigación se realizó en tiempos de Covid, las limitaciones de movilización a universidades con respecto a la revisión de bibliografía fue muy tediosa y muy pocas veces se pudo ir a las bibliotecas, por lo que se usó la Web, que también muchas veces está limitada y no se encuentra amplia información. En la actualidad, ya no se tiene ese problema, pues todo volvió a la normalidad.

### **1.4.3. Temporales**

En épocas de Covid, fue difícil pues nos tuvimos que adaptar a una nueva forma de trabajo, en la cual empleamos más horas al ámbito laboral, lo que impide muchas veces tener tiempo en la dedicación exclusiva para la investigación. Los tiempos de movilización de un lugar a otro también fue un problema. Actualmente ya no tenemos ese problema, y se pudo mejorar la redacción de la Tesis.

## 1.5. Justificación e importancia de la investigación

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta con borde suave  $\partial M$  y métrica  $g$ . Para comprender mejor el problema, inicialmente se examina la ecuación de onda lineal

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \chi_\omega \partial_t u = 0 & , \text{ en } M \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial M, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, \end{cases}$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace-Beltrami sobre  $M$  y  $\chi_\omega$  es la función característica de un subconjunto abierto  $\omega$  de  $M$ . La energía del sistema es dado por

$$E = \frac{1}{2} \int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

donde  $\nabla$  representa la conexión de Levi-Civita sobre  $M$ .

Es conocido que la energía  $E(t)$  decae exponencialmente hasta cero si y solo si  $\omega$  satisface la condición geométrica del control (GCC) (véase Bardos et al. (1992)). Esta condición establece que existe un tiempo  $T_0 > 0$  tal que cualquier geodésica generalizada viajando con velocidad 1 entra en  $\omega$  antes que pase el tiempo  $T_0$ . La idea de que la geodésica debe intersectar una región de control  $\omega$  se consideró anteriormente para variedades sin borde por Rauch y Taylor (1975), Rauch y Taylor (1974) lo que se remonta a Ralston (1969) en un entorno euclidiano. Una distinguida característica es que  $\omega$  puede ser escogido con un pequeño volumen arbitrario con respecto a la medida de  $M$ .

Estamos interesados en la dinámica a largo plazo de ondas semilineales con disipación de amortiguamiento efectiva solo en una región  $\varepsilon$ -controlable. Como es bien conocido (véase Chueshov et al. (2008), Feireisl y Zuazua (1993)) se necesita una propiedad de continuación única adecuada y desigualdades de observabilidad. Recordamos que los métodos usados por Bardos et al. (1992) combina finos resultados sobre las propagación de singularidades por Melrose y Sjöstrand (1978), Melrose y Sjöstrand (1982) y análisis microlocal. Sus argumentos requieren que las soluciones tengan alta regularidad. Manteniendo en mente que consideramos soluciones de ecuaciones de onda semilineales con  $H^2(M)$ -regularidad usaremos otro enfoque. De hecho, se siguen en parte las ideas desarrolladas en Cavalcanti et al. (2021), Cavalcanti et al. (2010) que está basada sobre los resultados de Triggiani y Yao (2002) y Lasiecka y Tataru (1993). Sus argumentos usan el concepto de campos vectoriales espaciales (véase Miller (2003), Lasiecka et al. (2000), Yao (2011)) y su objetivo es construir una región de control dividiendo el borde  $\partial M$  con respecto al signo de  $\langle H, \nu \rangle$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria y  $H$  es un campo vectorial estratégico. Este método requiere una menor regularidad y se basa en las estimativas de Carleman.

Justificándonos en estos resultados, y en particular en Cavalcanti et al. (2021), se pretende estudiar el sistema  $(P_\beta)$ , el cual está bien colocado y posee un atractor global regular con dimensión fractal finita  $\mathcal{A}_\beta$ , con la finalidad de mostrar la convergencia de dichas regiones de estabilización cuando  $\beta$  varía en  $[0, 1]$ , siguiendo lo

mostrado en Ma y Seminario-Huertas (2020). Nótese que en todo caso se pretende conservar la región de localización para la disipación en el sentido  $\varepsilon$ -controlable en medida. Este objetivo genera un resultado importante para un sector significativo en la matemática especializada.

## **1.6. Objetivos de la Investigación: General y específicos**

### **1.6.1. Objetivo general**

Demostrar la existencia y continuidad de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

### **1.6.2. Objetivos específicos**

#### **Objetivo específico 1:**

Demostrar que existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

#### **Objetivo específico 2:**

Demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

### **1.6.3. Realidad genérica del problema**

Como se explicó brevemente en la sección anterior, se estudiará la continuidad de los atractores globales con relación al problema  $(P_\beta)$ . Es importante entender que resultados relevantes con relación a este modelo, que generaliza en grandes detalles al clásico modelo euclidiano de ondas parcialmente disipativas, se tienen en la literatura. Así, siguiendo lo mostrado en Cavalcanti et al. (2021), con respecto a  $(P_\beta)$  se tiene:

- (i) La construcción de una función potencial de escape  $d$  definida en una parte de  $V$  de la variedad  $M$  de modo que  $M \setminus V$  es arbitrariamente pequeño. Esto permite definir en una parte  $V$  de la variedad  $M$  una región de control/amortiguamiento  $\omega \supset \overline{M \setminus V}$  que es  $\varepsilon$ -controlable en medida. La construcción de  $V, d, \omega$  es puramente geométrica y contrasta en gran parte con la presentada en Cavalcanti et al. (2009) y Cavalcanti et al. (2010) que es una

región específica para la ecuación de onda. Basado en esta construcción se define la clase de conjuntos  $\varepsilon$ -controlables admisibles.

- (ii) Los autores muestran que los conjuntos  $\varepsilon$ -controlables admisibles (en particular el  $\omega$  que se colocará para este trabajo) satisfacen la condición geométrica del control (GCC). Esto se tiene definiendo una nueva condición de *obstáculo* que es motivada por trabajos anteriores vistos en Lasiecka y Tataru (1993), Miller (2003), entre otros. Por lo tanto, muchos de los resultados bien establecidos para el control y la estabilización de ecuaciones de onda que cumplen con la condición geométrica de control (GCC) pueden ser generalizadas al contexto de regiones amortiguadas con medidas controladas de manera óptima. Se enfatiza que dado un conjunto  $\omega$   $\varepsilon$ -controlable admisible, la porción del borde  $\Gamma = \omega \cap \partial M$  no necesita satisfacer la condición geodésica.
- (iii) Se tiene un resultado de controlabilidad basado en las estimativas de Carleman por Triggiani y Yao (2002). Es así que se usará una nueva observabilidad y propiedad de continuación única para una ecuación de onda lineal más un potencial, localmente amortiguado en un conjunto  $\varepsilon$ -controlable *admisibile*.
- (iv) Los autores estudiaron la dinámica a largo plazo de las ecuaciones de ondas semilineales dadas por

$$\partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) + f(u) = 0 \text{ en } M \times \mathbb{R}^+,$$

con condición de borde de Dirichlet y valor inicial en  $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$ . El amortiguamiento no lineal  $g(\partial_t u)$  es localmente lipschitziano, pues mostraron la existencia de atractores finito dimensionales para  $f(u)$  con crecimiento crítico de Sobolev. Entonces combinando la desigualdad de observabilidad y la reciente teoría de sistemas cuasi-estables (Chueshov (2015), Chueshov y Lasiecka (2010)), establecieron la existencia de atractores regulares finito dimensionales asumiendo  $a(x) \geq a_0 > 0$  sobre alguna región  $\varepsilon$ -controlable *admisibile*  $\omega$ . Para un mejor conocimiento, resultados comparables solo fueron probados previamente por Chueshov et al. (2008), en un entorno euclidiano con  $f \in C^2$  y  $\omega$  satisfaciendo una condición de observabilidad geométrica. Recientemente, Joly y Laurent (2013) demostraron la existencia de atractores globales para ecuaciones de onda supercríticas ( $|f(u)| \approx |u|^{5-\varepsilon}$ ) con amortiguamiento lineal efectivo  $\gamma(x)\partial_t u$  en una región  $\omega$  satisfaciendo (GCC). Sus argumentos están basados en una versión propia de la propiedad de continuación única de Robbiano y Zuily (1998), que requiere que  $f$  sea analítica. Aunque la dimensión fractal y la regularidad de los atractores no se abordan, sus resultados abarcan dominios no acotados y dominios sin borde.

Es así que en la literatura ya se cuenta con trabajos relacionados al problema  $(P_\beta)$  en la dirección de la teoría de atractores. Este trabajo pretende esclarecer la convergencia en la dinámica de las regiones compactas de estabilidad al perturbar las fuerzas externas. Cabe destacar que este hecho no ha sido demostrado con anterioridad y tiene una fuerte relevancia desde el punto de vista estructural del sistema.

### 1.6.4. Características de la realidad específica

Considérese la ecuación de onda Riemanniana parcialmente amortiguada expuesta a fuerzas estructurales y fuerzas externas planteada en el problema  $(P_\beta)$  donde el parámetro de perturbación sobre las fuerzas externas,  $\beta$ , pertenece al intervalo  $[0, 1]$ . Aquí el crecimiento crítico de Sobolev significa que  $|f(u)|$  crece como mucho como  $|u|^3$ . Cavalcanti et al. (2021) mostraron que el problema  $(P_\beta)$  para un  $\beta$  fijo, está bien colocado sobre el espacio de fase  $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$ . Entonces, el operador solución del problema  $(P_\beta)$  define un  $C^0$ -semigrupo  $\{S_\beta(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $\mathcal{H}$ .

Arrieta et al. (1992) fueron los primeros en demostrar la existencia de atractores globales para ecuaciones de onda con no linealidad crítica. En su estudio, establecieron la existencia de atractores regulares en un contexto de amortiguamiento completo lineal  $\partial_t u$ , donde  $a(x) = 1$ . A posteriori, se verá la existencia de atractores globales para ecuaciones de onda con amortiguamiento localmente distribuido, las cuales fueron establecidas por Feireisl y Zuazua (1993). Ellos consideraron un término de amortiguamiento no lineal  $a(x)g(\partial_t u)$  localizado en un collar de  $\Omega$ , esto es, el soporte de  $a(x)$  contiene  $\omega = \Omega \cap \mathcal{O}$ , donde  $\mathcal{O}$  es una vecindad abierta de  $\partial\Omega$  en  $\mathbb{R}^3$ . La interrogante a si tales atractores poseen dimensión fractal finita fue establecida y estudiada por Chueshov et al. (2008). Allí, la existencia de atractores regulares de dimensión finita fue probada para una región de amortiguamiento más general  $\omega$ , satisfaciendo una condición de observabilidad. Ambas regiones de amortiguamiento  $\omega$  en Chueshov et al. (2008) y Feireisl y Zuazua (1993) satisfacen (GCC) que afirma que cada rayo de óptica geométrica dentro de  $\Omega$  debe llegar a la región de control.

Posteriormente, Cavalcanti et al. (2021) mostraron la existencia de un atractor regular con dimensión fractal finita para el problema  $(P_\beta)$  considerando  $\omega$  como una región  $\varepsilon$ -admisibles, en particular,  $\varepsilon$ -controlable en medida, es decir, para estas regiones la disipación involucra fuertemente el interior de la variedad como su borde (ver figura 1.6).

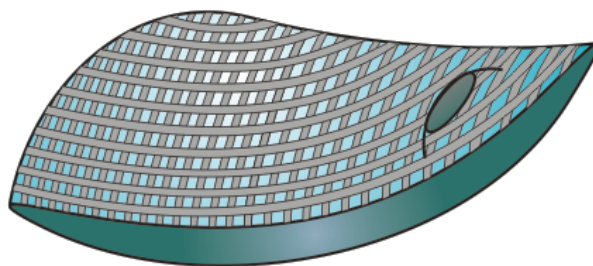


Figura 1.6: Mallado  $\omega$  sobre una variedad

El mallado sobre la variedad representa a la región  $\omega$ . Note que la  $\text{med}_M(\omega)$  y  $\text{med}_{\partial M}(\omega)$  puede ser tan pequeña como se quiera.

El objetivo es asumir  $h \in L^2(\Omega)$  y estudiar aspectos de continuidad de los atractores con respecto al parámetro  $\beta \in [0, 1]$ .

## II. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Fundamentos básicos de la investigación

Con la finalidad de entender las nociones básicas sobre Geometría Riemanniana y espacios de Sobolev se seguirá Chavel (2001), Do Carmo (1992), Hale (1999) and Yao (2011).

Con respecto a la región óptima en medida se seguirá lo mostrado en Cavalcanti et al. (2021), Cavalcanti et al. (2009) y Cavalcanti et al. (2010).

Con respecto a la observabilidad y continuación única se seguirá Cavalcanti et al. (2021), Triggiani y Yao (2002) y Lasiecka et al. (2000).

Con respecto a la teoría de semigrupos y atractores globales se seguirá Pazy (1983), Chueshov y Lasiecka (2008), Chueshov (2015) y Chueshov y Lasiecka (2010).

Con respecto a la continuidad de atractores se seguirá Ma y Seminario-Huertas (2020), Hoang et al. (2015), Babin y Pilyguin (1997), Hale et al. (1988).

#### 2.1.1. Nociones Básicas de Geometría Riemanniana

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta  $n$ -dimensional, con borde suave y métrica suave. El espacio tangente sobre  $M$  en  $p$  es denotado por  $T_p M$ . Fijando un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , el campo  $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$  representa el campo vectorial de coordenadas asociado al sistema de coordenadas. De esta manera, la métrica aplicada en dos campos puede ser expresada como

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \alpha_i \beta_j,$$

$$|X|^2 = \langle X, X \rangle$$

donde

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_{x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_{x_i} \quad \text{en } T_p M \text{ para algún } p \in M, \quad (2.1)$$

$$g_{ij} = \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle$$

$|\cdot|$  es la norma con respecto a la métrica  $g(\cdot, \cdot)$ .

En particular, denotamos el producto interno  $g(\cdot, \cdot)$  por la matriz  $(g_{ij})_{n \times n}$  y su inversa por  $(g^{ij})_{n \times n}$ .

El haz tangente es denotado por  $TM$  y el haz cotangente por  $T^*M$ . El símbolo  $D$ , que denota la conexión Levi-Cevita de  $M$ , para dos campos vectoriales  $X$  e  $Y$  sobre  $M$  dados por (2.1) se cumple que la siguiente igualdad es válida

$$D_X Y = \sum_{i,k=1}^n \left[ \alpha_i \partial x_i \beta_k \partial x_k + \sum_{j=1}^n \beta_j \Gamma_{ij}^k \partial x_k \right].$$

En esta suma, todos los  $\Gamma_{ij}^k$  representan los símbolos de Christoffel.

Dados una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  y un vector  $H \in T_p M$  para todo  $p \in M$ .

1. Si tenemos que  $f \in C^1(M)$  entonces el diferencial  $Df : TM \rightarrow \mathbb{R}$  representa el gradiente de la conexión  $D$  sobre  $f$  y se cumple las igualdades siguientes

$$Df(H) = D_H f = H(f) = \langle \nabla f, H \rangle,$$

donde el símbolo  $\nabla$  es la gradiente usual definida en un sistema de coordenadas como sigue

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_{x_i} f \partial_{x_j}. \quad (2.2)$$

Gracias al isomorfismo musical se identificará  $Df$  con  $\nabla f$ . Aquí, se acostumbra a denotar  $Df$  por  $\nabla f$ . En particular, si  $\{E_1, \dots, E_n\}$  representa una base ortonormal de  $T_p M$  y  $H = \sum_{i=1}^n h_i E_i$  entonces

$$Df(H) = H(f) = \sum_{i=1}^n h_i E_i(f).$$

2. Si  $f \in C^2(M)$  entonces el símbolo  $D^2 f$  representa la Hessiana de  $f$ . Dado  $Y \in TM$  podemos escribir

$$D^2 f(\cdot, Y) = D(Df)(\cdot, Y) = D_Y(\nabla f(\cdot)) : TM \rightarrow \mathbb{R},$$

donde

$$D_Y(\nabla f(X)) = \langle D_X(\nabla f), Y \rangle, \quad \forall X \in TM.$$

En particular

$$D^2 f(X, X) = \langle D_X(\nabla f), X \rangle, \quad \forall X \in TM.$$

3. Sea  $f \in C^3(M)$ . La función  $f$  es estrictamente convexa en la métrica  $g$  si y solamente si  $D^2 f(X, X) > 0$  para cualquier  $X \in TM$ .
4. Si tenemos una base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_p M$ , entonces la divergencia de  $H$  se define de la siguiente manera

$$\operatorname{div}(H) = \sum_{i=1}^n \langle D_{E_i} H, E_i \rangle.$$



5. Si  $f \in C^1(M)$  entonces

$$\operatorname{div}(fH) = f\operatorname{div}(H) + H(f).$$

6. Para una función  $f \in C^2(M)$  se define el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta$  por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle D_{E_i}(\nabla f), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n D^2 f(E_i, E_i).$$

7. La derivada covariante  $DH$  es la forma bilineal definida como

$$DH(X, Y) = \langle D_X H, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in TM.$$

Como caso particular, si  $f \in C^2(M)$  entonces

$$D(\nabla f)(X, Y) = D^2 f(X, Y), \quad \forall X, Y \in TM.$$

8. Si  $f \in C^1(M)$  tenemos la igualdad siguiente

$$\langle \nabla f, \nabla(H(f)) \rangle = DH(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(|\nabla f|^2 H) - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \operatorname{div} H.$$

**Observación 2.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto acotado, conexo y compacto de  $M$  con borde suave  $\partial\Omega$  y  $f \in C^3(M)$  una función estrictamente convexa en la métrica  $g$ . Entonces, la función  $f$  satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} D^2 f(X, X) &\geq |X|^2, \quad \forall p \in \Omega, \quad \forall X \in T_p M, \\ \min_{\overline{\Omega}} f(x) &\equiv m > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.1.2. Geometría para la Región Óptima en Medida

### 2.1.2.1. Condición de control óptima en medida

**Definición 1.** Se dice que un subconjunto medible  $\omega$  de  $M$  es  $\varepsilon$ -controlable (en medida) si dado  $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{med}_M(\omega) + \operatorname{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon,$$

donde  $\operatorname{med}_A(B)$  representa la medida de  $B$  con respecto a la medida de Lebesgue definida en  $A$ . Se denota por  $\chi_\varepsilon(M)$  la colección de todos los conjuntos  $\varepsilon$ -controlables de  $M$ .

**Observación 3.** Se presentan diversas propiedades de conjuntos  $\varepsilon$ -controlables, las cuales incluyen:

Dados  $\varepsilon, \varepsilon_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , se cumple que

- Si  $\omega_j \in \chi_{\varepsilon_j}(M)$  entonces la unión  $\bigcup_{j=1}^k \omega_j$  pertenece a  $\chi_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k}(M)$ .
- Si tenemos una familia  $(\omega_i)_{i \in I}$  en  $\chi_\varepsilon(M)$ , entonces la intersección arbitraria  $\bigcap_{i \in I} \omega_i$  es un elemento de  $\chi_\varepsilon(M)$ ,
- Cualquier conjunto con medida nula con respecto a la medida de  $\partial M$  y, a la misma vez, con respecto a la medida en  $M$ , está en  $\chi_\varepsilon(M)$ ,
- Para cualquiera números tales que  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , se cumple que  $\chi_\varepsilon(M)$  está contenido en  $\chi_{\varepsilon'}(M)$ .
- Si  $M$  está contenido en una variedad más grande  $\tilde{M}$ , entonces  $\chi_\varepsilon(M)$  está contenido en  $\chi_\varepsilon(\tilde{M})$ .
- Para cualquiera  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \chi_\varepsilon(M)$  y  $p \in M$  tales que  $r\omega + p \subset M$ , entonces se cumple que  $r\omega + p \in \chi_{|r|\varepsilon}(M)$ .

Estas propiedades son estándar en la teoría de la medida de Lebesgue (ver Folland (1984)).

**Teorema 1.** *En una variedad Riemanniana  $N$ -dimensional conexa compacta  $(M, g)$  de clase  $C^\infty$  con borde suave  $\partial M$ , dados  $\varepsilon > 0$  y  $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$  se cumple que:*

1. *Existe un conjunto abierto  $V \subset M$ , que tiene borde suave  $\overline{\partial V \cap \text{int}(M)}$ , que interseca transversalmente a  $\partial M$  y que satisface  $\overline{M \setminus V} \in \chi_{\varepsilon_0}(M)$ .*
2. *Existe una función  $d : M \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las condiciones:*
  - (d1)  *$d$  es suave  $C^\infty$  en  $M$ .*
  - (d2)  *$\text{Hess } d(X, X) \geq |X|_g^2$  para todo  $X \in T_x M$ ,  $x \in \overline{V}$ .*
  - (d3) *El gradiente de  $d$  es positivo dentro de  $V$  y el mínimo de  $d$  en  $V$  es positivo.*
  - (d4)  *$\langle \nabla d, \nu \rangle_g < 0$  sobre  $\partial M \cap \overline{V}$ .*
3. *Existe un conjunto abierto  $\omega \in \chi_\varepsilon(M)$  tal que  $\overline{M \setminus V}$  está contenido en  $\omega$  y  $\omega \cap V$  está en  $\chi_{\varepsilon-\varepsilon_0}(M)$ .*

#### Observación 4.

- (a) Podemos destacar que la elección de  $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$  en el Teorema 1 no depende de cualquier otra condición, con lo cual podemos asegurar que el resultado es válido para cualquier otro valor de  $\varepsilon_0$  dentro del intervalo  $(0, \varepsilon)$ . El valor  $\varepsilon_0$  representa la medida asignada al conjunto  $\overline{M \setminus V}$ , el cual es crucial para demostrar la efectividad del amortiguamiento en una vecindad  $\omega$  de  $\overline{M \setminus V}$ , con el fin de establecer una desigualdad de observabilidad.
- (b) Una vez escogido  $\varepsilon_0$ , la construcción del conjunto  $V$ , la función  $d$  y la elección de  $\omega$  involucra principalmente las siguientes tres propiedades:
  - $\omega$  es un subconjunto abierto de  $M$ ,

- $(\overline{M \setminus V}) \cup (\omega \cap V) = \omega$  con  $(\overline{M \setminus V}) \cap (\omega \cap V) = \emptyset$ ,
- $\overline{M \setminus V} \in \chi_{\varepsilon_0}(M)$  y  $\omega \cap V \in \chi_{\varepsilon - \varepsilon_0}(M)$ .

El conjunto  $\omega$  tal que  $\omega \cap V \in \chi_{\varepsilon - \varepsilon_0}(M)$  no es único y es posible construir diferentes  $\omega$  cumpliendo dicha condición.

**Definición 2.** Dado  $\varepsilon > 0$ , la familia

$$[\omega_\varepsilon] = \{\omega \in \chi_\varepsilon(M) \mid \omega \text{ es dado por el Teorema 1 para algún } \varphi_0 \in (0, \varepsilon)\} \quad (2.4)$$

es llamada la clase de las regiones  $\varepsilon$ -controlables admisibles.

Esta definición será usada para caracterizar la idea de región de amortiguamiento con control óptimo en medida.

### 2.1.2.2. Descomposición en conjuntos superpuestos

Como se mencionó con anterioridad, buscamos que nuestra construcción cumpla los hipótesis de un resultado de observabilidad en Triggiani y Yao (2002). En un primer método, se requiere que la función  $d$  no tenga puntos críticos en  $M$ . Note que el teorema 1 concede solamente que  $d$  no tiene puntos críticos en  $V$ . No obstante, esta restricción se puede debilitar dentro de un contexto de sub-dominios superpuestos.

**Definición 3.** Sean  $M$  una variedad y  $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$  una familia de subconjuntos de  $M$ . Se dice que  $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$  es una familia de sub-dominios superpuestos de  $M$  si

- $M = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ ,
- para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , existe al menos un  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $i \neq j$  y  $\Omega_j \cap \Omega_i \neq \emptyset$ .

**Teorema 2.** *Dados  $\varepsilon > 0$  y  $\omega \in [\omega_\varepsilon]$ . Consideremos  $V_j$  y  $d_j$ , con  $j = 1, \dots, k$ , dados por el Teorema 1. Con estas condiciones, existe una colección finita de sub-dominios superpuestos  $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$  de  $M$  que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Para todo  $j = 1, \dots, k$  se cumple que  $V_j \subset \Omega_j$ .*
2. *Para todo  $j = 1, \dots, k$  se tiene que  $\Omega_j \cap \omega \neq \emptyset$ .*

*Además, consideremos que, existen las funciones  $d_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k$  cumpliendo las siguientes condiciones:*

3.  $d_j \in C^\infty(M)$ ,
4.  $\nabla^2 d_j(X, X) \geq |X|_g$  para todo  $X \in T_q M$  y  $q \in \Omega_j$ ,
5.  $\inf_{\Omega_j} |\nabla d_j| > 0$ ,
6.  $\inf_{q \in \Omega_j} d_j q > 0$ ,
7.  $\langle \nabla d_j(x), n(x) \rangle < 0$  sobre el conjunto  $\partial M \cap \overline{V_j}$ .

### 2.1.3. Observabilidad y Continuación Única

El propósito de esta sección es formular y demostrar una nueva desigualdad de observabilidad, que se encuentre basada en términos de la energía potencial y que sirva de aplicación en una amplia variedad de ecuaciones de onda lineales en el contexto de las regiones  $\varepsilon$ -controlables admisibles.

Consideremos ecuaciones con potenciales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = p_0 w + p_1 \partial_t w & \text{en } M \times (0, T), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial M \times (0, T), \end{cases} \quad (2.5)$$

donde

$$p_0 \in L^2(0, T; L^2(M)) \text{ y } p_1 \in L^\infty(0, T; L^\infty(M)), \quad (2.6)$$

y para cualquier solución débil  $w \in L^2(0, T; H_0^1(M)) \cap H^1(0, T; L^2(M))$ , existe una constante  $C_T > 0$  tal que

$$\|p_0 w\|_{L^2(0, T; L^2(M))} \leq C_T \|w\|_{L^2(0, T; H_0^1(M))}. \quad (2.7)$$

Consideremos la notación para el espacio de fase natural asociado al problema,  $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$ , con la norma  $\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|v\|_2^2$ . Tal como se mencionó anteriormente, examinaremos un resultado de Triggiani y Yao (2002).

#### 2.1.3.1. Un resultado de Triggiani y Yao

**Teorema 3.** (Triggiani y Yao, 2002, Teorema 10.1.1)

*Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $N$ -dimensional conexa compacta de clase  $C^\infty$  con borde suave  $\partial M$  que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Existe una colección finita de sub-dominios  $\{\Omega_j\}_{j \in J}$  tal que a  $\Omega_j$  le corresponde una función  $d_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:*

- $d_j \in C^\infty(M)$  e  $\inf_{\Omega_j} d_j > 0$ ,
- $\nabla^2 d_j(X, X) \geq |X|_g, \forall X \in T_q M, q \in \Omega_j$ ,
- $\inf_{\Omega_j} |\nabla d_j| > 0$ .

2. *Consideremos las regiones límite como*

$$\Gamma_0 = \bigcup_{j \in J} \{x \in \partial M \mid \langle \nabla d_j(x), \nu(x) \rangle \leq 0\} \text{ y } \Gamma_1 = \partial M \setminus \Gamma_0. \quad (2.8)$$

Entonces, para cualquier solución  $w$  de (2.5) con  $p_0, p_1$  satisfaciendo (2.6)-(2.7) y  $T > 0$  suficientemente grande, existe una constante  $k_T > 0$  tal que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma_1 dt \geq k_T (\|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(w(T), \partial_t w(T))\|_{\mathcal{H}}^2). \quad (2.9)$$

En adición

$$\text{si } \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1 \times (0, T]} = 0 \text{ entonces } w = 0 \text{ en } M \times [0, \infty). \quad (2.10)$$

**Observación 5.** En (Triggiani y Yao, 2002, Teorema 10.1.1) el resultado mencionado se presenta para dos subdominios superpuestos y supone que  $p_0 \in L^\infty(M \times [0, T])$ . La generalización a un número finito de subdominios es un procedimiento habitual. Además, tras una revisión detallada de su demostración, se puede comprobar que esta puede ampliarse para  $p_0$  que cumpla (2.6). De hecho, como se notó en (Triggiani y Yao, 2002, Observación 1.1) esto fue observado antes en (Lasiecka et al., 2000, Observación 1.1.1) para un entorno euclidiano.

**Observación 6.** La desigualdad de observabilidad (2.9) se indica anteriormente con respecto al borde  $\Gamma_1$ . Presentaremos una nueva desigualdad de observabilidad con respecto a una región  $\omega$   $\varepsilon$ -controlable admisible. Para terminar esto, será necesario un resultado técnico, en un contexto de variedades Riemannianas, que nos permita llevar integrales de área en integrales de volumen.

### 2.1.3.2. Nueva desigualdad de observabilidad y continuación única

Ahora, se establecerá la desigualdad de observabilidad que es expresada con energía potencial en lugar de la energía cinética usual. Esta desigualdad se usa, especialmente, en regiones amortiguadas con control de medida.

**Teorema 4.** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $N$ -dimensional conexa compacta de clase  $C^\infty$  con borde suave y sea  $w \in L^2(0, T; H_0^1(M)) \cap H^1(0, T; L^2(M))$  una solución del problema lineal (2.5) con  $p_0, p_1$  satisfaciendo (2.6)-(2.7). Entonces, para cualquier región  $\varepsilon$ -controlable admisible  $\omega \subset M$  se tiene:

1. *Observabilidad:* Para  $T > 0$  suficientemente grande, podemos encontrar una constante  $k_T > 0$  tal que

$$\int_0^T \int_\omega |\nabla w|^2 dx dt \geq k_T (\|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(w(T), \partial_t w(T))\|_{\mathcal{H}}^2). \quad (2.11)$$

2. *Continuación única:* Para el mismo  $T > 0$  anterior, si  $w = 0$  en  $\omega \times (0, T)$  entonces  $w = 0$  en  $M \times [0, \infty)$ .

## 2.1.4. Revisión Funcional de la Matemática

El objetivo principal de esta sección es proporcionar al lector el material de referencia necesario esencial para esta tesis. Se incluirán definiciones, notaciones y resultados teóricos fundamentales que se utilizarán a lo largo del trabajo. Comencemos con la definición de varios espacios de funciones y sus propiedades. Posteriormente, se presentan algunas desigualdades útiles. Finalmente, se recopilan varios resultados relacionados con la teoría de semigrupos y el comportamiento a largo plazo de sistemas dinámicos. Cabe destacar que al inicio de cada sección se mencionan referencias donde se pueden encontrar las pruebas de los resultados mencionados.

### 2.1.4.1. Espacios de funciones

El contenido de esta sección puede ser encontrado en las referencias Adams (1975); Bensoussan et al. (1993); Kesavan (1989); Lions y Magenes (1972); Runst y Sieckel (1996); Triebel (1978). Aquí se definirán y darán las propiedades pertinentes sobre los espacios de Lebesgue, Sobolev e intermedios. Sea  $\mathcal{O}$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $1 \leq p < \infty$ . Se denota por  $L^p(\mathcal{O})$  al conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que la función  $|u|^p$  es Lebesgue integrable. Esto es

$$L^p(\mathcal{O}) = \left\{ u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \text{ una función medible} \mid \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Si  $u \in L^p(\mathcal{O})$  se define la  $L^p$ -norma de  $u$  por

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left[ \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.12)$$

El conjunto  $(L^p(\mathcal{O}), \|\cdot\|_{L^p(\mathcal{O})})$  es un espacio de Banach.

Cuando  $p = 2$ , el espacio  $L^2(\mathcal{O})$  es, en realidad, un espacio de Hilbert junto con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} u(x)v(x)dx.$$

el cual induce la norma (2.12).

Cuando  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\mathcal{O})$  es el conjunto de todas las funciones acotadas en casi todo punto. En este caso podemos definir una norma como

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{O})} = \inf \{ C \mid |u(x)| \leq C \text{ a.e. sobre } \mathcal{O} \},$$

la cual convierte a  $L^\infty(\mathcal{O})$  en un espacio de Banach.

Un elemento de  $\mathbb{R}^n$  se dice multi-índice si sus coordenadas son números enteros positivos.

Dados  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  un multi-índice, se le asocian los siguientes símbolos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

El operador diferenciación  $D^\alpha$  es definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Consideremos  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Se define el espacio  $C^m(\mathcal{O})$  como la colección de todas las funciones  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  que tengan derivadas parciales continuas de orden  $m$ . El espacio  $C(\mathcal{O})$ , denotado también como  $C^0(\mathcal{O})$ , está formado por todas las funciones continuas  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . El espacio  $C^\infty(\mathcal{O})$  se define como la intersección de los espacios  $C^m(\mathcal{O})$  haciendo variar  $m \in \mathbb{Z}_+$ . El espacio  $C_0^m(\mathcal{O})$  está conformado por todas las funciones en  $C^m(\mathcal{O})$  que tienen soporte compacto. Una función de prueba se define como una función en  $C^\infty(\mathcal{O})$  con soporte compacto. El conjunto de todas las funciones de prueba es denotado por  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  o, de manera alternativa, por  $C_0^\infty(\mathcal{O})$ .

**Definición 4.** Una sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  es llamada convergente a cero si podemos encontrar un conjunto compacto  $K \subset \mathcal{O}$  tal que  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todas las derivadas de cada  $\varphi_n$  convergen uniformemente a cero sobre  $K$ .

**Definición 5.** Un funcional lineal  $u : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{K}$  (donde  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) es llamado una distribución sobre  $\mathcal{O}$  si para cada sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a 0 en  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  se tiene que  $\{\langle u, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0 en  $\mathbb{K}$ . El símbolo  $\langle u, \varphi \rangle$  denota la acción de  $u$  sobre la función de prueba  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ .

El espacio de las distribuciones es denotado por  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ , el cual tiene por elementos a todas las funciones con derivada  $\alpha$  definida por

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Cabe mencionar que  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$  es el espacio dual de  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ .

Ahora, se dará un breve resumen sobre resultados básicos de la teoría de los espacios de Sobolev y sus trazas y espacios duales asociados. Comencemos tomando un entero no negativo  $m$  y  $1 \leq p < \infty$ . Se denota por  $W^{m,p}(\mathcal{O})$  al conjunto (de clases de equivalencia) de todas las funciones  $u \in L^p(\mathcal{O})$  cuyas derivadas  $D^\alpha(u)$  están, nuevamente, en  $L^p(\mathcal{O})$  cuando  $|\alpha| < m$ . En notación de conjuntos

$$W^{m,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) \mid D^\alpha u \in L^p(\mathcal{O}) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

En el espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\mathcal{O})$  también se definen las siguientes normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\mathcal{O})} = \max_{|\alpha| \leq m} \left\{ \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \right\}.$$

Para cada  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio  $(W^{m,p}(\mathcal{O}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})})$  resulta ser un espacio de Banach. Por  $W_0^{m,p}(\mathcal{O})$  se denota a la clausura de  $C_0^\infty(\mathcal{O})$  en  $W^{m,p}(\mathcal{O})$ . En el caso particular  $p = 2$ , el espacio  $W^{m,p}(\mathcal{O})$ , que será denotado por  $H^m(\mathcal{O})$ , es un espacio de Hilbert y su norma es inducida por el producto interno

$$(u, v)_{H^m(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{O}} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

También, se define el espacio de Sobolev  $W^{s,p}(\mathcal{O})$  para el real positivo  $s \notin \mathbb{N}$ , y  $1 \leq p \leq \infty$  como

$$W^{s,p}(\mathcal{O}) = \left\{ u \in W^{m,p}(\mathcal{O}) \mid \left\| u \right\|_{W^{s,p}(\mathcal{O})}^p = \|u\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})}^p + \sum_{|\alpha|=m} I_{\sigma,p}(\partial^\alpha u) \leq \infty \right\},$$

donde  $s = m + \sigma$  con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \sigma < 1$  e

$$I_{\sigma,p}(u) = \int_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy.$$

En el caso particular  $p = 2$ , el espacio  $W^{s,2}(\mathcal{O})$  es un espacio de Hilbert y se usa la notación  $H^s(\mathcal{O})$ . Una primera propiedad importante para estos espacios es que para cada  $s_1 > s_2$  positivos, la inclusión  $H^{s_1}(\mathcal{O}) \subset H^{s_2}(\mathcal{O})$  es compacta. Además, para cada real  $s > 0$  se define el espacio de Sobolev  $H_0^{-s}(\mathcal{O})$ , con un orden negativo  $-s$ , siendo el espacio dual de  $H_0^s(\mathcal{O})$ . El espacio  $H_0^{-s}(\mathcal{O})$  se encuentra equipado de manera natural con la norma de los espacios duales que, en este caso, se define como

$$\|u\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \sup \left\{ \langle u, v \rangle \mid v \in H_0^s(\mathcal{O}) \text{ y } \|u\|_{H_0^s(\mathcal{O})} = 1 \right\},$$

en donde, el símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la dualidad entre los espacios  $H^{-s}(\mathcal{O})$  y  $H_0^s(\mathcal{O})$ .

A continuación se recolectan algunas propiedades adicionales de los espacios de Sobolev.



**Teorema 5. (Teorema de inmersiones).**

Consideremos  $\mathcal{O}$  siendo un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  cuyo borde  $\partial \mathcal{O}$  es suficientemente regular. Entonces las siguientes inclusiones son continuas

$$W^{s,p}(\mathcal{O}) \subset C^\sigma(\overline{\mathcal{O}}), \text{ si } s - \frac{n}{p} > \sigma, p \in (0, \infty) \text{ y } s, \sigma \geq 0,$$

(si  $\sigma$  no es un entero la inmersión es válida también para  $\sigma = s - \frac{n}{p}$ ) y

$$W^{s,p}(\mathcal{O}) \subset W^{s^*,p^*}(\mathcal{O}), \text{ si } s - \frac{n}{p} \geq s^* - \frac{n}{p^*}, 1 < p \leq p^* \leq \infty \text{ y } s^* \geq 0.$$

**Observación 7.** Este teorema implica que, tomando  $s^* = 0$  y  $p^* = 2$ , se tiene

$$H^s(\mathcal{O}) \subset L^p(\mathcal{O}) \text{ cuando } s \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \text{ y } p \geq 2.$$

En particular, para el caso cuando  $n = \dim(\mathcal{O}) = 2$ , el resultado visto implica, inmediatamente, las dos inclusiones a seguir

$$H^s(\mathcal{O}) \subset L^\infty(\mathcal{O}) \text{ cuando } s > 1$$

y

$$H^s(\mathcal{O}) \subset L^{2/(1-s)}(\mathcal{O}) \text{ cuando } 0 \leq s \leq 1.$$

**Teorema 6. (Teorema de la traza).**

Considere  $\mathcal{O}$  un dominio acotado de clase  $C^l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Sea  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $s > k + \frac{1}{2}$ ,  $s \leq l$  y  $\gamma_j : C^l(\overline{\mathcal{O}}) \rightarrow C^{l-j}(\partial \mathcal{O})$  un operador traza dado por  $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$  (donde  $\frac{\partial^j}{\partial \nu^j}$  denota la derivada normal de orden  $j$ ). Entonces el operador  $\gamma_j$  puede ser extendido (de manera única) hacia un operador lineal continuo  $\gamma_j : H^s(\mathcal{O}) \rightarrow H^{s-j-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{O})$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Ahora, vamos a mencionar los espacios vectoriales con los que trabajaremos. Consideremos  $X$  un espacio de Banach y  $[a, b]$  un intervalo cerrado en la recta real. Se denota por  $C^0([a, b]; X)$  al espacio de todas las funciones continuas  $u : [a, b] \rightarrow X$  tales que  $\|u(t)\|_X \in C^0([0, T])$ . Este espacio equipado con la norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [a,b]} \{\|u(t)\|_X\},$$

es un espacio de Banach. Se denota por  $C^m([a, b]; X)$  al espacio conformado por todas las funciones  $u : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $\left\| \frac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X \in C^0([a, b])$  cuando  $0 \leq k \leq m$ . El espacio  $C^m([a, b]; X)$  es un espacio de Banach junto con la norma

$$\|u\|_{C^m([a,b];X)} = \|u\|_{C^0([a,b];X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0([a,b];X)} + \dots + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{C^0([a,b];X)}.$$

Sea  $p \in [1, \infty]$ . Se denota por  $L^p(a, b; X)$  al conjunto de todas las funciones medibles  $u : (0, T) \rightarrow X$  tales que  $\|u(t)\|_X \in L^p(a, b)$ . El espacio  $L^p(a, b; X)$  es un espacio de Banach con la norma, para el caso  $p \in [1; \infty)$ , como sigue

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left[ \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

y, para el caso  $p = \infty$ , como sigue

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \text{esssup} \{ \|u(t)\|_X \mid t \in [a, b] \}.$$

El caso particular cuando  $p = 2$  y  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espacio de Hilbert, el espacio  $L^2(a, b; X)$  resulta ser un espacio de hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

A seguir revisaremos algunas propiedades sobre inclusiones y un resultado sobre compacidad:

- Si la inclusión  $X \subset Y$  es continua entonces la inclusión  $L^p(a, b; X) \subset L^p(a, b; Y)$  es, también, continua cuando  $p \in [1, \infty]$ .
- Las inclusiones  $L^\infty(a, b; X) \subset L^p(a, b; X) \subset L^1(a, b; X)$  son continuas cuando  $p \in (1, \infty)$ .

**Teorema 7. (Teorema de Aubin-Lions-Simon).**

Sean  $X \subset Y \subset Z$  espacios de Banach tales que  $X$  está inmerso compactamente en  $Y$  y, a su vez,  $Y$  inmerso continuamente en  $Z$ . Dados  $1 \leq p, q \leq \infty$  definimos

$$W = \left\{ u \in L^p(a, b; X) \mid \frac{du}{dt} \in L^q(a, b; Z) \right\},$$

con norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(a,b;X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^q(a,b;Z)}.$$

Entonces, se cumple que,

- Si  $p < \infty$ , la inmersión de  $W$  en  $L^p(a, b; Y)$  es compacta.
- Si  $p = \infty$  y  $q > 1$ , la inmersión de  $W$  en  $C^0([0, T]; Y)$  es compacta.

Finalmente, cuando  $p \in [1, \infty]$ , se denota por  $W^{m,p}(a, b; X)$  al espacio

$$W^{m,p}(a, b; X) = \{ u \in L^p(a, b; X) \mid D^\alpha(u) \in L^p(a, b; X), |\alpha| \leq m \},$$

donde  $D^\alpha u$  es la derivada distribucional. Este espacio con norma definida por

$$(u, v)_{H^m(a,b;X)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(a,b;X)}.$$

Para terminar esta sección se definen y se dan algunas propiedades sobre espacios intermedios. Aquí se mencionan las siguientes definiciones y notaciones de Lions y Magenes (1972). Ahora, consideremos los espacios de Hilbert separables  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  y  $(Y, (\cdot, \cdot)_Y)$  tales que la inclusión  $X \subset Y$  y  $X$  es dado por un dominio de un operador  $\Lambda$  autoadjunto, positivo y no acotado en  $Y$  y la norma  $\|\cdot\|_X$  es equivalente a la norma del gráfico

$$[\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2]^{\frac{1}{2}}, u \in D(\Lambda) = X.$$

Por  $D(S)$  denotamos el conjunto de todos los elementos  $u$  tales que la forma anti-lineal

$$v \mapsto (u, v)_X, v \in X$$

es continua. Entonces la siguiente desigualdad define  $S$  como un operador no acotado en  $Y$

$$(Su, v)_Y = (u, v)_X.$$

El conjunto  $D(S)$  resulta ser un conjunto denso de  $Y$ ,  $S$  es un operador autoadjunto y

$$(Su, u)_Y = \|u\|_X^2 \geq C \|u\|_Y^2,$$

donde  $C$  es una constante positiva que se relaciona con la inmersión continua  $X \subset Y$ . Entonces, podemos definir las potencias  $S^\theta$  de  $S$  cuando  $\theta \in \mathbb{R}$ . En lo que sigue, usaremos la notación

$$\Lambda = S^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

Entonces, el operador  $\Lambda : X \rightarrow Y$  es autoadjunto y positivo. Además, se cumple que

$$(u, v)_X = (\Lambda x, \Lambda y)_Y \text{ para todo } u, v \in X.$$

Ahora podemos definir el espacio intermedio

**Definición 6.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Hilbert que satisfacen las propiedades previas y  $\Lambda$  definida como en (2.13). El espacio intermedio  $[X, Y]_\theta$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , es definido por

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta})$$

con la norma sobre  $[X, Y]_\theta$  dada por

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta} = \left[ \|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta} u\|_Y^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, mencionaremos un resultado importante cuando  $X, Y$  denotan espacios de Hilbert de la forma  $H^s(\mathcal{O})$  con  $s \in \mathbb{R}$ . Primero, se necesitan algunas suposiciones acerca del conjunto  $\mathcal{O}$

- El borde de  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  es una variedad infinitamente diferenciable de dimensión  $(n-1)$ ,  $\mathcal{O}$  viene a ser localmente sobre un lado de  $\partial\Omega$  (esto es, se considera  $\mathcal{O}$  una variedad con borde de clase  $C^\infty$ , el borde viene a ser  $\partial\mathcal{O}$ ).
- $\mathcal{O}$  es acotada.

**Teorema 8.** *Asumamos que  $\mathcal{O}$  satisface las propiedades antes mencionadas. Entonces*

$$[H^{s_1}(\mathcal{O}), H^{s_2}(\mathcal{O})]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\mathcal{O})$$

, para todo  $0 < s_2 < s_1$  y  $\theta \in (0, 1)$  y la siguiente desigualdad de interpolación es válida

$$\|u\|_{H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\mathcal{O})} \leq C_{\theta, s_1, s_2} \|u\|_{H^{s_1}(\mathcal{O})}^{1-\theta} \|u\|_{H^{s_2}(\mathcal{O})}^\theta. \quad (2.14)$$

Ahora, se presentará una útil caracterización sobre dominios de potencias fraccionarias de operadores. Ver (Bensoussan et al., 1993, Proposición 6.1).

**Teorema 9.** *Sea  $X$  un espacio de Hilbert y asuma que  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  es un operador cerrado creciente maximal de modo que  $\mathcal{A}^{-1}$  es acotado en  $X$ . Entonces*

$$D(\mathcal{A}^\alpha) = [D(\mathcal{A}), X]_{1-\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (2.15)$$

#### 2.1.4.2. Desigualdades

En esta sección se presentarán, y asumirán, algunas desigualdades útiles que serán usadas para este trabajo. La prueba de cada resultado a seguir puede ser encontrada en Adams (1975), Brézis (1984).

**Teorema 10. (Desigualdad de Poincaré).**

*Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado y  $p \in (1, \infty)$ . Entonces, existe una constante  $C_{p, |\mathcal{O}|} > 0$  que cumple la siguiente desigualdad*

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C_{p, |\mathcal{O}|} \|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{O})} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathcal{O}).$$

**Teorema 11. (Desigualdad de Hölder).**

*Sean  $p, q \in [1, \infty]$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $u \in L^p(\mathcal{O})$  y  $v \in L^q(\mathcal{O})$  entonces el producto  $uv \in L^1(\mathcal{O})$  y la siguiente desigualdad es válida*

$$\int_{\mathcal{O}} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\mathcal{O})} \|v\|_{L^q(\mathcal{O})}.$$

**Teorema 12. (Desigualdad tipo Friedrichs).**

Sea  $\mathcal{O}$  un dominio acotado para el cual la fórmula de Gauss-Green es válida y  $u \in H^1(\mathcal{O})$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{O}} |u|^2 dx \leq C \left[ \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial \mathcal{O}} |u|^2 dx \right].$$

**Teorema 13. (Desigualdad de Hölder generalizada).**

Sean  $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$  números reales tales que  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r} \leq 1$ . Sea  $u_i \in L^{p_i}(\mathcal{O})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Entonces  $u = \prod_{i=1}^m u_i \in L^r(\mathcal{O})$  y

$$\|u\|_{L^r(\mathcal{O})} \leq \prod_{i=1}^m \|u_i\|_{L^{p_i}(\mathcal{O})}.$$

**Lema 1. (Desigualdad de Young).**

Sean  $p, q \in (1, \infty)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

**2.1.5. Semigrupos**

En esta sección, se denotará por  $(X, S(t))$  a un sistema dinámico donde  $(S, d)$  es un espacio métrico completo y  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo, es decir:

- El operador  $S(t)$  es acotado para cada  $t \in [0, \infty)$
- $S(0) = I$
- $S(t+s) = S(t)S(s)$  para todo  $t, s \in [0, \infty)$  (propiedad de semigrupo)
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)u = u$  para cada  $u \in X$  con respecto a la norma sobre  $X$ .

En la primera parte de esta sección se presentarán resultados sobre el buen posicionamiento de las perturbaciones de Lipschitz de ecuaciones de evolución lineal. En la segunda parte se presentarán resultados relacionados con la existencia y propiedades de los atractores.

**Problema de Cauchy abstracto.**

Sea  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  y sea una función arbitraria  $\mathcal{F} : [0, T) \times X \rightarrow X$ . Consideramos el siguiente problema de valor inicial no homogéneo

$$\begin{cases} y_t(t) - \mathcal{A}y(t) = \mathcal{F}(t, y(t)) & , t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

En esta parte se enunciarán algunos resultados concernientes con la existencia de soluciones del problema (2.16). Como referencias se cita a Barbu (1976); Pazy (1983). En relación con las ecuaciones de evolución lineal se cita a Brézis (1984). Primero se tienen algunas definiciones asociadas con (2.16):

**Definición 7.** Una función  $y : [0, T) \rightarrow X$  es una solución clásica de la ecuación (2.16) sobre el intervalo  $[0, T)$ , si  $y$  es continua sobre  $[0, T)$  y continuamente diferenciable sobre  $(0, T)$ , entonces  $y(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $(0, T)$  y (2.16) se satisface sobre  $[0, T)$ .

**Definición 8.** Una función  $y$  que es diferenciable en casi todo punto sobre el intervalo  $[0, T]$  tal que  $y_t \in L^1(0, T; X)$ , es llamada solución fuerte del problema de valor inicial (2.16) si  $y$  satisface que  $y(0) = y_0$  y  $y_t(t) - \mathcal{A}y(t) = \mathcal{F}(y(t))$  sobre  $[0, T]$ .

**Definición 9.** Sea  $X$  un espacio de Banach y  $\mathcal{A}$  un generador infinitesimal del  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  con  $y_0 \in X$ . Una función  $y \in C([0, T]; X)$  es llamada solución suave del problema (2.16) si  $y$  satisface la siguiente ecuación integral

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)\mathcal{F}(s, y(s))ds, \quad t \in [0, T].$$

**Teorema 14.** Sea  $\mathcal{F} : [0; \infty) \times X \rightarrow X$  continua en  $t$  para  $t \geq 0$  y localmente Lipschitziana en  $y$ , uniformemente en  $t$  sobre intervalos acotados. Si  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $X$  entonces para cada condición inicial  $y_0 \in X$  existe un  $T_{\text{máx}} \leq \infty$  tal que el problema de valor inicial (2.16) tiene una única solución suave  $y$  sobre  $[0, T_{\text{máx}})$ . Además, si  $T_{\text{máx}} < \infty$  entonces  $\lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}^+} \|y(t)\|_X = +\infty$ .

El siguiente resultado da una hipótesis para que la solución suave de (2.16) sea una solución fuerte.

**Teorema 15.** Sea  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  un operador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre un espacio de Banach reflexivo  $X$ .  $\mathcal{F} : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  es de Lipschitz en ambas variables,  $y_0 \in D(\mathcal{A})$  e  $y$  es la solución suave del problema de valor inicial (2.16) entonces  $y$  es la solución fuerte de este problema de valor inicial.

El siguiente resultado implica la existencia de la solución clásica del problema de valor inicial (2.16). Primero considere que  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  es un generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre el espacio de Banach  $X$  y defina  $Y = (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ , donde  $\|y\|_{\mathcal{A}} = \|y\|_X + \|\mathcal{A}y\|_X$ . Note que la cerradura de  $\mathcal{A}$  implica que  $Y$  es un espacio de Banach y se tiene el siguiente:

**Teorema 16.** Sea  $\mathcal{F} : [0, \infty) \times Y \rightarrow Y$  uniformemente lipschitziana en  $Y$  y para cada  $y \in Y$  sea  $\mathcal{F}(t, y)$  continua desde  $[0, T]$  hacia  $Y$ . Si  $y_0 \in D(\mathcal{A})$  entonces el problema de valor inicial (2.16) tiene una única solución clásica sobre  $[0, T]$ .

### 2.1.6. Teoría de atractores

Esta parte está dedicada a las definiciones y resultados sobre la teorías de los sistemas dinámicos no lineales infinito dimensionales. El objetivo principal aquí es presentar la teoría pertinente a la existencia de atractores globales y se proveeran algunos resultados que nos permitirán concluir con algunas propiedades adicionales, como son: la buena estructura, la dimensionalidad y la suavidad de este objeto. La mayoría de los resultados pueden ser encontrados en referencias clásicas tales como Babin y Vishik (1992), Chueshov y Lasiecka (2008), Hale (1988), Ladyzhenskaya (1991), Temam (1988). Se seguirá más de cerca (Chueshov y Lasiecka, 2010, Capítulo 7).

**Definición 10.** Sea  $(X, S(t))$  un sistema dinámico.

- $(X, S(t))$  es llamado **disipativo** si posee un conjunto absorbente, es decir, existe un conjunto acotado  $\mathcal{B} \subset X$  que atrae a cualquier conjunto acotado  $B$  en un tiempo finito  $T_B > 0$ . En otras palabras, el conjunto  $\mathcal{B}$  cumple con la siguiente condición

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad t \geq T_B.$$

- $(X, S(t))$  es llamado **asintóticamente compacto** si existe un conjunto compacto atrayente  $K$ , es decir, para cualquier conjunto acotado  $D$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(S(t)D, K) = 0,$$

donde  $d_X(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$ , para  $A, B \subset X$ .

- El sistema dinámico  $(X, S(t))$  es llamado **asintóticamente suave** si para cualquier conjunto acotado  $D \subset X$  tal que  $S(t)D \subset D$  tal que  $S(t)D \subset D$  para  $t > 0$  existe un conjunto compacto  $K \subset \overline{D}$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(S(t)D, K) = 0.$$

- Un *atractor global* para el sistema dinámico  $(X, S(t))$  es un conjunto cerrado  $A \subset X$  que es totalmente invariante y uniformemente atrayente, esto es,

$$S(t)A = A \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_X(S(t)B, A) = 0,$$

para cualquier conjunto acotado  $B \subset X$ .

El siguiente resultado da una relación entre la definición de sistema dinámico asintóticamente compacto y la definición de asintóticamente suave.

**Proposición 1.** *Sea  $X$  un espacio de Banach y  $(X, S(t))$  un sistema dinámico disipativo definido sobre  $X$ . Entonces que  $(X, S(t))$  sea asintóticamente compacto es equivalente que  $(X, S(t))$  asintóticamente suave son afirmaciones son equivalentes.*

La existencia de un atractor global se basa en dos propiedades muy importantes: la disipatividad y la compacidad. El siguiente resultado provee un resultado sobre las condiciones para la existencia de un atractor global compacto en un sistema dinámico.

**Teorema 17.** *Un sistema dinámico  $(X, S(t))$  que es suave asintóticamente disipativo en un espacio de Banach  $X$ , siempre posee un único atractor global compacto  $A$ . Este atractor único es un conjunto conexo y puede ser descrito como un conjunto de todas las trayectorias acotadas completas.*

Que un sistema dinámico sea asintóticamente compacto (resp. asintóticamente suave) es a menudo difícil de comprobar. En su lugar algunos criterios de compacidad (resp. suavidad) son usados. A continuación, se presentará un criterio para poder comprobar que un sistema dinámico cumple con las propiedades de compacidad asintótica y/o suavidad asintótica.

El primero es muy útil para sistemas del tipo hiperbólico e involucra una función  $\Psi : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \Psi(y_n, y_m) = 0, \quad (2.17)$$

para cada sucesión  $\{y_n\} \subset B$ , donde  $B$  es un conjunto acotado de  $X$ .

**Teorema 18.** *Sea  $X$  es un espacio de Banach y  $(X, S(t))$  un sistema dinámico. Asumamos que para cualquier conjunto positivamente invariante  $B \subset X$  y cualquier  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar un tiempo  $T = T_{\varepsilon, B}$  y una función  $\Psi_{\varepsilon, B, T} : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la igualdad (2.17) y, además, cumple*

$$\|S(T)y^1 - S(T)y^2\|_X \leq \varepsilon + \Psi_{\varepsilon, B, T}(y^1, y^2), \quad \forall y^1, y^2 \in B.$$

*Entonces,  $(X, S(t))$  es asintóticamente compacto.*

Para presentar el siguiente criterio, presentaremos algunas definiciones con las cuales está relacionada.

**Definición 11.** Una función  $n_X : X \rightarrow [0, \infty)$  es llamada **seminorma compacta** sobre  $X$  si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_X(x_m) = 0,$$

para cualquier sucesión  $\{x_m\} \subset X$  tal que  $x_m \rightarrow 0$  en  $X$ .

**Definición 12.** Sean el producto  $H = X \times Y$  donde  $X, Y$  son dos espacios de Banach reflexivos con  $X$  compactamente inmerso en  $Y$ . Sea, también, el sistema dinámico  $(H, S(t))$  dado por

$$S(t)y = (u(t), u_t(t)), \quad y(u(0), u_t(0)) \in H, \quad (2.18)$$



donde las funciones  $u$  cuentan con la propiedad de regularidad

$$u \in C([0, \infty); X) \cap C^1([0, \infty); Y). \quad (2.19)$$

Decimos que el sistema dinámico es **cuasi-estable** sobre un conjunto  $B \subset H$ , si existe una seminorma compacta  $n_X$  sobre  $X$  y funciones escalares no negativas  $a(t)$  y  $c(t)$ , localmente acotadas en  $[0, \infty)$ , y  $b(t) \in L^1(0, \infty)$  con  $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$ , tal que,

$$\|S(t)y^1 - S(t)y^2\|_X^2 \leq a(t) \|y^1 - y^2\|_X^2, \quad (2.20)$$

y

$$\|S(t)y^1 - S(t)y^2\|_X^2 \leq b(t) \|y^1 - y^2\|_X^2 + c(t) \sup_{0 < s < t} [n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2, \quad (2.21)$$

para cualquier  $y^1, y^2 \in B$ , donde  $S(t)y^i = (u^i(t), u_t^i(t))$ ,  $i = 1, 2$ .

La primera propiedad de un sistema cuasi-estable es la compacidad asintótica.

**Teorema 19.** *Sea  $(H, S(t))$  un sistema dinámico dado por (2.18) y que satisface (2.19). Suponga que el sistema es cuasi-estable sobre cada conjunto acotado positivamente invariante  $B$  de  $H$ . Entonces, se cumple que  $(H, S(t))$  es asintóticamente compacto.*

La cuasiestabilidad implica, también, otras propiedades importantes sobre los atractores globales, como son: la dimensión fractal finita y la regularidad espacial mejorada.

**Definición 13.** Dado un conjunto compacto  $A$ , la **dimensión fractal** de  $A$  se define como el límite

$$\dim_F(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

donde  $N_\varepsilon(A)$  es la mínima cantidad de bolas cerradas de radio  $2\varepsilon$  que se necesitan para cubrir el conjunto  $A$ .

**Teorema 20.** *Sea  $(H, S_t)$  un sistema dinámico que tiene un atractor global  $\mathbf{A}$  tal que  $(H, S_t)$  es cuasi-estable sobre  $\mathbf{A}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  tiene dimensión fractal finita.*

El siguiente resultado es con respecto a la ganancia de regularidad en la variable  $t$ .

**Teorema 21.** *Sea  $(H, S(t))$  un sistema dinámico tal que  $c(t)$  acotado. Asumamos, en adición, que el sistema posee un atractor global  $\mathbf{A}$  y que  $(H, S(t))$  es cuasi-estable sobre  $\mathbf{A}$ . Entonces, cualquier trayectoria completa  $(u(t), u_t(t))$  en el atractor tiene regularidad adicional*

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}, X) \cap C(\mathbb{R}, Y) \text{ y } u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}, Y).$$

En adición,

$$\|u_t(t)\|_X^2 + \|u_{tt}(t)\|_Y^2 \leq R^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

donde  $R > 0$  depende de  $\sup_{t>0} \{c(t)\}$ ,  $n_X$  y la inmersión compacta  $X \subset Y$ .

Finalmente, vamos a concluir esta sección con los conceptos de atractor exponencial generalizado y sistemas gradientes.

**Definición 14.** Un conjunto compacto  $A^{\text{exp}} \subset H$  se llama **atractor exponencial generalizado** si

- Es positivamente invariante,
- Atrae exponencialmente rápido las trayectorias desde cualquier conjunto acotado de valor inicial,
- Tiene dimensión finita fractal en un espacio extendido  $\tilde{H} \supseteq H$ .

Sobre la existencia de tal atractor, podemos contar con el siguiente teorema.

**Teorema 22.** Sea  $(H, S(t))$  un sistema dinámico disipativo que satisface las condiciones (2.18)-(2.19) y es cuasi-estable sobre algún conjunto acotado absorbente  $\mathcal{B}$ . Suponga, además, que existe un espacio extendido  $\tilde{H} \supset H$  tal que para cada  $T > 0$ ,

$$\|S(t_1)y - S(t_2)y\|_{\tilde{H}} \leq C_{BT} |t_1 - t_2|^\eta, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad y \in \mathcal{B},$$

donde  $C_{BT} > 0$  y  $\eta \in (0, 1]$  son constantes. Entonces, el sistema dinámico  $(H, S(t))$  tiene un atractor exponencial generalizado  $A^{\text{exp}} \subset H$  que posee dimensión fractal finita en  $\tilde{H}$ .

Para que podamos obtener información sobre como es la estructura de los atractores, necesitamos el concepto de sistemas gradientes.

**Definición 15.** Un funcional  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada **función de Lyapunov** estricta para un sistema dinámico  $(H, S(t))$  si

- La función  $t \mapsto \Phi(S(t)z)$  es no creciente para cualquier  $z \in H$ ,
- Si  $\Phi(S(t)z) = \Phi(z)$  se cumple para todo  $t$ , entonces  $z$  se convierte en un punto estacionario de  $S(t)$ .

Ahora, con respecto a como es la estructura de los atractores, contamos con la inclusión  $\mathbb{M}_+(\mathcal{N}) \subset A$ , donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de los puntos estacionarios de  $S(t)$  y  $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$  es la variedad inestable de  $y \in H$  tal que existe una trayectoria completa  $u(t)$  satisfaciendo

$$u(0) = y \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Para sistemas gradientes es posible probar que la variedad inestable  $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$  coincide con el atractor  $A$ . El resultado presentado a continuación es bastante conocido.

**Teorema 23.** Sea  $(H, S(t))$  un sistema gradiente asintóticamente compacto con funcional de Lyapunov que denotaremos por  $\Phi$ . Supongamos que

$$\Phi(y) \rightarrow \infty \text{ si y solamente si } \|y\|_H \rightarrow \infty, \quad (2.23)$$

y que, además, el conjunto de todos los puntos estacionarios  $\mathcal{N}$  es un conjunto acotado. Entonces, el sistema  $(H, S(t))$  tiene un atractor global compacto que coincide exactamente con la variedad inestable  $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$ .

## 2.1.7. Continuidad de atractores

### Semicontinuidad superior e inferior

Consideremos  $\Lambda$  un espacio métrico completo y  $S_\lambda(\cdot)$  una familia parametrizada de semigrupos sobre  $X$ . Supongamos que

- (L1)  $S_\lambda(\cdot)$  posee un atractor global  $\mathcal{A}_\lambda$  para cualquier elección de  $\lambda \in \Lambda$ ;
- (L2) Existe un subconjunto  $D \subset X$  tal que es acotado y  $\mathcal{A}_\lambda \subset D$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ ; y
- (L3) Para  $t > 0$ , la función  $S_\lambda(t)x$  es continua en  $\lambda$ , es continua uniformemente para la variable  $x$  en subconjuntos acotados de  $X$ .

Adicionalmente, denotaremos por  $CB(X)$  la colección de todos los subconjuntos cerrados y acotados de  $X$ , y  $d_H$  como la distancia de Hausdorff definida por

$$d_H = \max\{d_X(A, B); d_X(B, A)\}, \quad A, B \subset X$$

**Proposición 2.** *Suponga que  $D$  es acotado y (L3) es válido. Entonces, para cualquier elección de  $t > 0$  la función  $\lambda \mapsto \overline{S_\lambda(t)D}$  es continua desde  $\Lambda$  hacia  $CB(X)$ .*

**Proposición 3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos una función continua  $f_n : K \rightarrow Y$ , donde  $K$  es un espacio métrico compacto e  $Y$  es un espacio métrico arbitrario. Si  $f$  es una función continua y es el límite puntual monótono de  $f_n$ , i.e. para todo  $x \in K$*

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \text{ como } n \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad d_Y(f_{n+1}(x), f(x)) \leq d_Y(f_n(x), f(x))$$

*entonces  $f_n$  converge uniformemente hacia  $f$ .*

**Teorema 24.** *Asuma que (L1) y (L2 – 3). Si existe  $t_n \rightarrow \infty$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \rho_X(S_\lambda(t_n)D, \mathcal{A}_\lambda) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

*entonces  $\mathcal{A}_\lambda$  es continua en  $\lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Por otra parte, si  $\Lambda$  es compacto entonces la continuidad de  $\mathcal{A}_\lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$  implica que existe  $t_n \rightarrow \infty$  tal que (2.24) es válido.*

**Corolario 1.** *Suponga que (L1 – L3) son válidos y que  $\Lambda$  es compacto. Asumamos, adicionalmente, que  $S_\lambda(t)x$  es continua en  $x$ , continua uniformemente en  $\lambda$  y continua uniformemente para  $x$  en subconjuntos acotados de  $X$  y  $t \in [0, T]$  para cualquier  $T > 0$ . Entonces la continuidad de  $\mathcal{A}_\lambda$  implica*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \rho_X(S_\lambda(t), \mathcal{A}_\lambda) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

## Convergencia puntual y continuidad residual

**Proposición 4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $f_n : \Lambda \rightarrow Y$  un mapeo continuo, donde  $\Lambda$  es un espacio métrico completo e  $Y$  es un espacio métrico escogido arbitrariamente. Si  $f$  es límite puntual de  $f_n$ , i.e.  $f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda)$  para cada  $\lambda \in \Lambda$  (y el límite existe), entonces los puntos de continuidad de la función  $f$  forman un subconjunto residual de  $\Lambda$ .

**Proposición 5.** Bajo la suposiciones (L1 – L3),  $\mathcal{A}_\lambda$  es continua en  $\lambda$  para todo  $\lambda_0$  en un subconjunto residual de  $\Lambda$ . En particular, el conjunto de todos los puntos de continuidad de  $\mathcal{A}_\lambda$  es un subconjunto denso en  $\Lambda$ .

**Observación 8.** Los resultados de continuidad residual también son válidos para los atractores pullback, vistos en Carvalho et al. (2013), y los atractores uniformes, Chepyshov y Vishik (2002), que ocurren en sistemas no autónomos.

## 2.2. Revisión de la literatura sobre el problema $(P_\beta)$

Con la finalidad de entender el problema, se enunciará diferentes resultados que serán de vital importancia para mostrar la existencia de un atractor exponencial para el semigrupo asociado al sistema. Para esto se seguirá lo mostrado en Cavalcanti et al. (2021), Cavalcanti et al. (2010), Triggiani y Yao (2002) y Chueshov y Lasiecka (2010).

### 2.2.1. Dinámica a largo plazo

Sea  $(M, g)$  una variedad compacta conexa 3-dimensional de clase  $C^\infty$ , con borde suave  $\partial M$ . Nos interesa estudiar la ecuación de onda semilineal

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) + f(u) = \beta h(x) & , \text{ en } M \times (0, \infty) \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial M \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & , x \in M. \end{cases} \quad (2.25)$$

Asumimos que

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad |f'(z)| \leq C_f(1 + |z|^2), \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (2.26)$$

para alguna constante  $C_f > 0$ ,

$$\liminf_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} > -\lambda_1, \quad (2.27)$$

donde  $\lambda_1 > 0$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  en  $M$  con la condición homogénea de borde de Dirichlet, y

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \quad g(0) = 0, \quad m_1 \leq g'(z) \leq m_2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

para algunas constantes  $m_1, m_2 > 0$ . Para el coeficiente de amortiguamiento, existe algún  $a_0 > 0$ ,

$$a \in L^\infty(M), \quad a \geq a_0 \text{ a.e. en } \omega, \quad (2.29)$$

donde  $\omega$  es un conveniente conjunto abierto de  $M$ .

Recordemos, la notación que dimos en la introducción de este trabajo para el espacio de fase natural para el problema:  $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$ , equipado con la norma  $\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \|v\|_{L^2(M)}^2$ .

Como veremos en el Teorema 26, bajo las suposiciones anteriores, el problema (2.25) está bien colocado en  $\mathcal{H}$ . Luego su operador solución define un  $C^0$  semigrupo no lineal  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $\mathcal{H}$ . A menudo el correspondiente sistema dinámico continuo generado por el problema (2.25) es denotado por  $(\mathcal{H}, S(t))$ .

**Observación 9.** Recordemos que un atractor global para un sistema dinámico  $(\mathcal{H}, S(t))$  es un conjunto compacto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$  que es completamente invariante y atrae conjuntos acotados de  $\mathcal{H}$ . También, dado un conjunto compacto  $K \subset \mathcal{H}$  su dimensión fractal es definida por

$$\dim_F K = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(n_\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)},$$

donde  $n_\epsilon$  es el mínimo número de bolas cerradas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir  $K$ . Véase Babin y Vishik (1992), Temam (1988) o (Chueshov y Lasiecka, 2010, Capítulo 7).

**Teorema 25. (Atractores globales).** *Bajo las suposiciones (2.26)-(2.28), dado  $\varepsilon > 0$ , asuma que (2.29) se satisface para algún conjunto  $\varepsilon$ -controlable admisible  $\omega \subset M$ . Entonces las dinámicas del problema (2.25) tienen un atractor global  $\mathcal{A}$  con dimensión fractal finita y regularidad  $H^2(M) \times H_0^1(M)$ .*

**Observación 10.** La prueba del Teorema 25 está dividida en tres partes. Primero, mostramos que nuestro sistema es gradiente usando la propiedad de continuación única en el Teorema 4. Luego aplicamos una reciente teoría de sistemas cuasies- tables (Chueshov y Lasiecka (2010)) y la desigualdad de observabilidad en el Teorema 4 para probar la compacidad asintótica del sistema. Finalmente, aplicando un resultado clásico de existencia (véase (Chueshov y Lasiecka, 2010, Corolario 7.5.7)) obtenemos un atractor global caracterizado por  $\mathcal{A} = \mathbb{M}^u(\mathcal{N})$ , es decir, por la variedad inestable del conjunto  $\mathcal{N}$  de soluciones estacionarias de (2.25).

## Buena colocación y estimativas de energía

Vamos a escribir

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \partial_t u \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x)g(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta h(x) \end{bmatrix}$$

Entonces el problema (2.25) es equivalente al problema de Cauchy

$$\partial_t U + \mathbb{A}U + \mathbb{F}U = \mathbb{H}, \quad U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

definido en  $\mathcal{H}$  con dominio

$$D(\mathbb{A}) = (H^2(M) \cap H_0^1(M)) \times H_0^1(M).$$

De la suposición (2.26) es bien conocido que  $\mathbb{F}$  es localmente lipschitziana en  $\mathcal{H}$  y  $\mathbb{H}$  globalmente Lipschitz. Luego la existencia de soluciones débiles y fuertes se sigue de la teoría de semigrupos. El siguiente resultado de existencia es esencialmente probado en Cavalcanti et al. (2021).

**Teorema 26. (Buena colocación).** *Asuma que (2.26)-(2.29) son válidos. Entonces*

1. *Para el dato inicial  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ , el problema (2.25) posee una única solución débil*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H_0^1(M)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(M)). \quad (2.31)$$

2. *Para el dato inicial  $(u_0, u_1) \in D(\mathbb{A})$ , el problema (2.25) posee una única solución fuerte*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H^2(M) \cap H_0^1(M)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(M)).$$

3. *Dado  $T > 0$  y un conjunto acotado  $B$  de  $\mathcal{H}$ , existe una constante  $D_{BT} > 0$  tal que para cualquier par de valores iniciales  $z_0^i \in B, i = 1, 2$ , las correspondientes soluciones  $z^i = (u^i, \partial_t u^i)$  satisfacen*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq D_{BT} \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.32)$$

donde  $D_{BT} > 0$  es constante.

La energía total del problema (2.25) es definida por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_M F(u(t)) dx + \beta \int_M hu(t) dx, \quad (2.33)$$

con  $F(u) = \int_0^u f(r) dr$ . Para evitar confusión, a veces escribiremos  $\mathcal{E}_u$  en lugar de  $\mathcal{E}$ . Finalizamos esta sección con algunas útiles estimativas de energía.

**Lema 2.** *Con los supuestos del Teorema 26*

1. *La energía total es no creciente y*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_u(t) = - \int_M a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx, \quad t \geq 0. \quad (2.34)$$

2. *Se da la existencia de las constantes  $\beta, C_1, C_2 > 0$  y se cumple*

$$\beta \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1 \leq \mathcal{E}_u(t) \leq C_2 (1 + \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^4), \quad t \geq 0. \quad (2.35)$$

3. *Existe una constante  $C_0 > 0$  tal que para cualquier dato inicial  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$*

$$\|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_0 (1 + \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}^4), \quad t \geq 0. \quad (2.36)$$

## Estructura gradiente

Un sistema dinámico  $(\mathcal{H}, S(t))$  se caracteriza como gradiente si incluye un funcional de Lyapunov, es decir, una función  $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual  $\Psi(S(t)z)$  es no creciente y si

$$\Psi(S(t)z) = \Psi(z); \quad \forall t \geq 0, \quad (2.37)$$

entonces  $z$  es un punto fijo de  $S(t)$ .

Cavalcanti et al. (2021) mostraron que el sistema  $(\mathcal{H}, S(t))$  posee una estructura gradiente (véase Teorema 4.3) a partir de la desigualdad de observabilidad (2.11). En particular los autores mostraron el siguiente resultado.

**Teorema 27. (Estructura gradiente).** *Bajo las suposiciones del Teorema 25 el sistema dinámico  $(\mathcal{H}, S(t))$  asociado al problema (2.25) es gradiente. Además, la energía total  $\mathcal{E}(t)$  genera un funcional de Lyapunov.*

**Observación 11.** Inicialmente Cavalcanti et al. (2021) mostraron la estructura gradiente para (2.30) cuando  $\beta = 0$  sobre el problema dual. Como se trabaja en dicho problema dual, la presencia del término  $\beta h(x)$  no afecta, pues al derivar respecto de “ $t$ ” desaparece.

## Cuasiestabilidad

Para probar la suavidad asintótica y otras propiedades sobre atractores globales, se aplica una teoría reciente sobre sistemas cuasiestables dada en Chueshov y Lasiecka (2010), la cual es muy útil para poder estudiar dinámicas a largo plazo de ecuaciones de onda no lineales. Su estructura se fundamenta en un sistema  $(H, S(t))$  donde  $H = X \times Y$ , con  $X, Y$  siendo espacios de Banach y  $X \hookrightarrow Y$  compactamente. Además, para un  $z_0 = (u_0, u_1) \in H$ , la trayectoria  $S(t)z_0 = (u(t), \partial_t u(t))$  cumple

$$u \in C^0(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y).$$

Para poder presentar la definición de cuasiestabilidad, dado un conjunto  $B$  y  $z^1, z^2 \in B$ , denotemos las correspondientes trayectorias como

$$S(t)z^i = (u^i(t), \partial_t u^i(t)), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Bajo estas condiciones, el sistema dinámico  $(H, S(t))$  se considera cuasiestable en un conjunto  $B \subset H$  si existen constantes positivas  $\zeta$  y  $C_B$  tales que para cualquier  $z^1, z^2 \in B$ ,

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq e^{-\zeta t} \|z^1 - z^2\|_H^2 + C_B \sup_{s \in [0, t]} \|u^1(s) - u^2(s)\|_W^2, \quad (2.38)$$

donde  $W \subset Y$  es un espacio de Banach con inmersión compacta  $X \hookrightarrow W$ .

**Observación 12.** Los sistemas cuasiestables tienen tres características principales con respecto a los atractores globales.

- (a) Si un sistema es cuasiestable sobre cualquier conjunto acotado positivamente invariante, entonces es asintóticamente suave (véase (Chueshov y Lasiecka, 2010, Proposición 7.9.4)).
- (b) Si un sistema posee un atractor global  $\mathcal{A}$  y es cuasiestable sobre  $\mathcal{A}$ , entonces ese atractor tiene dimensión fractal finita (véase (Chueshov y Lasiecka, 2010, Teorema 7.9.6)).
- (c) La constante  $C_B > 0$  en (2.38) puede ser reemplazada por una  $L^1_{loc}$  función. No obstante, cuando  $C_B$  es una constante, las trayectorias completas  $(u(t), \partial_t u(t))$  dentro del atractor global muestran otras regularidades temporales, a saber

$$\|\partial_t u(t)\|_X + \|\partial_t^2 u(t)\|_Y \leq R, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.39)$$

donde  $R > 0$  es una constante (véase (Chueshov y Lasiecka, 2010, Teorema 7.9.8)).

El siguiente Teorema muestra que nuestro sistema es cuasiestable sobre cualquier conjunto acotado invariante hacia adelante. La demostración del resultado se remite a (Cavalcanti et al., 2021, Teorema 4.4).

**Teorema 28. (Cuasiestabilidad).** *El sistema dinámico  $(\mathcal{H}, S(t))$  generado por el problema (2.25) es cuasiestable sobre cualquier conjunto  $B$  de  $\mathcal{H}$  que sea acotado positivamente invariante. Más precisamente, podemos encontrar constantes positivas  $\zeta$  y  $C_B$  tales que cualquier par de soluciones dadas  $z^i = (u^i, \partial_t u^i)$ ,  $i = 1, 2$  del problema (2.25) con dato inicial  $z_0^1, z_0^2 \in B$ , cumple*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{-\zeta t} \|z_0^1\|_{\mathcal{H}}^2 + C_B \sup_{s \in [0, t]} \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^3(M)}^2, \quad t \geq 0. \quad (2.40)$$

Note que (2.40) es una desigualdad de cuasiestabilidad como (2.38) desde que  $X = H_0^1(M)$  está compactamente inmerso en  $W = L^3(M)$ .

La demostración de este teorema se fundamenta en varios resultados anteriores. En primer lugar, se establece que el operador solución  $S(t)$ , del problema (2.25), definido en el espacio de fase  $\mathcal{H}$  satisface la condición (2.31). Esto implica que el sistema  $(\mathcal{H}, S(t))$  entra en la categoría de sistemas cuasiestables. Por lo tanto, para poder demostrar la cuasiestabilidad de conjuntos acotados invariantes hacia adelante en  $\mathcal{H}$ , será suficiente verificar que se cumple la desigualdad (2.40). Para ello, al considerar  $w = u^1 - u^2$ , observamos que  $(w, \partial_t w)$  satisface la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = p_0 w + p_1 \partial_t w & , \text{ en } M \times (0, \infty), \\ w = 0 & , \text{ sobre } \partial M \times (0, \infty), \\ w(0) = w_0, \partial_t w(0) = w_1 & , \text{ en } M, \end{cases} \quad (2.41)$$

donde  $(w_0, w_1) = z_0^1 - z_0^2$ ,

$$p_0 = -f'(\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2) \text{ y } p_1 = -ag'(\beta \partial_t u^1 + (1 - \beta)\partial_t u^2), \quad (2.42)$$



$\alpha, \beta \in [0, 1]$ . La energía del sistema es definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(w(t), \partial_t w(t))\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Vemos que

$$\frac{d}{dt} E \leq -a_0 m_1 \|\partial_t w\|_{L^2(\omega)}^2 - \int_M p_0 w \partial_t w dx. \quad (2.43)$$

En orden de establecer la estimativa (2.40) vamos a usar el método de la energía perturbada. Definimos

$$\phi(t) = \int_M w(t) \partial_t w(t) dx, \quad \psi(t) = \int_{\omega} w(t) \partial_t w(t) dx,$$

y

$$\Phi(t) = \mu E(t) + \eta \phi(t) + \psi(t),$$

con  $\mu, \eta > 0$  que serán fijadas a-posteriori.

Es así que en Cavalcanti et al. (2021) muestran que bajo las suposiciones y notaciones anteriores,

1. Para  $\mu$  suficientemente grande y  $\eta \leq 1$  tenemos

$$\beta_1 E(t) \leq \Phi(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0, \quad (2.44)$$

$$\text{con } \beta_1 = \mu - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}} \text{ y } \beta_2 = \mu + \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

2. Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{d\phi}{dt} \leq -E - \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(M)}^2 + 2 \|\partial_t w\|_{L^2(M)}^2 + C \|w\|_{L^3(M)}^2 + \int_M p_0 |w|^2 dx, \quad (2.45)$$

3. Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{d\psi}{dt} \leq -\|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 + 2 \|\partial_t w\|_{L^2(\omega)}^2 + C \|w\|_{L^3(M)}^2 + \int_{\omega} p_0 |w|^2 dx.$$

y por lo tanto, a partir de (2.43) y tomando  $\mu > 2/(a_0 m_1)$  se sigue que

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) \leq -\eta E(t) + Z(t), \quad t \geq 0,$$

donde

$$Z = -\frac{3}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 - \mu \int_M p_0 w w_t dx + 2\eta \|w_t\|_{L^2(M)}^2 + 2 \int_M |p_0 w^2| dx + C_B \|w\|_{L^3(M)}^2.$$

Luego usando (2.26) y el lema de Gronwall, se obtiene

$$\phi(t) \leq e^{-\frac{\eta}{\beta_2} t} \phi(0) + \int_0^t e^{-\frac{\eta}{\beta_2} (t-s)} Z(s) ds. \quad (2.46)$$

Finalmente, el resultado se sigue de las estimativas de Strichartz sobre  $p_0 w$ .

## Atractor global

### Prueba del Teorema 25

(a) Ya ha sido probado que el sistema es asintóticamente suave y gradiente. También, notamos que  $\Psi(z) \rightarrow \infty$  si y solo si  $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$ . La prueba se reduce a comprobar que las soluciones estacionarias de (2.25) son uniformemente acotadas. De hecho, si

$$\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \int_M f(u)udx = \beta \int_M h(x)udx,$$

usando (2.27) podemos escribir

$$\|\nabla u\|_2^2 + \int_M f(u)udx \geq -\frac{\lambda_1}{4} \|u\|_{L^2(M)}^2 - c_f,$$

Además como  $\beta \in [0, 1]$ :

$$\beta \int_M h(x)udx \leq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_2^2 + C_h$$

para constantes  $c_f > 0$  y  $C_h > 0$  dependiendo únicamente de  $h$ . Tenemos como resultado  $\|\nabla u\|_2^2 \leq 2c_f$ , de este modo probamos que  $\mathcal{N}$  es un conjunto acotado. Entonces, que existe un atractor global para  $\mathcal{A}$  se sigue de un resultado clásico (véase (Chueshov y Lasiecka, 2010, Corolario 7.5.7)).

(b) El Teorema 28 muestra que nuestro sistema es cuasiestable sobre el atractor global  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto, como se mencionó en la observación 12,  $\mathcal{A}$  tiene dimensión fractal finita de (Chueshov y Lasiecka, 2010, Teorema 7.9.6).

(c) Para ver la regularidad del atractor  $\mathcal{A}$ , es conocido por (2.39), cualquier trayectoria completa  $(u(t), \partial_t u(t))$  satisface

$$\|\partial_t u(t)\|_{H_0^1(M)} + \|\partial_t^2 u(t)\|_{L^2(M)} \leq R, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, (2.25) resulta que  $-\Delta u \in L^2(M)$  y, así,

$$(u, \partial_t u) \in (H^2(M) \cap H_0^1(M)) \times H_0^1(M).$$

Con este resultado se completa la prueba del Teorema 25.

## 2.3. Marco conceptual

Debido a la naturaleza teórica matemática del trabajo, no se precisó de un marco conceptual.

# III. MARCO METODOLÓGICO

## 3.1. Hipótesis central de la investigación

### Hipótesis General:

Es posible demostrar la existencia y la continuidad de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

### Hipótesis Específica 1:

Existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

### Hipótesis Específica 2:

Es posible demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

## 3.2. Variables e indicadores de la investigación

**Variable Dependiente:** Continuidad de los atractores globales.

**Variable Independiente:** Ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

### 3.2.1. Definición conceptual

**Variable Independiente:** Ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.

Estas ecuaciones hacen referencia a las ecuaciones de onda donde el dominio espacial es una variedad Riemanniana con borde 3-dimensional bien comportada  $(M, g)$ .

La particularidad de este sistema se da en los siguientes puntos:

- Al ser un dominio Riemanniano, el operador proveniente de las deformaciones

en el cuerpo está dado por el operador de Laplace-Beltrami el cual es:

$$\Delta_g = \operatorname{div}(\nabla_g \cdot)$$

donde  $\nabla_g$  representa la conexión de Levi-Civita asociada a la variedad.

- El término de amortiguamiento localizado óptimo en medida está relacionado a un conjunto abierto “ $\omega$ ” con borde en  $(M, g)$ , el cual satisface la propiedad  $\varepsilon$ -controlable en medida, es decir, dado  $\varepsilon > 0$  se cumple que

$$\operatorname{med}_M(\omega) + \operatorname{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon$$

- El sistema está expuesto a fuerzas estructurales con crecimiento crítico de Sobolev.
- El sistema está expuesto a fuerzas externas independientes del tiempo asociadas a un parámetro  $\beta \in [0, 1]$ .

**Variable Dependiente.** A partir de una familia de semigrupos asociados a un parámetro  $\beta \in [0, 1]$  generando una perturbación sobre las fuerzas externas asociadas al modelo, existe una familia de atractores globales  $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  de tal manera que la continuidad estará definida por la convergencia de dicha familia cuando  $\beta \rightarrow 0$ .

### 3.2.2. Definición operacional

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	MÉTODO	TÉCNICA
INDEPENDIENTE	Ecuaciones de ondas Riemannianas	Operador de Laplace-Beltrami	Método de Escritorio o de Biblioteca	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión bibliográfica</li> <li>• Trabajo en equipos de investigación</li> </ul>
	Amortiguamiento localizado óptimo en medida	Conjuntos $\varepsilon$ -controlables en medida		
	Tensiones superficiales	Fuerzas estructurales y externas		
DEPENDIENTE	Existencia de atractores globales	Cuasiestabilidad	Método de escritorio o de biblioteca	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión bibliográfica</li> <li>• Trabajo en equipos de investigación</li> </ul>
	Semicontinuidad de atractores	Regularidad de los atractores		

### 3.2.3. Indicadores

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES
INDEPENDIENTE	Ecuaciones de ondas Riemannianas	Operador de Laplace-Beltrami
	Amortiguamiento localizado óptimo en medida	Conjuntos $\varepsilon$ -controlables en medida
	Tensiones superficiales	Fuerzas estructurales y externas
DEPENDIENTE	Existencia de atractores globales	Cuasiestabilidad
	Semicontinuidad de atractores	Regularidad de los atractores

### 3.3. Métodos de la investigación

El método que se usará en la presente investigación estará asociado con el contenido técnico necesario para lograr los objetivos. Por lo tanto discriminaremos los siguientes grupos teóricos necesarios:

- **Geometría Riemanniana:** Sobre esta teoría se estudiará todo lo relacionado a las variedades Riemannianas  $n$ -dimensionales con borde y sin borde; además de los Espacios de Sobolev con dominio dado por una variedad.
- **Ecuaciones de ondas con amortiguamiento localizado óptimo en medida:** Con respecto a estas ecuaciones, se estudiarán las definiciones y propiedades relacionadas a la localización del amortiguamiento. Además, con relación a la buena colocación, se estudiará la Teoría de Semigrupos y Problemas de Cauchy abstractos. Finalmente se rescatará la propiedad de la continuación única y la desigualdad de observabilidad, teniendo en cuenta el tipo de localización.
- **Teoría de atractores globales:** Con respecto a los atractores globales, se estudiarán los sistemas dinámicos, gradientes, disipativos y asintóticamente estables. En particular se estudiará la teoría de los sistemas cuasi-estables.
- **Teoría de Continuidad de atractores:** Con respecto a la continuidad de los atractores, se estudiará la teoría relacionada a la semicontinuidad superior e inferior de conjuntos, junto con las propiedades topológicas de los conjuntos residuales.

### **3.4. Diseño o esquema de la investigación**

Según el nivel de investigación que se expone en el presente proyecto, se puede decir que es del tipo explicativo, pues, como bien comentan Hernández-Sampieri et al. (2014), este tipo de investigación busca explicar el por qué del fenómeno y en qué condiciones se puede manifestar.

Según el diseño se puede decir que el proyecto es del tipo documental, pues, como bien mencionan Martins y Palella (2012), la revisión bibliográfica además de ser obligatoria sobre cualquier investigación, se basa en la búsqueda y análisis de fuentes documentales.

Finalmente, según el propósito, el proyecto es una investigación básica, pues, como menciona Arias (2012), la investigación básica tiene como objetivo producir e incrementar nuevos conocimientos, principalmente teóricos. Esto se puede observar fácilmente al contrastar el objetivo principal propuesto con lo descrito en la literatura.

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

### **3.5. Población y muestra**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

### **3.6. Actividades del proceso investigativo**

Las actividades se iniciaron con la recopilación y análisis de la información obtenida en artículos de revistas especializadas y libro. Para alcanzar el objetivo de la investigación fueron aplicadas las técnicas del Análisis Funcional y de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

### **3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación**

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.

### **3.8. Procedimiento para la recolección de datos**

Dado el tipo de investigación, no se hizo recolección de datos del tipo estadístico ni observaciones experimentales.

### **3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no fueron necesarios procedimientos de recolección de datos más que una extensa revisión de bibliografía (libros, páginas web, artículos, etc.).

## IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Resultados

En esta sección nos enfocamos en demostrar que los atractores encontrados por Cavalcanti et al. (2021) para  $(P_\beta)$  son de tipo exponencial. Este resultado se aborda de manera análoga en el artículo Mendoza et al. (2023), el cual constituye uno de los principales aportes derivados de este trabajo de investigación.

#### 4.1.1. Existencia de un atractor exponencial

Esta sección está dedicada a demostrar la existencia de un atractor exponencial generalizado para el problema  $(P_\beta)$ .

**Nota 1.** Note que si  $(h, 0) \in \mathcal{N}$  es un punto estacionario del sistema entonces  $\|(u, 0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{f,h}$  donde  $C_{f,h} > 0$  es una constante dependiendo de  $f$  y  $h$  uniforme de  $\beta \in [0, 1]$ .

##### 4.1.1.1. Atractor exponencial

Recordemos que un atractor exponencial para un sistema  $(\mathcal{H}, S(t))$  es un conjunto compacto  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  que es positivamente invariante, tiene dimensión fractal finita, y exponencialmente atrae conjuntos acotados de  $\mathcal{H}$ . La atracción exponencial significa que para cualquier conjunto acotado  $D$ , existe una constante  $\gamma_D > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\gamma_D t} \text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)S, \mathcal{M}) = 0,$$

donde  $\text{dist}_{\mathcal{H}}$  representa la semi-distancia de Hausdorff en  $\mathcal{H}$ . En general, establecer la existencia de atractores exponenciales para ecuaciones de onda no lineales es una tarea difícil. De hecho, muchos de los resultados están relacionados con las ecuaciones de tipo parabólica. Sin embargo, probaremos la existencia de los llamados atractores globales generalizados (véase Chueshov y Lasiecka Chueshov y Lasiecka (2010)). Esto difiere de lo anterior al requerir que el atractor tenga dimensión fractal finita en un posiblemente gran espacio  $\tilde{\mathcal{H}}$  conteniendo a  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 29.** *Bajo las suposiciones hechas en el Teorema 25, el sistema dinámico  $(\mathcal{H}, S(t))$  asociado al problema (2.25) posee un atractor exponencial generalizado.*

La prueba del Teorema 29 será completada al final de esta sección. Para esto, se necesita el siguiente resultado abstracto.

**Teorema 30. ((Chueshov y Lasiecka, 2010, Teorema 7.4.2))** *Sea  $M$  un conjunto cerrado acotado de un espacio de Hilbert  $H$  separable y suponga que  $V : M \rightarrow M$*



es una función lipschitziana. Adicionalmente, suponga que existen las seminormas  $n_1$  y  $n_2$  definidas en  $H$  tales que

$$\|Vv_1 - Vv_2\|_H \leq \eta \|v_1 - v_2\|_H + K(n_1(v_1 - v_2)) + n_2(Vv_1 - Vv_2),$$

para cualquiera elementos  $v_1, v_2 \in M$ , donde  $0 < \eta < 1$  y  $K > 0$  son constantes. Entonces, para cualquier  $\theta \in (\eta, 1)$  existe un conjunto compacto positivamente invariante  $A_\theta \subset M$ , de dimensión fractal finita, satisfaciendo

$$\text{dist}_M(V^k M, A_\theta) \leq r\theta^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

para algún  $r > 0$ .

**Observación 13.** En lo que sigue de la sección usaremos las notaciones del Teorema 28, es decir, dado dos datos iniciales  $z_0^1$  y  $z_0^2$  en un conjunto acotado  $B \subset \mathcal{H}$ , usaremos la notación

$$(u^1(t), \partial_t u^1(t)) = S(t)z_0^1 \text{ y } (u^2(t), \partial_t u^2(t)) = S(t)z_0^2.$$

Haciendo  $w = u^1 - u^2$  escribimos

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(w(t), \partial_t w(t))\|_{\mathcal{H}}^2.$$

La proposición 16 dada en Chueshov y Lasiecka (2010) nos permite probar la siguiente estimación clave:

**Lema 3.** Sea  $B$  un conjunto absorbente, acotado, cerrado y positivamente invariante del sistema  $(\mathcal{H}, S(t))$ . Entonces, existen constantes positivas  $C_{BT}$  y  $\sigma \in (0, 1)$  tales que

$$E(s + T) \leq \sigma E(s) + C_{BT} \sup_{\tau \in [0, T]} \|w(s + \tau)\|_{L^3(M)}^2, \quad s \geq 0. \quad (4.1)$$

**Prueba.** En vista del Teorema 28, tomando  $\zeta > 0$  lo suficientemente grande, la estimativa (2.45) quedará dada por

$$E(T) \leq \sigma^* E(0) + C_{BT} \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{L^3(M)}^2,$$

con  $\sigma^* \in (0, 1)$  y alguna constante  $C_{BT} > 0$ , dependiendo de  $B$  y  $T > 0$ . Desde que  $B$  es cerrado y positivamente invariante, obtenemos para cualquier  $s \geq 0$  que

$$E(s + T) \leq \sigma^* E(s) + C_{BT} \sup_{t \in [0, T]} \|w(s + t)\|_{L^3(M)}^2,$$

lo que muestra (4.1). ■

Ahora, estamos en posición de considerar el Teorema 30 en nuestro contexto. Dado  $T > 0$ , suficientemente grande, definimos

$$\mathcal{V} = \mathcal{H} \times W(0, T), \quad (4.2)$$

donde

$$W(0, T) = \left\{ w \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \mid \|w\|_W = \|(w, \partial_t w)\|_{L^2(0, T; \mathcal{H})} < \infty \right\}.$$

Es claro que

$$\|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{V}}^2 = \|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \|(w(t), \partial_t w(t))\|_{\mathcal{H}}^2 dt. \quad (4.3)$$

Adicionalmente definimos

$$\mathcal{B}_T = \{(z_0, S(t)z_0) \mid z_0 \in B, t \in [0, T]\} \subset \mathcal{V},$$

donde  $B$  es un conjunto absorbente, acotado, cerrado e invariante como en el Lema 3, y se define  $V : \mathcal{B}_T \rightarrow \mathcal{V}$  dado por

$$V(z_0, S(t)z_0) = (S(T)z_0, S(T+t)z_0).$$

**Lema 4.** *Bajo las definiciones anteriores tenemos:*

1. *Para cualquier subconjunto acotado  $B_T$  de  $\mathcal{B}_T$ , podemos encontrar una constante  $C_{BT} > 0$  tal que*

$$\|VU_1 - VU_2\|_{\mathcal{V}} \leq C_{BT} \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{V}}, \quad (4.4)$$

*para cualquier  $U_1, U_2 \in B_T$ .*

2. *Existen constantes  $K_T > 0$  y  $\sigma \in (0, 1)$  tal que, para cualquier*

$$Z_1 = (u(0), \partial_t u(0), u(t)) \text{ y } Z_2 = (v(0), \partial_t v(0), v(t)) \text{ en } \mathcal{B}_T,$$

$$\|VZ_1 - VZ_2\|_{\mathcal{V}} \leq \sigma \|Z_1 - Z_2\|_{\mathcal{V}} \quad (4.5)$$

$$+ K_T \left( \sup_{s \in [0, T]} \|w(s)\|_{L^3(M)} + \sup_{s \in [0, T]} \|w(T+s)\|_{L^3(M)} \right), \quad (4.6)$$

3. *La función  $V$  posee un conjunto compacto positivamente invariante  $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{B}_T$ , de dimensión fractal finita, y*

$$\text{dist}_{\mathcal{V}}(V^k \mathcal{B}_T, \mathcal{A}_T) \leq r q^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

*para algún  $r > 0$  y  $q \in (0, 1)$ .*

**Prueba.** La condición de Lipschitz (4.4) se sigue de

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_{\mathcal{H}} \leq C_{BT} \|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.8)$$

y de (4.2). Para probar (4.5), necesitamos integrar (4.1) sobre  $s \in [0, T]$  y sumarlo a (4.1), obteniendo

$$E(T) + \int_T^{2T} E(T) \leq \sigma \left( E(0) + \int_0^T E(s) ds \right) + 2TC_{BT} \sup_{\tau \in [0, 2T]} \|w(\tau)\|_{L^3(M)}^2.$$

De la definición de la norma (4.3) y de la inmersión de  $L^3(M)$  en  $L^2(M)$  se obtiene (4.5).

Para probar la última afirmación aplicamos el Teorema 30 con  $M = \mathcal{B}_T$ ,  $H = \mathcal{V}$ . De hecho, notamos que  $\sup_{s \in [0, T]} \|\cdot\|_{L^3(M)}$  define una seminorma compacta en  $\mathcal{V}$ . En adición, desde que  $\mathcal{B}$  es un cerrado positivamente invariante, tenemos que  $V\mathcal{B}_T \subseteq \mathcal{B}_T$ . Entonces el Teorema 30 permite (4.7). ■

El siguiente lema define un espacio de fase ultra-débil

$$\mathcal{H}_{-1} = L^2(M) \times H^{-1}(M).$$

**Lema 5.** *Sea  $\mathcal{B}$  un conjunto absorbente, cerrado y positivamente invariante. Entonces existe una constante  $C_{\mathcal{B}T} > 0$  tal que*

$$\|S(t_1)z - S(t_2)z\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leq C_{\mathcal{B}T} |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad z \in \mathcal{B}. \quad (4.9)$$

**Prueba.** El problema (2.28) se puede escribir como el problema de Cauchy siguiente (véase sección 3.2)

$$\partial_t U + \mathbb{A}U + \mathbb{F}U = 0, \quad U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

definido en  $\mathcal{H}$ , donde

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \partial_t u \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x)g(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta h(x) \end{bmatrix},$$

y  $D(\mathbb{A}) = (H^2(M) \cap H_0^1(M)) \times H_0^1(M)$ . El problema (4.10) implica que

$$\begin{aligned} \|\partial_t U(t)\|_{\mathcal{H}_{-1}} &\leq \|\mathbb{A}U(t)\|_{\mathcal{H}_{-1}} + \|\mathbb{F}U(t)\|_{\mathcal{H}_{-1}} + \|\mathbb{H}\|_{\mathcal{H}_{-1}} \\ &\leq C(\|\mathbb{A}U(T)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbb{F}U(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbb{H}\|_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Ahora, desde que  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{H}$  son localmente lipschitzianas y  $\mathcal{B}$  es acotado, la estimativa (4.8) implica que

$$\|\mathbb{A}U(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbb{F}U(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbb{H}\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\mathcal{B}T},$$

para alguna constante  $C_{\mathcal{B}T} > 0$ . Como  $U(t) = S(t)z$ , para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ , se tiene que

$$\|S(t_2)z - S(t_1)z\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t U(s)\|_{\mathcal{H}_{-1}} ds \leq C_{\mathcal{B}T} |t_2 - t_1|,$$

lo que implica (4.9). ■

**Prueba del Teorema 29.** Las ideas principales se remiten a Ma y Seminario-Huertas (2020). Para  $T > 0$  suficientemente grande, obtenemos de (4.7),

$$\text{dist}_{\mathcal{V}}(V^k \mathcal{B}_T, \mathcal{A}_T) \leq r q^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

para algún  $r > 0$  y  $q \in (0, 1)$ . En particular,

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(S(kT)\mathcal{B}, \mathbb{P}\mathcal{A}_T) \leq rq^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

donde  $\mathbb{P} = \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$  es la proyección de  $\mathcal{A}_T$  sobre la primera componente, esto es,

$$\mathbb{P}\mathcal{A}_T = \{z_0 \in \mathcal{B} \mid (z_0, S(t)z_0) \in \mathcal{A}_T, \quad t \in [0, T]\}.$$

Es claro que  $\mathbb{P}\mathcal{A}_T$  es un conjunto compacto en  $\mathcal{H}$  y  $S(t)\mathbb{P}\mathcal{A}_T \subseteq \mathbb{P}\mathcal{A}_T$ . Además,

$$\dim_f^{\mathcal{H}} \mathbb{P}\mathcal{A}_T \leq \dim_f^{\mathcal{V}} \mathcal{A}_T < \infty. \quad (4.12)$$

Definimos el conjunto compacto en  $\mathcal{H}$  (candidato a atractor exponencial)

$$\mathcal{A}^{\text{exp}} := \bigcup_{t \in [0, T]} S(t)\mathbb{P}\mathcal{A}_T.$$

Entonces, por construcción  $S(t)\mathcal{A}^{\text{exp}} \subseteq \mathcal{A}^{\text{exp}}$ . En adición, de (4.8) y (4.11) vemos que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}^{\text{exp}}) \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

para algunos  $C, \gamma > 0$ . Queda por mostrar que  $\mathcal{A}^{\text{exp}}$  tiene dimensión fractal finita en algún espacio conteniendo a  $\mathcal{H}$ . Usaremos el Lema 5.

Definamos la función

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{-1} \text{ tal que } \mathcal{F}(t, z) = S(t)z, \quad t \geq 0.$$

Entonces tenemos

$$\mathcal{A}^{\text{exp}} = \mathcal{F}([0, T] \times \mathbb{P}\mathcal{A}_T).$$

Afirmamos que  $\mathcal{F}$  es de Lipschitz restringido en  $[0, T] \times \mathbb{P}\mathcal{A}_T$ . Pues teniendo en cuenta que  $\mathbb{P}\mathcal{A}_T \subset \mathcal{B}$ , las estimativas (4.8) y (4.9) implican que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t_1, z_1) - \mathcal{F}(t_2, z_2)\|_{\mathcal{H}_{-1}} &\leq \|S(t_1)z_1 - S(t_1)z_2\|_{\mathcal{H}_{-1}} + \|S(t_1)z_2 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{H}_{-1}} \\ &\leq C_{BT} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}} + C_{BT} |t_1 - t_2| \\ &\leq L \|(t_1, z_1) - (t_2, z_2)\|_{\mathbb{R} \times \mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para algún  $L > 0$ . Esto prueba la afirmación. Ahora, desde que la función de Lipschitz no incrementa la dimensión fractal, concluimos que

$$\begin{aligned} \dim_f^{\mathcal{H}_{-1}} \mathcal{A}^{\text{exp}} &\leq \dim_f^{\mathbb{R} \times \mathcal{H}}([0, T] \times \mathbb{P}\mathcal{A}_T) \\ &\leq 1 + \dim_f^{\mathcal{H}} \mathbb{P}\mathcal{A}_T. \end{aligned}$$

Entonces de (4.12) se sigue que  $\dim_f^{\mathcal{H}_{-1}} \mathcal{A}^{\text{exp}} < \infty$ . Así  $\mathcal{A}^{\text{exp}}$  es un atractor exponencial generalizado para  $(\mathcal{H}, S(t))$  con dimensión fractal finita en  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{-1}$ . Esto completa la prueba del Teorema 29. ■

## 4.1.2. Análisis de la continuidad

En esta sección se mostrará el resultado principal de este trabajo, el cual estará dividido en los siguientes Teoremas siguiendo lo mostrado en la sección anterior y Ma y Seminario-Huertas (2020).

**Teorema 31 (*Semicontinuidad superior*).** *En el contexto del Teorema 29, la familia de atractores globales  $\mathcal{A}_\beta$  es semicontinua superiormente con respecto al parámetro  $\beta$  en  $[0; 1]$ , es decir:*

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_{\beta_0}) = 0, \quad (4.13)$$

Para todo  $\beta_0 \in [0; 1]$ , siendo  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\cdot, \cdot)$  la semidistancia de Hausdorff.

**Teorema 32 (*Continuidad sobre un conjunto denso residual*).** *En el contexto del Teorema 29, existe un conjunto  $\Lambda$  denso en  $[0, 1]$  tal que la familia de atractores  $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  es continua con respecto a cualquier parámetro  $\beta_0 \in \Lambda$ , es decir:*

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} d_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_{\beta_0}) = 0,$$

para todo  $\beta_0 \in \Lambda$ , siendo  $d_{\mathcal{H}}(\cdot, \cdot)$  la distancia de Hausdorff, esto es:

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B), \text{dist}_{\mathcal{H}}(B, A)\}$$

Para esto se seguirá la misma estrategia mostrada en Ma y Seminario-Huertas (2020). Antes de proceder con la demostraciones de estos teoremas, procederemos a demostrar un lema y posteriormente resultado de suma importancia que permite generar un absorbente independiente del índice  $\beta$ , para la familia de semigrupos  $S_\beta(t)$ .

**Lema 6.** *El conjunto de todos los puntos estacionarios  $\mathcal{N}_\beta$  es uniformemente acotado con relación al parámetro  $\beta \in [0, 1]$ .*

**Prueba.** Sea  $z \in \mathcal{N}_\beta$  entonces  $z = (u, 0)$  donde  $u$  es solución débil del problema estacionario

$$-\Delta_g u + f(u) = \beta h(x) \text{ en } H'_0(M).$$

Bajo las hipótesis de  $f$  y por la desigualdad de Poincaré, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &= \int_M (\beta h - f(u)) u dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + C(1 + \|h\|_2^2) \end{aligned}$$

Es decir,  $\|\nabla u\|_2^2 \leq C_{fh}$ , para alguna constante  $C_{fh} > 0$  que depende únicamente de  $f$ ,  $h$  y  $(M, g)$ , lo que muestra el lema. ■

**Teorema 33.** En el contexto del Teorema 29, existe una constante  $R > 0$  tal que

$$\mathcal{A}_\beta \subset B(0, R), \quad \forall \beta \in [0, 1].$$

Adicionalmente, existe una constante  $C_R > 0$  tal que

$$\|(u_t(t), \partial_t^2 u(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C_R, \quad \forall \beta \in [0, 1], \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

para toda trayectoria  $\{(u(t), \partial_t u(t)) | t \in \mathbb{R}\}$  en  $\mathcal{A}_\beta$ .

**Prueba.** Como se vio en el Teorema 29 el semigrupo  $(\mathcal{H}, S_\beta(t))$  es gradiente, es decir, existe un funcional de Lyapunov estricto  $\Psi_\beta$  dado en (2.37) el cual es

$$\Psi_\beta(z) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_M F(u(t)) dx + \beta \int_M h v dx,$$

donde  $z = (u, v)$ .

Ahora, por la nota 1 de los preliminares y el Lema 2, como el conjunto de puntos estacionarios  $\mathcal{N}_\beta \subset \mathcal{H}$  es acotado uniforme de  $\beta$ , entonces:

$$\sup\{\Psi_\beta(z) | z \in \mathcal{A}_\beta\} \leq \sup\{\Psi_\beta(z) | z \in \mathcal{N}_\beta\} \quad (4.15)$$

Así, a partir del Lema 6, de la definición de  $\Psi_\beta$  y de la desigualdad de la energía, se tiene que

$$\Psi_\beta(z) \leq C_2(1 + C_{fh}^4), \quad \forall z \in \mathcal{N}_\beta, \quad \forall \beta \in [0, 1],$$

donde  $C_2 > 0$  es una constante proveniente de la desigualdad de la energía independiente a  $\beta$ .

Análogamente, también se tiene que:

$$\mathcal{Y} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1 \leq \Psi_\beta(z), \quad \forall z \in \mathcal{A}_\beta, \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

luego, usando (4.15), y de la uniformidad en la acotación de  $\mathcal{N}_\beta$ , se tiene que existe  $R > 0$  tal que

$$R^2 = \mathcal{Y}^{-1}(1 + C_1 + C_2 + C_2 C_{fh}^4)$$

tal que

$$\mathcal{A}_\beta \subset B(0, R).$$

Además, como los atractores  $\mathcal{A}_\beta$  poseen regularidad óptima, entonces existe  $C_R > 0$  tal que:

$$\|(\partial_t u(t), \partial_t^2 u(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C_R,$$

siendo  $C_R$  independiente de  $\beta \in [0, 1]$ , lo termina de demostrar el Teorema. ■

**Observación 14.** Note que a partir de este teorema, para cada  $R_0 > R$ , se tiene que la bola  $B(0; R_0) := \mathcal{B}$  es un conjunto absorbente acotado de  $(\mathcal{H}, S_\beta(t))$ , uniforme con respecto a  $\beta \in [0; 1]$ . Adicionalmente a la existencia de un absorbente uniforme con respecto de  $\beta \in [0; 1]$ , se necesitará demostrar que la siguiente condición es válida: Para  $t > 0$ ,  $S_\beta(t)$  es continuo en  $\beta$ , uniformemente para  $z$  en algún subconjunto acotado de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 34.** Dado  $B \subset \mathcal{H}$  un acotado y  $z \in B$ , entonces para  $t > 0$ ,  $S_\beta(t)z$  satisface la condición L1, para  $\beta \in [0; 1]$ .

**Prueba.** Sea  $\beta_1, \beta_2 \in [0; 1]$ . Entonces denotamos por

$$S_{\beta_1}(t)z = (u(t), \partial_t u(t)) \text{ y } S_{\beta_2}(t)z = (v(t), \partial_t v(t)).$$

Entonces  $w = u - v$  es solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta_g w + a(x) \partial_t w_t + f(u) - f(v) = (\beta_1 - \beta_2)h & \text{en } M \times (0, \infty) \\ w = 0 & \text{en } \partial M \times (0, \infty) \\ w(0) = \partial_t w(0) = 0 & \text{en } M, \end{cases}$$

por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(w, \partial_t w)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_M (f(v) - f(u)) \partial_t w dx - \int_M a(x) |\partial_t w|^2 dx \\ &\quad + (\beta_1 - \beta_2) \int_M h \partial_t w dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Además de las hipótesis sobre  $a \in L^\infty(M)$ , se tiene que:

$$- \int_M a(x) |\partial_t w|^2 dx \leq 0$$

Finalmente, como

$$(\beta_1 - \beta_2) \int_M h \partial_t w dx \leq |\beta_1 - \beta_2|^2 \|h\|_2^2 + 4 \|(w, \partial_t w)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

Se tiene por (4.16) que:

$$\frac{d}{dt} \|(w, \partial_t w)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_0 \|(w, \partial_t w)\|_{\mathcal{H}}^2 + |\beta_1 - \beta_2|^2 \|h\|_2^2,$$

para alguna constante  $C_0 = C_0(B, f, h) > 0$ , independiente de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

Luego, por Gronwall se tiene que:

$$\|(w, \partial_t w)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{C_0 t} \|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}}^2 + C_0 (e^t - 1) |\beta_1 - \beta_2|^2 \|h\|_2^2$$

Finalmente, como  $\|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}} = 0$ , se tiene

$$\|S_{\beta_1}(t)z - S_{\beta_2}(t)z\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{C_0(e^t - 1)} \|h\|_2 |\beta_1 - \beta_2|, \quad t > 0$$

lo que muestra el resultado. ■

Antes de probar el Teorema 31, veamos el siguiente Lema.

**Lema 7.**  $z = (u, \partial_t u)$  es una trayectoria completa acotada para  $S_{\beta_0}(t)$ .

**Prueba.** Note que es suficiente mostrar que  $z$  es una trayectoria completa para el sistema  $(P_{\beta_0})$ , es decir

$$\partial_t^2 u - \Delta_g u + a(x)\partial_t u + f(u) = \beta_0 h(x), \quad (4.17)$$

c.s.  $t \in \mathbb{R}$ .

Como  $(u_k, \partial_t u_k)$  satisface la ecuación

$$\partial_t^2 u_k - \Delta_g u_k + a(x)\partial_t u_k + f(u_k) = \beta_k h(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Se puede proceder análogamente que la prueba del Teorema 34. concluyendo que (4.17) es límite de (4.18), cuando  $k \rightarrow +\infty$  lo que muestra el lema. ■

### **Prueba del Teorema 31.**

El argumento que se usará para demostrar la continuidad superior de la familia  $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  cuando  $\beta \rightarrow \beta_0$  será por contradicción, procediendo de manera análoga a lo mostrado en Ma y Seminario-Huertas (2020). Supongamos que  $\mathcal{A}_\beta$  no es semicontinua superiormente sobre  $\beta_0 \in [0, 1]$ . Entonces de (4.13), existe  $\delta > 0$  y una secuencia  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ , con  $\beta_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \beta_0$  tal que existe un punto en  $(z_0^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\beta_k}$  satisfaciendo que

$$\inf_{y \in \mathcal{A}_{\beta_0}} \|z_0^k - y\|_{\mathcal{H}} \geq \delta, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.19)$$

Como  $\mathcal{A}_\beta$  es un atractor global, se tiene que:

$$\mathcal{A}_\beta = \{z(0) | z \text{ es una trayectoria global completa de } S_\beta(t)\}$$

Así, consideramos

$$z^k = (u_k, \partial_t u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

trayectoria globales completas tal que:

$$z^k \in \mathcal{A}_{\beta_k}, \quad z^k(0) = z_0^k.$$

Entonces, por (4.14), se tiene que

$$(u_k, \partial_t u_k) \text{ es acotado en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{H}_1). \quad (4.20)$$



Debido a la inmersión compacta en los espacios, se deduce que existe  $(u, \partial_t u) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_1)$  tal que, pasando a una subsecuencia,

$$(u_k, \partial_t u_k) \rightarrow (u, \partial_t u) \text{ en } C([-T, T]; \mathcal{H}), \forall t > 0$$

Además, por (4.20), se tiene que:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}} < \infty$$

Finalmente, a partir del Lema 7, se concluye que

$$z(0) \in \mathcal{A}_{\beta_0} \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_0^k - Z(0)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

lo que contradice (4.19), probando el Teorema. ■

### **Prueba del Teorema 32.**

La estrategia a usarse para demostrar este Teorema es hacer uso de la Proposición 5. Para esto es necesario mostrar 3 condiciones sobre el semigrupo  $(\mathcal{H}, S_\beta(t))$ , con  $\beta \in [0, 1]$ :

**Condición L1:**  $S_\lambda(\cdot)$  tiene un atractor global  $\mathcal{A}_\lambda$  para cada elección de  $\lambda \in \Lambda$ ;

**Condición L2:** Existe un subconjunto acotado  $D$  de  $X$  tal que  $\mathcal{A} \subset D$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ ; y

**Condición L3:** Para  $t > 0$ ,  $S_\lambda(t)x$  es continua en  $\lambda$ , continua uniformemente en la variable  $x$  en subconjuntos acotados de  $X$ .

Ahora, por el Teorema 34, ya se mostró que  $(\mathcal{H}, S_\beta(t))$  satisface la condición L1, además la condición L2 ya se tiene por los resultados mostrados en el capítulo anterior. Finalmente, la condición L3, ya fue mostrada en el Teorema 33. Así, el Teorema 32 queda demostrado. ■

## **4.2. Discusión**

### **1. Existencia de Atractores Exponenciales**

Como se detalló en el Teorema 29, el sistema dinámico  $(H, S(t))$  asociado al problema  $(P_\beta)$  tiene un atractor exponencial generalizado, con dimensión fractal finita y capacidad de atracción exponencial sobre conjuntos acotados en  $H$ . Esto se demostró utilizando el marco teórico desarrollado por Chueshov y Lasiecka (2010) y técnicas clave como el uso de conjuntos absorbentes cerrados y estimaciones de energía para trayectorias diferenciales. La prueba también hace un uso extensivo de propiedades de invariancia positiva y compactación en espacios funcionales extendidos.

## 2. Semicontinuidad Superior de los Atractores

El teorema 31 establece que la familia de atractores globales  $\{A_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  es semicontinua superiormente con respecto al parámetro  $\beta$ . Esto implica que, para cualquier  $\beta_0 \in [0, 1]$ , la distancia de Hausdorff entre  $A_\beta$  y  $A_{\beta_0}$  tiende a cero cuando  $\beta \rightarrow \beta_0$ . Este resultado garantiza estabilidad en la dinámica global frente a perturbaciones pequeñas del parámetro, proporcionando un marco teórico sólido para la continuidad estructural del sistema.

## 3. Continuidad sobre un Conjunto Denso Residual

El teorema 32 amplía el análisis al demostrar que existe un conjunto denso  $\Lambda \subseteq [0, 1]$  tal que la familia de atractores  $\{A_\beta\}_{\beta \in [0,1]}$  es continua respecto a cualquier  $\beta_0 \in \Lambda$ . En este caso, la distancia de Hausdorff satisface:

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} d_H(A_\beta, A_{\beta_0}) = 0, \quad \forall \beta_0 \in \Lambda,$$

donde  $d_H$  es la distancia de Hausdorff bidireccional. La demostración del Teorema 32 sigue la proposición 5, que requiere verificar tres condiciones principales:

- Condición L1: Existencia de un atractor global  $A_\lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- Condición L2: Existencia de un subconjunto acotado  $D$  común tal que  $A_\lambda \subseteq D$
- Condición L3: Continuidad uniforme de  $S_\lambda(t)$  con respecto a  $\lambda$  en subconjuntos acotados de  $H$ .

En este contexto, las condiciones L1 y L2 se deducen de los resultados previos sobre la existencia de atractores y conjuntos absorbentes uniformes en  $\beta$ . La condición L3 se demostró específicamente en el Teorema 33, donde se estableció la continuidad uniforme en  $\beta$  del operador evolución  $S_\beta(t)$ . Este análisis asegura que la dinámica global del sistema no solo es robusta frente a perturbaciones pequeñas, sino que también es continua en parámetros densos, permitiendo una interpretación estable del comportamiento asintótico.

## 4. Implicaciones Matemáticas

Los resultados discutidos refuerzan la aplicabilidad de los métodos analíticos en problemas de dinámica a largo plazo para sistemas con parámetros dependientes. La existencia de atractores exponenciales y las propiedades de continuidad garantizan la previsibilidad y estabilidad de las soluciones en contextos físicos y matemáticos, incluyendo modelado de fenómenos no lineales y simulaciones numéricas.

La combinación de las propiedades de continuidad (Teoremas 31 y 32) con la existencia de atractores exponenciales (Teorema 29) otorga un marco sólido para el estudio de la dinámica de sistemas con parámetros dependientes. Este análisis abre nuevas oportunidades para futuras investigaciones en estabilidad estructural y control óptimo en ecuaciones no lineales.

# V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 5.1. Conclusiones

1. El problema  $(P_\beta)$  modela las vibraciones de onda localmente amortiguadas expuestas a fuerza estructurales críticas en el sentido de Sobolev sobre un dominio espacial Riemanniano. En este nuevo contexto, el control en medida de la localización espacial del amortiguador es óptimo en el sentido de los conjuntos  $\varepsilon$ -controlables en medida.
2. En este nuevo contexto se estudió las regiones compactas de estabilización generadas por las fuerzas no conservativas comprobando la existencia de un atractor global para el sistema  $(P_\beta)$ . Es importante destacar que este resultado es novedoso sobre este escenario, por lo que se estaría logrando el objetivo de demostrar que existen atractores globales y así verificamos la hipótesis específica 1.
3. Asociado al problema  $(P_\beta)$ , se prueba que  $\beta_0 \in \Lambda$ ,  $\mathcal{A}_\beta \rightarrow \mathcal{A}_{\beta_0}$  cuando  $\beta \rightarrow \beta_0$ . Esto es, la demostración de la semicontinuidad superior del atractor  $\mathcal{A}$  que verifica la hipótesis específica 2 de esta investigación. La prueba está dada en el Teorema 31.

También se logró demostrar la existencia de atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida asociadas a las fuerzas externas, que se realizó en la sección 4.1.1 de los Resultados. Finalmente se demostró la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida, vista en la Sección 4.1.2 de los Resultados, en la prueba del Teorema 4.1.6.

## 5.2. Recomendaciones

Se recomienda seguir con la línea de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, ya que el trabajo que se ha realizado en esta Tesis, no queda allí, sino que ésta investigación puede dar origen a otros trabajos interesantes sobre variedades Riemannianas. Es muy importante las aplicaciones de la Teoría de EDP, pues uno debe familiarizarse completamente con las ecuaciones de onda en contextos Riemannianos, lo cual implica entender cómo se definen las métricas Riemannianas y cómo afectan la propagación de ondas en estos espacios. Dado que es un área altamente técnica y específica, se considera la posibilidad de contactar a expertos en matemáticas aplicadas o física matemática que tengan experiencia en dinámica de sistemas con amortiguamiento localizado en medidas.

## VI. BIBLIOGRAFÍA

- Adams, R. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.
- Arias, F. (2012). *El proyecto de investigación: Introducción a la investigación científica (5ta ed.)*. Caracas, Venezuela: Editorial Episteme, C.A.
- Arrieta, J., Carvalho, A., and Hale, J. (1992). *A damped hyperbolic equation with critical exponent*, *Comm. Partial Differential Equations*. 17, 841-866.
- Babin, A. and Pilyguin, S. (1997). *Continuous dependence of attractors on the shape of domain*. *J. Math. Sci. (New York)* 87, 3304-3310.
- Babin, A. and Vishik, M. (1992). *Attractors of Evolution Equations, Studies in Mathematics and its Applications 25*. North-Holland, Amsterdam.
- Barbu, V. (1976). *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Noordhoff, Leiden.
- Bardos, C., Lebeau, G., and Rauch, J. (1992). *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*. *SIAM J. Control Optim.* 30, 1024-1065.
- Bensoussan, A., Pratto, G., Delfour, M., and Mitter, S. (1993). *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems. Vol. II. Systems & Control: Foundations & Applications*. Birkhäuser Boston, Boston.
- Brézis, H. (1984). *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S. S., Madrid.
- Carvalho, A., Langa, J., and Robinson, J. (2013). *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. Springer, New York.
- Cavalcanti, M., Cavalcanti, V., Fukuoka, R., and Soriano, J. (2009). *Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping - a sharp result*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361, 4561-4580.
- Cavalcanti, M., Cavalcanti, V., Fukuoka, R., and Soriano, J. (2010). *Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result*. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197, 925-964.
- Cavalcanti, M., Ma, T., Marín-Rubio, P., and Seminario-Huertas, P. (2021). *Dynamics of Riemann waves with sharp measure-controlled damping*. Aceptado para publicación, ArXiv: 1908.04814.
- Chavel, I. (2001). *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*. Cambridge University Press.
- Chepyshov, V. and Vishik, M. (2002). *Attractors for equations of mathematical physics*. American Mathematical Society, Providence, RI.

- Chueshov, I. (2015). *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*. Universitext, Springer, Cham.
- Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2008). *Long-Time Behavior of Second-Order Evolutions with Nonlinear Damping*. Memoires of AMS, vol. 195.
- Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2010). *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York.
- Chueshov, I., Lasiecka, I., and Toundykov, D. (2008). *Long-term dynamics of semilinear wave equation with nonlinear localized interior damping and a source term of critical exponent*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 20, 459-509.
- Do Carmo, M. (1992). *Riemannian Geometry, Mathematics: Theory & Applications*. Birkhäuser, Boston.
- Feireisl, E. and Zuazua, E. (1993). *Global attractors for semilinear wave equations with locally distributed nonlinear damping and critical exponent*. Comm. Partial Differential Equations 18, 1539-1555.
- Folland, G. (1984). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Hale, J. (1988). *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Mathematical Surveys and Monographs 25, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Hale, J. (1999). *E. Hebey, Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. Courant Lecture Notes in Mathematics 5, American Mathematical Society, Providence.
- Hale, J., Lin, X., and Raugel, G. (1988). *Upper semicontinuity of attractors for approximations of semigroups and partial differential equations*. Math. Comp. 50, 89-123.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., and Del P. Baptista-Lucio, M. (2014). *Metodología de la investigación (6ta ed.)*. México D.F.: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. DE C.V.
- Hoang, L., Olson, E., and Robinson, J. (2015). *On the continuity of global attractors*. Proc. Amer. Math. Soc., 143, 4389-4395.
- Joly, R. and Laurent, C. (2013). *Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control condition*. Analysis and PDE 6, 1089-1119.
- Kesavan, S. (1989). *Topics in Fundamental Analysis and Applications*. John Wiler & Sons, New York.
- Ladyzhenskaya, O. (1991). *Attractors for Semi-groups and Evolution Equations*. Cambridge University Press.

- Lasiecka, I. and Tataru, D. (1993). *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*. Differential Integral Equations 6, 507-533.
- Lasiecka, I., Triggiani, R., and Zhang, X. (2000). *Nonconservative wave equations with unobserved Neumann B.C.: global uniqueness and observability in one shot*. Differential geometric methods in the control of partial differential equations (Boulder, CO, 1999), 227-325, Contemp. Math., 268, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Lions, J. and Magenes, E. (1972). *Non-homogeneous Boundary Problems and Applications, Vol. 1*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Ma, T. and Seminario-Huertas, P. (2021). *Attractors for locally damped Bresse systems and a unique continuation property*. arXiv preprint arXiv:2102.12025.
- Ma, T. and Seminario-Huertas, P. (2020). *Attractors for semilinear wave equations with localized damping and external forces*. Communacations on Pure and Applied Analysis.
- Martins, F. and Palella, S. (2012). *Metodología de la Investigación Cuantitativa (3ra ed.)*. Caracas, Venezuela: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (FEDUPEL).
- Melrose, R. B. and Sjöstrand, J. (1978). *Singularities of boundary value problems. I*. Comm. Pure Appl. Math. 31, 593-617.
- Melrose, R. B. and Sjöstrand, J. (1982). *Singularities of boundary value problems. II*. Comm. Pure Appl. Math. 35, 129-168.
- Mendoza, R., Sotelo, A., Bocanegra, L., Cortez, H., Delgado, M., ruiz, I., and Durand, C. (2023). *Global Riemannian wave attractors and the optimal measure of localized damping*. Proceedings of the LACCEI international Multi-conference for Engineering, Education and Technology.
- Miller, L. (2003). *Escape function conditions for the observation, control, and stabilization of the wave equation*. SIAM J. Control Optim. 41, 1554-1566.
- Pazy, A. (1983). *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York.
- Ralston, J. V. (1969). *Solutions of the wave equation with localized energy*. Comm. Pure Appl. Math. 22, 807-823.
- Rauch, J. and Taylor, M. (1974). *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*. Indiana Univ. Math. J. 24, 79-86.
- Rauch, J. and Taylor, M. (1975). *Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds*. Comm. Pure Appl. Math. 28, 501-523.
- Robbiano, L. and Zuily, C. (1998). *Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients*. Invent. Math. 131, 493-539.

- Ruiz, A. (1992). *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential*. J. Math. Pures Appl., 71, 455-467.
- Runst, T. and Sieckel, J. (1996). *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gruyter, Berlin.
- Temam, R. (1988). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag, New York.
- Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Functional Spaces and Differential Operators*. North-Holland, Amsterdam.
- Triggiani, T. and Yao, P. F. (2002). *Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot*. Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions, Appl. Math. Optim. 46, 331-375.
- Yao, P. (2011). *Modeling and Control in Vibrational and Structural Dynamics. A Differential Geometric Approach*. Applied Mathematics and Nonlinear Science series, CRC press, Boca Raton.

## VII. ANEXOS

### 7.1. Matriz de Consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p><b>Problema general.</b></p> <p>¿Es posible demostrar la existencia y continuidad de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?</p>	<p><b>Objetivo general.</b></p> <p>Demostrar la existencia y continuidad de los atractores globales ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p>	<p><b>Hipótesis general.</b></p> <p>Es posible demostrar la existencia y continuidad de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p>	<p><b>Tipo.</b></p> <p>La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.</p>	<p>Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.</p>
<p><b>Problemas específicos.</b></p> <p>1. ¿Existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?</p> <p>2. ¿Es posible demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida?</p>	<p><b>Objetivos específicos.</b></p> <p>1. Demostrar que existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p> <p>2. Demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p>	<p><b>Hipótesis específicas.</b></p> <p>1. Existen atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p> <p>2. Es posible demostrar la semicontinuidad superior de los atractores globales para ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado óptimo en medida.</p>	<p><b>Método.</b></p> <p>Por la naturaleza de la investigación, al ser esta del tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.</p> <p><b>Diseño de la investigación.</b></p> <p>La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p>	