

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Un estudio de la función Zeta de Riemann Vía el
análisis de la distribución de la nube de ceros de
las sumas parciales**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática**

Autor:

Mg. Toribio Cangana, Manuel Teodosio
Código ORCID: 0000-0002-0199-4743

Asesor:

Dr. Velásquez Castañón, Oswaldo José
Código ORCID: 0000-0002-1147-9980
DNI N° 40694823

Línea de investigación
Metemática aplicada a las ciencias

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Oswaldo José Velásquez Castañón, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "UN ESTUDIO DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN VÍA EL ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA NUBE DE CEROS DE LAS SUMAS PARCIALES", por el magister Manuel Teodosio Toribio Cangana, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, enero del 2024.

.....
Dr. Oswaldo José Velásquez Castañón
ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0002-1147-9980
DNI N° 40694823



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

“Un Estudio de la Función Zeta de Riemann Vía el Análisis de la Distribución de la Nube de Ceros de las Sumas Parciales”.

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

.....
Dr. JULIO ANTONIO LECCA VERGARA
PRESIDENTE
CODIGO ORCID: 0000-0001-5402-8453
DNI N° 17845785

.....
Dr. PEDRO GUSTAVO REYES CARRERA
SECRETARIO
CODIGO ORCID: 0000-0003-4854-2952
DNI N° 32861402

.....
Dr. OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑÓN
VOCAL
CODIGO ORCID: 0000-0002-1147-9980
DNI N° 40694823



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los veintitrés días del mes de enero del año 2025, siendo las 11.00 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 615-2024-EPG-UNS de fecha 29.11.2024, conformado por los docentes: Dr. Julio Antonio Lecca Vergara (Presidente), Dr. Pedro Gustavo Reyes Carrera (Secretario) y Dr. Oswaldo José Velásquez Castañón (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada : **"UN ESTUDIO DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN VÍA EL ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA NUBE DE CEROS DE LAS SUMAS PARCIALES"**; presentado por el tesista **Manuel Teodosio Toribio Cangana**, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 043-2025-EPG-UNS de fecha 16 de enero de 2025.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de 19.

Siendo las 12n horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Julio Antonio Lecca Vergara
Presidente


Dr. Pedro Gustavo Reyes Carrera
Secretario


Dr. Oswaldo José Velásquez Castañón
Vocal/Asesor



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Heron Morales
Título del ejercicio: Doctorado_Manuel
Título de la entrega: Tesis
Nombre del archivo: TESIS_SUSTENTADO_EL_23_DE_ENERO_MANUEL_TORIBIO.pdf
Tamaño del archivo: 74.46M
Total páginas: 160
Total de palabras: 44,379
Total de caracteres: 186,640
Fecha de entrega: 01-feb.-2025 10:10p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega... 2577148649

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA



“UN ESTUDIO DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN VÍA EL
ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA NUBE DE CEROS
DE LAS SUMAS PARCIALES”

Tesis para optar el grado académico de
Doctor en Matemática

Autor:

Mg. MANUEL TEODOSIO TORIBIO CANGANA
Código ORCID: 0000 – 0002 – 0199 – 4743

Asesor:

Dr. OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑÓN
DNI N°: 40694823
Código ORCID: 0000 – 0002 – 1147 – 9980

Línea de Investigación
Matemática aplicada a las ciencias

NUEVO CHIMBOTE - PERÚ
2024

Tesis

INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

INDICE DE SIMILITUD

8%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

1%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	www.tdx.cat Fuente de Internet	2%
2	repositorio.uni.edu.pe Fuente de Internet	1%
3	www.uv.es Fuente de Internet	1%
4	imca.edu.pe Fuente de Internet	<1%
5	repositorio.unal.edu.co Fuente de Internet	<1%
6	Submitted to Universidad Nacional del Santa Trabajo del estudiante	<1%
7	hdl.handle.net Fuente de Internet	<1%
8	Submitted to Universidad Rey Juan Carlos Trabajo del estudiante	<1%
9	tesis.ipn.mx Fuente de Internet	<1%

DEDICATORIA

Con profundo sentimiento a mis hijos Gustavo Fabrizio y Carlos Andres, que el ángel de Ruth Medina Aparcana, vuestra madre, ilumine sus caminos en su formación profesional y en busca de la felicidad.

AGRADECIMIENTOS

- A la escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, por las excelentes condiciones brindadas durante el desarrollo del programa de Doctorado en Matemática.
- Al Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines IMCA, de la Universidad Nacional de Ingeniería, por darme las condiciones necesarias en la etapa final de este proyecto.
- A mi asesor, Dr. Oswaldo José Velásquez Castañón, por su dedicación, paciencia y todo el apoyo brindado para que esta tesis llegue al fin a la meta esperada.
- Agradecimiento especial a mis colegas: Jorge Sulca, Luis Felipe Villavicencio, Yarco Cerna Valdez, Yisela Sary Villanueva Prada, Yone Eldy Ramos Balcazar y José Polo Carquín, quienes siempre me apoyaron, para que esta tesis, hoy sea una realidad.

Índice general

Portada	I
Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Índice general	IV
Índice de cuadros	VII
Índice de figuras	VIII
RESUMEN	XI
ABSTRACT	XII
INTRODUCCIÓN	1
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
1.1. Planteamiento y fundamentación del problema	14
1.2. Formulación del problema de investigación	15
1.3. Delimitación del estudio	15
1.4. Justificación e importancia de la investigación	15
1.5. Objetivos de la investigación	16
1.5.1. Objetivo general	16
1.5.2. Objetivos específicos:	16
2. MARCO TEÓRICO	17
2.1. Fundamentos teóricos de la investigación	17
2.1.1. La función Gamma	17

2.1.2.	La función zeta de Riemann	19
2.1.3.	La función eta de Dirichlet	24
2.1.4.	Funciones casi periódicas	26
2.1.5.	Teorema de equivalencia de Bohr	36
2.1.6.	Turán, Montgomery, Roy y Vatwani	42
2.1.7.	Polinomios de Dirichlet	45
2.1.8.	Bases de Gröbner	52
2.1.9.	El algoritmo LLL	55
2.2.	Antecedentes de la investigación	58
2.3.	Marco conceptual	67
3.	MARCO METODOLÓGICO	69
3.1.	Hipótesis central de la investigación	69
3.2.	Variables e indicadores de la investigación	69
3.3.	Métodos de la investigación	71
3.4.	Diseño o esquema de la investigación	71
3.5.	Población y muestra	72
3.6.	Actividades del proceso investigativo	72
3.7.	Técnicas e instrumentos de la investigación	73
3.8.	Procedimiento para la recolección de datos	73
3.9.	Técnicas de procesamiento y análisis de los datos	73
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	74
4.1.	El método numérico	74
4.1.1.	Conteo de ceros por el principio del argumento	75
4.1.2.	Método de bisección bidimensional	82
4.1.3.	Refinando y acelerando el cálculo de los ceros	86
4.1.4.	La implementación	87
4.1.5.	Ejecutando y benchmarking	89
4.2.	Cálculo inicial de los ceros de $\zeta_n(s)$	90
4.3.	Límites de la banda de los ceros	99
4.4.	Irreducibilidad de los polinomios multivariados asociados	102
4.5.	Densidad sobre la recta de la parte real de los ceros	107
4.5.1.	Gráficos de distribución numérica de la densidad de las partes reales de los ceros	108

4.5.2. Análisis de la función de distribución acumulada asintótica	116
4.6. Simetrías y distribución de los ceros	124
4.7. Los ceros especiales	127
4.7.1. Cálculo de ceros especiales	127
4.7.2. Discusión de polinomios multivariables y el algoritmo de Trudgian . .	132
4.8. Nivel de aproximación de los ceros	133
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	136
5.1. Conclusiones	136
5.2. Recomendaciones	137
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	139
ANEXOS	144
A: Proyección sobre un convexo	145
B: Interpolación por Polinomiales	145
C: Lista de símbolos	148

Índice de cuadros

1.	Tiempos de ejecución calculando los ceros de la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann - Ubuntu Linux 18.04 de 64 bits, ejecutandose en una CPU Intel Core i7-8700T a 2.40 GHz x 12 con 8 GB de RAM	6
2.	Cálculo del ancho de cada rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ con extrema precisión	6
3.	Valores β_n y β_n^\pm para $3 \leq n \leq 7$	8
4.1.	Los parámetros a proporcionar en la implementación del algoritmo	88
4.2.	Funciones a proporcionar, para que el método funcione	89
4.3.	Tiempos de ejecución calculando los ceros de la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann	90
4.4.	Cálculo del ancho de cada rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ con extrema precisión	91
4.5.	Recopilación de los primeros datos procesados	99
4.6.	Valores β_n y β_n^\pm de la proposición 16, $2 \leq n \leq 25$	103
4.7.	Valores β_n y β_n^\pm de la proposición 16, $26 \leq n \leq 50$	104
4.8.	Recopilación de los T obtenidos para $\varepsilon = 10^{-7}$	129
4.9.	Recopilación de los ceros especiales iniciales s_0 y ceros $s_0^* = \sigma_0^* + i\tau_0^*$ cercano a $s_0 + iT$	130
5.1.	El proceso iterativo en la interpolación polinomial	147

Índice de figuras

1.	Nube de 30 970 ceros de $\zeta_7(s)$ en el rectángulo $\mathcal{R}_7(T)$ para $T = 100\,000$. . .	7
2.	Ceros de $\zeta_4(s)$	9
3.	Ceros de $\zeta_5(s)$	9
4.	Los ceros de $\zeta_3(s)$	10
5.	$\mu_3^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_3; \varphi_3]$	10
6.	Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{ \log(3^6/2^5) }$	11
7.	Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{ \log(3^7/2^4) }$	11
2.1.	La curva \mathcal{C}	20
2.2.	La curva \mathcal{C}_N	20
2.3.	La banda crítica	23
2.4.	Ceros de η en $\Re(s) = 1$	25
2.5.	El contorno de Hankel \mathcal{H}	45
2.6.	Nube de ceros de $\zeta_9(s)$	68
4.1.	Mínimo del segmento $[a, b]$ al cero	79
4.2.	Discretización de un segmento dado. A medida que nos acercamos a un grupo de ceros, el argumento varía más rápido y necesitamos más subdivisiones de segmentos.	80
4.3.	Bisección y estrategia de exclusión	84
4.4.	Pilas de exclusión mutua y procesamiento en paralelo	88
4.5.	Nube de ceros de $\zeta_3(s)$ para $T = 10^3$	92
4.6.	Nube de ceros de $\zeta_3(s)$ para $T = 10^6$	92
4.7.	Nube de ceros de $\zeta_4(s)$ para $T = 10^5$	93
4.8.	Nube de ceros de $\zeta_4(s)$ para $T = 10^6$	93
4.9.	Nube de ceros de $\zeta_5(s)$ para $T = 2 \times 10^5$	94
4.10.	Nube de ceros de $\zeta_5(s)$ para $T = 5 \times 10^5$	94

4.11. Nube de ceros de $\zeta_6(s)$ para $T = 2 \times 10^5$	95
4.12. Nube de ceros de $\zeta_6(s)$ para $T = 5 \times 10^5$	95
4.13. Nube de ceros de $\zeta_7(s)$ para $T = 10^4$	96
4.14. Nube de ceros de $\zeta_7(s)$ para $T = 10^5$	96
4.15. Nube de ceros de $\zeta_8(s)$ para $T = 10^4$	97
4.16. Nube de ceros de $\zeta_8(s)$ para $T = 10^5$	97
4.17. Nube de ceros de $\zeta_9(s)$ para $T = 10^4$	98
4.18. Nube de ceros de $\zeta_9(s)$ para $T = 10^5$	98
4.19. Ceros de $\zeta_4(s)$	107
4.20. Ceros de $\zeta_5(s)$	107
4.21. Los ceros de $\zeta_3(s)$	109
4.22. $\mu_3^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_3; \varphi_3]$	109
4.23. Los ceros de $\zeta_4(s)$	109
4.24. $\mu_4^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_4; \varphi_4]$	109
4.25. Los ceros de $\zeta_5(s)$	109
4.26. $\mu_5^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_5; \varphi_5]$	109
4.27. Los ceros de $\zeta_6(s)$	110
4.28. $\mu_6^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_6; \varphi_6]$	110
4.29. Los ceros de $\zeta_7(s)$	110
4.30. $\mu_7^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_7; \varphi_7]$	110
4.31. Los ceros de $\zeta_8(s)$	110
4.32. $\mu_8^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_8; \varphi_8]$	110
4.33. Los ceros de $\zeta_9(s)$	111
4.34. $\mu_9^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_9; \varphi_9]$	111
4.35. Los ceros de $\zeta_{10}(s)$	111
4.36. $\mu_{10}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{10}; \varphi_{10}]$	111
4.37. Los ceros de $\zeta_{11}(s)$	111
4.38. $\mu_{11}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{11}; \varphi_{11}]$	111
4.39. Los ceros de $\zeta_{12}(s)$	112
4.40. $\mu_{12}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{12}; \varphi_{12}]$	112
4.41. Los ceros de $\zeta_{13}(s)$	112
4.42. $\mu_{13}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{13}; \varphi_{13}]$	112
4.43. Los ceros de $\zeta_{14}(s)$	112
4.44. $\mu_{14}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{14}; \varphi_{14}]$	112

4.45. Los ceros de $\zeta_{15}(s)$	113
4.46. $\mu_{15}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{15}; \varphi_{15}]$	113
4.47. Los ceros de $\zeta_{16}(s)$	113
4.48. $\mu_{16}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{16}; \varphi_{16}]$	113
4.49. Los ceros de $\zeta_{17}(s)$	113
4.50. $\mu_{17}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{17}; \varphi_{17}]$	113
4.51. Los ceros de $\zeta_{18}(s)$	114
4.52. $\mu_{18}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{18}; \varphi_{18}]$	114
4.53. Los ceros de $\zeta_{19}(s)$	114
4.54. $\mu_{19}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{19}; \varphi_{19}]$	114
4.55. Los ceros de $\zeta_{20}(s)$	114
4.56. $\mu_{20}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{20}; \varphi_{20}]$	114
4.57. Los ceros de $\zeta_{21}(s)$	115
4.58. $\mu_{21}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{21}; \varphi_{21}]$	115
4.59. Los ceros de $\zeta_{22}(s)$	115
4.60. $\mu_{22}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{22}; \varphi_{22}]$	115
4.61. Origen de las variaciones izquierda y derecha del argumento de $f(s)$ a lo largo de $L : \Re(s) = \sigma$	120
4.62. Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{ \log(3^6/2^5) }$	125
4.63. Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{ \log(3^7/2^4) }$	125
4.64. Ceros de $\zeta_4(s)$ módulo $\frac{2\pi i}{\log(2)}$	126
4.65. Ceros de $\zeta_4(s)$ módulo $\frac{4\pi i}{\log(6)}$	126
4.66. Ceros de $\zeta_{508}(s)$, $-30 < \Re(s)$, $0 < \Im(s) < 3000$	134
4.67. Ceros de $\zeta_{508}(s)$, $-35 < \Re(s)$, $0 < \Im(s) < 5000$	134

RESUMEN

Las funciones $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s}$ con $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ y $a_k \in \mathbb{C}^*$, conocidas como *polinomios de Dirichlet*, aparecen de manera natural en el estudio de diversas funciones zeta asociadas a problemas en análisis y aritmética, teniendo diversas propiedades, como la distribución de sus ceros en bandas verticales, la casiperiodicidad y otras. En particular, este es el caso de las llamadas *sumas parciales de la función zeta de Riemann* $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$, $n \geq 2$, cuyos ceros se encuentran en bandas minimales de la forma $\psi_n \leq \Re(s) \leq \varphi_n$. Este trabajo aborda el estudio tanto del caso general de los polinomios de Dirichlet como de nuestro caso particular.

En el aspecto numérico, elaboramos un método para el cálculo sistemático de los ceros de polinomios de Dirichlet y funciones más generales, implementado en C++ con librerías de computación paralela y multiprecisión, mejorando resultados anteriores de Velásquez, e incluyendo elementos como un método de exclusión. Realizamos el cálculo intensivo de ceros de $\zeta_n(s)$ y elaboramos diversas estadísticas para la estimación de la banda que contiene las partes reales de los ceros $[\psi_n, \varphi_n]$, resaltando la definición de una función de distribución de los ceros de las partes reales y su interpretación. Estudiamos los extremos del intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, estudiando por un lado los ceros reales de funciones *torcidas* en línea con el trabajo de (Velasquez Castanon, 2008), y por otro lado los llamados *ceros especiales* de $\zeta_n(s)$, utilizando para esto el algoritmo LLL, evidenciando el vínculo con problemas diofánticos.

En el aspecto analítico, estudiamos la influencia de la casiperiodicidad de los polinomios de Dirichlet en sus ceros en el caso general, y el estudio de la *distribución acumulada asintótica de las partes reales de los ceros*, verificada como un límite convergente, así como la relación de la suma parcial $\zeta_n(s)$ con un polinomio multivariable $P_n(z_1, z_2, \dots, z_{\pi(n)})$ cuyos valores se relacionan, en línea con los trabajos de Montgomery y Bohr. En particular, demostramos la irreducibilidad de dicho polinomio asociado.

Palabras clave: Polinomios de Dirichlet, cálculo de ceros, sumas parciales de la función zeta, método de bisección bidimensional, ceros especiales.

ABSTRACT

The functions $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s}$ with $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ and $a_k \in \mathbb{C}^*$, known as *Dirichlet polynomials*, appear naturally in the study of various zeta functions associated with problems in analysis and arithmetic, having various properties, such as the distribution of their zeros in vertical bands, quasi-periodicity and others. In particular, this is the case of the so-called *partial sums of the Riemann zeta function* $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$, $n \geq 2$, whose zeros are located in minimal bands of the form $\psi_n \leq \Re(s) \leq \varphi_n$. This work addresses the study of both the general case of Dirichlet polynomials and our particular case.

On the numerical side, we develop a method for the systematic computation of the zeros of Dirichlet polynomials and more general functions, implemented in C++ with parallel and multiprecision computing libraries, improving previous results of Velásquez, and including elements such as an exclusion method. We perform the intensive computation of zeros of $\zeta_n(s)$ and develop various statistics for the estimation of the band containing the real parts of the zeros $[\psi_n, \varphi_n]$, highlighting the definition of a distribution function of the zeros of the real parts and its interpretation. We study the extremes of the interval $[\psi_n, \varphi_n]$, studying on one hand the real zeros of *twisted* functions in line with the work of (Velasquez Castanon, 2008), and on the other hand the so-called *special zeros* of $\zeta_n(s)$, using for this the LLL algorithm, evidencing the link with Diophantine problems.

In the analytical aspect, we study the influence of the quasi-periodicity of Dirichlet polynomials on their zeros in the general case, and the study of the *asymptotic cumulative distribution of the real parts of the zeros*, verified as a convergent limit, as well as the relation of the partial sum $\zeta_n(s)$ with a multivariable polynomial $P_n(z_1, z_2, \dots, z_{\pi(n)})$ whose values are related, in line with the works of Montgomery and Bohr. In particular, we prove the irreducibility of such associated polynomial.

Keywords: Dirichlet polynomials, computation of zeros, partial sums of the zeta function, bidimensional bisection method, special zeros.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está inspirado en un problema que a la fecha se mantiene sin solución por más de 165 años, *la hipótesis de Riemann*. Notables matemáticos han intentado corroborar o refutar lo que Georg Friedrich Bernhard Riemann afirmó en 1859 sobre los ceros de una función que hoy lleva su nombre, *la función zeta de Riemann*.

El primero en darle relevancia a la función zeta $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ para s real fue L. Euler, al usarlo para demostrar que hay infinitos números primos. Posteriormente B. Riemann amplía su dominio a una variable compleja $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbb{R}$) con parte real mayor que uno, esto es,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$$

definida en el semiplano $\Re(s) > 1$ como una función analítica, y usando las herramientas del análisis complejo se logra extenderla analíticamente a todo el plano complejo salvo en el 1, que es un polo simple con residuo también uno. A partir de la expresión usada por Euler en su versión real

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

se deduce que nuestra función zeta no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$. Para descartar que no hay ceros en $\Re(s) < 1$, salvo los triviales, se necesita de la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

y por el teorema del número primo. También se descarta que haya ceros en las rectas verticales $\Re(s) = 0$ y $\Re(s) = 1$, de esta forma la única posibilidad de encontrar ceros no triviales de la función zeta es en la banda crítica $0 < \Re(s) < 1$. Precisamente, Riemann postuló que los ceros no triviales de esta función, todos tienen su parte real igual a $1/2$. El problema de corroborar o descartar la hipótesis de Riemann, fue propuesto formalmente por David Hilbert, en el congreso internacional de matemática el 8 de agosto de 1900, como el octavo problema de su lista de 23 problemas “abiertos”, hasta entonces, lo que revela la dificultad y trascendencia de resolver esta conjetura.

Una aproximación al estudio de la función zeta de Riemann es trabajar con la sucesión de funciones enteras $\zeta_n(s)$ obtenidas de las sumas parciales de la función zeta, es decir,

$$\zeta_n(s) = \sum_{k \leq n} k^{-s} \quad (1)$$

dado que $\zeta_n(s)$ converge en compactos K de $\Omega = \{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 1\}$, por el teorema de aproximación de Weierstrass $\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(s)$ es analítica en Ω .

Abordamos aquí el problema de analizar el comportamiento de los ceros de $\zeta_n(s)$. Por ejemplo, David J. Platt y Timothy S. Trudgian demuestran que para $1 \leq n \leq 18$; $n = 20, 21, 28$ no hay ceros de $\zeta_n(s)$ en la región $\Re(s) > 1$, mientras que para los demás enteros positivos n , si existen infinitos ceros (los ceros especiales) en esta región (Platt and Trudgian, 2016).

Sobre los polinomios de Dirichlet

Una función $f(s)$ de la forma $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s}$, donde $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ y los a_k son constantes complejas no nulas, se llama *polinomio de Dirichlet*, que por el Lema (8), sus ceros se encuentran en la banda vertical $\sigma_I \leq \sigma \leq \sigma_S$, donde σ_S es la única raíz real de $h(\sigma)$ y σ_I es la única raíz real de $g(\sigma)$, para

$$h(\sigma) = |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k| e^{-\lambda_k \sigma} \quad \text{y} \quad g(\sigma) = |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| e^{(\lambda_n - \lambda_k) \sigma}$$

En particular, $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n e^{-s \ln(k)}$ es un polinomio de Dirichlet, por tanto sus ceros están en franjas verticales, llamadas *franjas críticas*

$$\psi_n \leq \Re(s) \leq \varphi_n$$

Sobre los extremos inferior ψ_n y superior φ_n (para $n \geq 2$) de cada franja crítica, se sabe que, si $\varphi_n = \sup \{\Re(s) / \zeta_n(s) = 0\}$, en (Montgomery and Vaughan, 2002) se demuestra que, para $0 < c < (\frac{4}{\pi} - 1)$ fijado, existe $n_0(c)$ tal que $\forall n \geq n_0(c)$

$$1 + c \frac{\log(\log n)}{\log n} < \varphi_n \leq 1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \frac{\log(\log n)}{\log n}. \quad (2)$$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 1$.

Y si $\psi_n = \inf \{\Re(s) / \zeta_n(s) = 0\}$, Oswaldo Velásquez Castañón y Michel Balazard demostraron que (Balazard and Velásquez Castañón, 2009)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{n} = -\log 2 \quad (3)$$

en particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = -\infty$.

De otro lado, para cada altura T prefijada, sea $N_n(T)$ el número de ceros de $\zeta_n(s)$ en la franja horizontal $0 \leq \Im(s) \leq T$, esto es,

$$N_n(T) = |\{s \in \mathbb{C} / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T\}| \quad (4)$$

estos ceros se encuentran en el rectángulo $\mathcal{R}_n(T) = [\psi_n(T), \varphi_n(T)] \times [0, T]$, donde

$$\psi_n(T) = \min \{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \} \quad (5)$$

y

$$\varphi_n(T) = \max \{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \} \quad (6)$$

considerando que $\zeta_n(s)$ no tiene ceros reales, y para los ceros de $\zeta_n(s)$ con parte imaginaria negativa, $\overline{\zeta_n(s)} = \zeta_n(\bar{s})$, de modo que

$$\{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \} = \{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, -T \leq \Im(s) \leq T \}.$$

Es, en este contexto, en el que formulamos nuestro problema de investigación.

¿Cómo determinar la nube de ceros del polinomio de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en la región rectangular

$$\mathcal{R}_n(T) = \{s = \sigma + it / \psi_n \leq \sigma \leq \varphi_n, 0 \leq t \leq T\}, \quad T > 0 \quad (7)$$

y con qué densidad se distribuye en la banda vertical $\psi_n \leq \Re(s) \leq \varphi_n$?

Encaramos entonces, el problema de calcular los ceros de los polinomios de Dirichlet en regiones acotadas del plano complejo, que reducimos a calcular los ceros en regiones rectangulares.

El método numérico

El método propuesto, se basa en el cálculo de la variación del argumento, criterio derivado de (Ying and Katz, 1988). El algoritmo propuesto, calcula el número de ceros dentro de un rectángulo dado, utilizando una cota global para la segunda derivada, que no es una condición tan fuerte, al menos para algunas funciones particulares, como los polinomios exponenciales que nos interesan aquí.

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $R \subset \Omega$ una región cuya frontera $\partial R \subset \Omega$ puede ser parametrizada como un arco simple, orientado en sentido antihorario. Como establece el principio del argumento, el número de ceros de $f(s)$ en R , $N(R)$, esta dada por

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{f \circ \partial R} \arg.$$

En particular, si $R \subset \Omega$ es una región poligonal, digamos $\partial R = \bigcup_{i=0}^{n-1} [z_i, z_{i+1}]$ con $(z_n = z_0)$ y la variación del argumento satisface la condición $|\Delta_{f \circ [z_i, z_{i+1}]} \arg| < \pi$, entonces

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{f \circ [z_i, z_{i+1}]} \arg$$

El siguiente teorema, cuya demostración es mejorada aquí, establece una condición suficiente para el cálculo del argumento en un segmento.

Teorema 1. (Ying and Katz, 1988) Sea $P(s)$ una función afín compleja, $f(s)$ una función holomorfa sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, y $R(s)$ la función definida por $R(s) = f(s) - P(s)$. Si

$$\max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| < \min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)|, \quad (8)$$

entonces

$$|\Delta_{f \circ [s_1, s_2]} \arg| < \pi \quad y \quad \Delta_{f \circ [s_1, s_2]} \arg = \arg\left(\frac{f(s_2)}{f(s_1)}\right).$$

Corroboramos también, con una pequeña mejora en la demostración, el resultado (Ying and Katz, 1988, Lemma 2.1).

Lema 1. Sea $f(s)$ una función holomorfa sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, $P(s)$ y $R(s)$ definidos por $P(s) = f(s_1) + \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1}(s - s_1)$ y $R(s) = f(s) - P(s)$. Si $M(s_1, s_2)$ es una cota de $|f''(s)|$ en el intervalo $[s_1, s_2]$, es decir,

$$|f''(s)| \leq M(s_1, s_2) \quad \forall s \in [s_1, s_2],$$

entonces

$$\max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| \leq M(s_1, s_2) \frac{|s_1 - s_2|^2}{8}.$$

La aplicación de este lema reemplaza el cálculo del máximo de $|R(s)|$, por un cálculo más simple, a partir de alguna cota de $|f''(s)|$ en el intervalo $[s_1, s_2]$. El cálculo del mínimo de la norma de $P(s)$ también es directa de acuerdo a (Ying and Katz, 1988, Lemma 2.2). En efecto, a partir del lema (14), se demuestra que

$$\min_{z \in [z_1, z_2]} |P(z)| \in \left\{ \frac{\Im(P(z_1)\overline{P(z_2)})}{|P(z_1) - P(z_2)|}, |P(z_1)|, |P(z_2)| \right\} \quad (9)$$

Con esta información, nuestro criterio de discretización del contorno consiste en determinar segmentos más pequeños $[s'_1, s'_2]$ tales que

$$M(s'_1, s'_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8} < \min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)| \quad (10)$$

Para garantizar la existencia de una discretización conveniente de un segmento del plano complejo que no contiene ningún cero de $f(s)$, lo que nos permitirá calcular la variación del argumento de la función sobre dicho segmento, presentamos el siguiente teorema

Proposición 1 (Velásquez-T.). *Dada una función holomorfa $f(s)$ sin cero sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, y $M(s_1, s_2) > 0$ tal que, para todo $s \in [s_1, s_2]$, $|f''(s)| \leq M(s_1, s_2)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $[s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2]$, $|s'_1 - s'_2| < \delta$, y $P(s)$ dada por*

$$P(s) = f(s'_1) + \frac{f(s'_2) - f(s'_1)}{s'_2 - s'_1}(s - s'_1),$$

se tiene que

$$\max_{s \in [s'_1, s'_2]} |R(s)| \leq M(s_1, s_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8} < \min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)|,$$

donde $R(s) = f(s) - P(s)$.

Con el fundamento hasta aquí expuesto, construimos un programa, que nos permite calcular la variación del argumento de una función a lo largo de un segmento (por lo tanto, en cualquier curva poligonal), lo que se establece en el Algoritmo (3).

Ya con el método para calcular el número de ceros dentro de un rectángulo, estamos en la posición de dar el método para calcularlos efectivamente, previamente los aislamos. Nuestra principal suposición es que $f(s)$ no tiene ceros sobre la frontera ∂R de nuestro primer rectángulo.

El método de bisección bidimensional propuesto es confiable, pero lento, ya que solo es de convergencia lineal. Para acelerar las cosas, cuando disponemos de un rectángulo R con un solo cero en su región interior, podemos combinar nuestro método principal con algún método más rápido, como el método de Newton. En efecto, partiendo del centro $z_0 \in R$, iteramos

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0$$

esperando obtener $|f(z_n)| < \varepsilon$ o $|z_{n+1} - z_n| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$.

Como hemos dividido los rectángulos, se han convertido en problemas independientes y nuestro método es adecuado para aplicar la *programación paralela*. Cada rectángulo subdividido se coloca en una pila, que será procesado por un procesador disponible.

Siendo los polinomios de Dirichlet de nuestro interés particular, brindamos una implementación completa de esta clase de funciones

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s} \quad \text{donde } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n.$$

en este caso, la cota $M(s_1, s_2)$ de $|f''(s)|$ para $s \in [s_1, s_2]$ es dado por

$$M(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^n |a_k| \lambda_k^2 e^{-\min\{\Re(s_1), \Re(s_2)\}}.$$

Ejecutamos nuestro programa para calcular los ceros de $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n e^{-s \ln(k)}$, la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann, para diferentes valores de n y dentro de diferentes rectángulos dados, como funciones de n y T , dados por

$$1 - n \leq \Re(s) \leq 1,73, \quad 0 \leq \Im(s) \leq T.$$

n	T	número de ceros	tiempo(s)
3	1 000 000	174 850	6 312,3
4	1 000 000	220 636	12 497,0
5	1 000 000	256 150	21 633,1
6	100 000	28 517	3 321,5
7	100 000	30 970	4 306,9

Cuadro 1: Tiempos de ejecución calculando los ceros de la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann - Ubuntu Linux 18.04 de 64 bits, ejecutandose en una CPU Intel Core i7-8700T a 2.40 GHz x 12 con 8 GB de RAM

En las siguientes tablas, se muestra el ancho de cada rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ para valores de n pequeños, y dibujamos la nube de ceros para $n = 7$.

n	T	$\psi_n(T)$	$\varphi_n(T)$
3	1000000	-0,99999999994488190769477563395052620541	0,78788491100080513161042799038478234229
4	1000000	-1,2142853227009554567026878487995769152	0,62628810392839922378739717570136306842
5	1000000	-2,4259769648667923075323611202507188521	0,89089957457283420253067328390163288814
6	100000	-2,8862226301368737347849176292444813055	0,84104188145876599098277287691183228644
7	100000	-3,8026034112627661409796484569448555656	0,97589973342495939623308316170841190106

Cuadro 2: Cálculo del ancho de cada rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ con extrema precisión

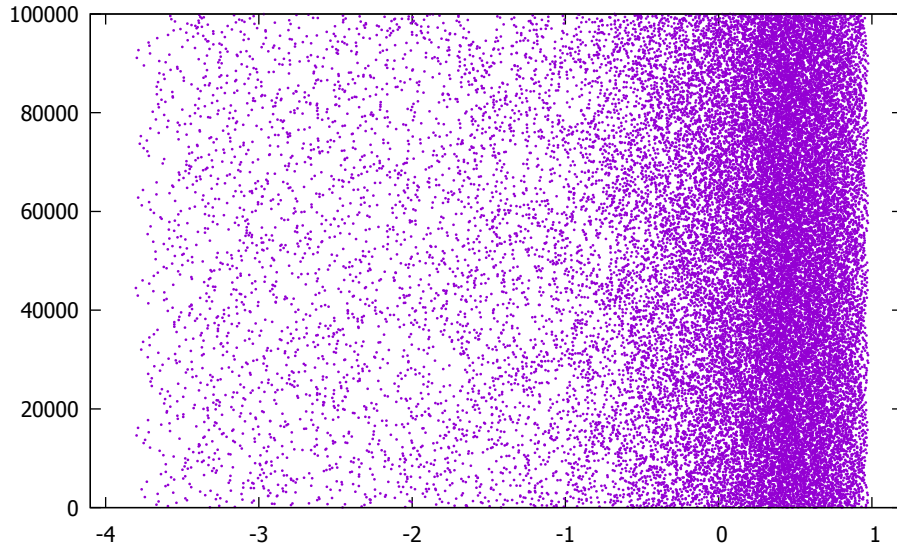


Figura 1: Nube de 30 970 ceros de $\zeta_7(s)$ en el rectángulo $\mathcal{R}_7(T)$ para $T = 100\,000$

Consecuencias del teorema de equivalencia de Bohr

Un resultado clave en el estudio de la cota inferior ψ_n es el teorema de equivalencia de Bohr (Harald Augustus Bohr-1887, Dinamarca), que permite *torcer* los coeficientes de un polinomio de Dirichlet, como $\zeta_n(s)$, para estudiar de manera más sencilla sus propiedades. Diseñamos aquí, la demostración del teorema de Bohr para bandas verticales.

Teorema 2 (de equivalencia de Bohr para bandas verticales). *Si*

$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ y $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$ son series de Dirichlet equivalentes con abscisa de convergencia absoluta σ_a , entonces en cualquier banda vertical $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ($\sigma_1 \geq \sigma_a$), f y g toman el mismo conjunto de valores

resultado que nos permite demostrar que $\beta_n \leq \psi_n \leq \beta_n^\pm$, donde β_n^\pm es el mínimo de los ceros reales de las sumas parciales “torcidas” por funciones reales $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm 1\}$ completamente multiplicativas, esto es,

$$\beta_n^\pm = \min \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^n \chi(k) k^{-\sigma} = 0, \chi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm 1\} \text{ completamente multiplicativa} \right\}$$

sobre β_n , para cada elección de χ , los ceros reales de $\zeta_{n,\chi}(s) = \sum_{k=1}^n \chi(k) k^{-s}$ están contenidos en un intervalo compacto $[\beta_n, \alpha_n]$, y constituyen un conjunto discreto, como conjunto de ceros de una función holomorfa.

En (Balazard and Velásquez Castanón, 2009) se realiza un análisis exhaustivo de las posibilidades para las funciones χ , y con estos argumentos se logró demostrar (3). En el siguiente cuadro mostramos algunos valores de β_n y β_n^\pm para n pequeños.

n	β_n^\pm	β_n	$(\chi(2), \chi(3), \dots, \chi(p_{\pi(n)}))$
3	-1,00000000000000000000000000000000	-1,00000000000000000000000000000000	(-1, -1)
4	-1,73050735785763292052482801	-1,00000000000000000000000000000000	(-1, -1)
5	-2,42601276437583705549548125	-2,42601276437583705549548125	(1, 1, -1)
6	-3,11889573370112771040562677	-2,88651299282866083981521533	(-1, 1, 1)
7	-3,81199945847963517736271821	-3,81199945847963517736271821	(1, 1, 1, -1)

Cuadro 3: Valores β_n y β_n^\pm para $3 \leq n \leq 7$

Tambien Bohr advierte, que el conjunto de valores de un polinomio en n variables complejas en un n -cubo, está relacionado al conjunto de valores de un polinomio de Dirichlet (asociado). Resultado que aquí construimos su demostración, usando la teoría de Bohr y el teorema de Kronecker (Hardy and Wright, 1960)

Teorema 3 (Bohr-Velásquez-T.). *Si $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números positivos linealmente independientes sobre \mathbb{Q} y*

$$f(s) = P(e^{-\lambda_1 s}, \dots, e^{-\lambda_n s})$$

entonces

$$\{P(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1\} = \bigcap_{\delta > 0} \{f(s) : |\Re(s)| < \delta\}.$$

Ahora, si

$$\zeta_n(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 2^{-2s} + 5^{-s} + 2^{-s}3^{-s} + 7^{-s} + \dots + 2^{-s\alpha_{1n}} 3^{-s\alpha_{2n}} \dots p_{\pi(n)}^{-s\alpha_{\pi(n)n}}$$

y especializamos $z_1 = e^{-s \ln(2)}$, $z_2 = e^{-s \ln(3)}$, $z_3 = e^{-s \ln(5)}$, ...

$$\zeta_n(s) = P_n(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\pi(n)}) \tag{11}$$

Por ejemplo: $P_3(z_1, z_2) = 1 + z_1 + z_2$, $P_4(z_1, z_2) = 1 + z_1 + z_2 + z_1^2$, $P_5(z_1, z_2, z_3) = 1 + z_1 + z_2 + z_1^2 + z_3$, $P_6(z_1, z_2, z_3) = 1 + z_1 + z_2 + z_1^2 + z_3 + z_1 z_2$

Sobre este polinomio, haciendo uso del postulado de Bertrand (Ferreira, 2014), logramos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4 (Velásquez-T.). *El polinomio $P_n(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\pi(n)})$ definido en (4.14) es irreducible en el anillo $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\pi(n)}]$*

Sobre la densidad de la nube de ceros

Nos centramos ahora en analizar el conjunto $R_n = \{\Re(s) / \zeta_n(s) = 0\}$. Los gráficos de los ceros de $\zeta_n(s)$ obtenidos muestran una cierta concentración en determinadas bandas verticales. Por ejemplo:

- para $n = 4$, se nota una menor concentración de ceros en el intervalo de abscisas entre -1 y 0 con respecto a otros intervalos;
- para $n = 5$, se nota una mayor concentración alrededor de la abscisa $-1,5$ y para abscisas positivas.

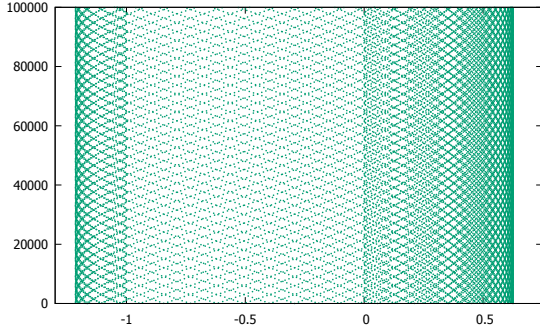


Figura 2: Ceros de $\zeta_4(s)$

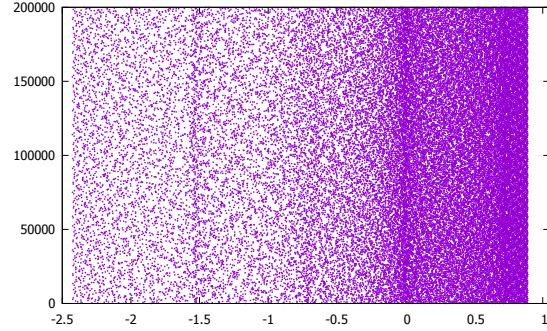


Figura 3: Ceros de $\zeta_5(s)$

Requerimos entonces, de una herramienta para el análisis de dichos fenómenos. Por otro lado, la evidencia inicial, al menos para valores pequeños de n , indican que R_n sería denso en el intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, lo que es, particularmente cierto en el caso $n = 3$, donde la clausura de R_3 es (Mora, 2013a, Corrollary 11).

$$\overline{R_3} = [\psi_3, \varphi_3]$$

El resultado es similar para el caso $n = 4$ (Mora, 2013a, Theorem 14), obteniendose $\overline{R_4} = [\psi_4, \varphi_4]$. Sin embargo, en el caso general, solo se asegura la existencia de $\delta_n > 0$ tal que $[-\delta_n, \varphi_n] \subset \overline{R_n}$ (Mora, 2013a, Theorem 17).

Para el estudio de R_n y dada la densidad esperada en el intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, definimos una función de distribución acumulada para una variable continua. Fijados $\sigma \in \mathbb{R}$ y $T > 0$, sea

$$N_n(\sigma, T) = |\{s \in \mathbb{C} : \zeta_n(s) = 0, \Re(s) \leq \sigma, 0 \leq \Im(s) \leq T\}| \quad (12)$$

Luego, definimos

$$\mu_n(\sigma, T) = \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}.$$

Claramente: $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ es una función creciente en la variable $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \mu_n(\sigma, T) \leq 1$, $\mu_n(\sigma, T) = 0$ para $\sigma < \psi_n$ y $\mu_n(\sigma, T) = 1$ para $\sigma \geq \varphi_n$.

La restricción de $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ al intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, denotada $\mu_n^*(\sigma)$, se calcula y grafica aquí, para $n = 3$

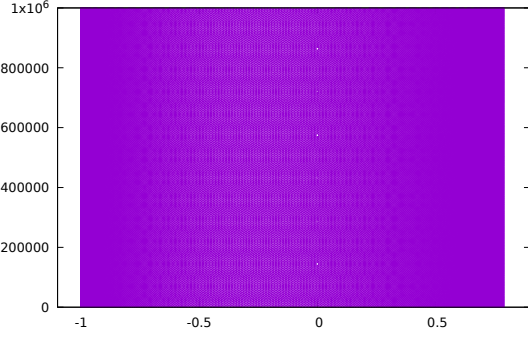


Figura 4: Los ceros de $\zeta_3(s)$

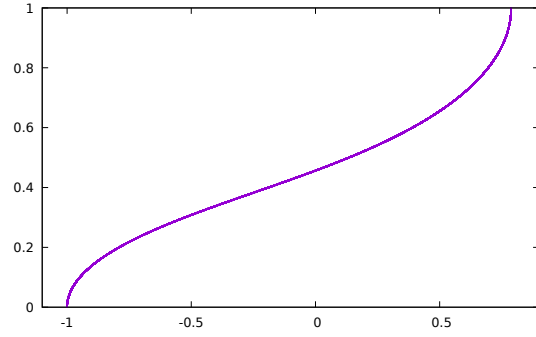


Figura 5: $\mu_3^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_3; \varphi_3]$

Los gráficos presentados sugieren la existencia del límite de $\mu_n(\sigma, T)$ cuando $T \rightarrow \infty$. Sin embargo, al no poder asegurar la existencia de este límite en general, consideramos los límites

$$\underline{\mu}_n(\sigma) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}, \quad \overline{\mu}_n(\sigma) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}.$$

La función $\underline{\mu}_n$ (respectivamente $\overline{\mu}_n$) se denomina *función de distribución acumulada asintótica inferior* (respectivamente *superior*) de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$. Si $\underline{\mu}_n(\sigma) = \overline{\mu}_n(\sigma)$, escribimos este límite común

$$\mu_n(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}$$

y la llamaremos simplemente *función de distribución acumulada asintótica de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$ en σ* .

Consecuencias de la casi-periodicidad

Desde otra perspectiva, se dice que la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es casi-periódica, si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto de los casi-periodos de f asociado a ε , es relativamente denso en \mathbb{R} , es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l = l(\varepsilon) > 0 / \forall a \in \mathbb{R} \langle a; a + l \rangle \cap \{T_f(\varepsilon)\} \neq \emptyset$$

Por ejemplo, para $(\lambda_k)_k$ sucesión de números reales no nulos, la función

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$$

es casi-periódica, ya que la correspondencia $x \mapsto e^{i\lambda_k x}$ es periódica, con periodo $T_k = \frac{2\pi}{|\lambda_k|}$. Mientras que, la función $f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}$ es casi-periódica, pero no es periódica.

En el lema 11 se demuestra que, todo polinomio de Dirichlet es casi-periódica. Esperamos entonces que el conjunto de los ceros de una función casi-periódica tenga una estructura de traslación análoga a la que posee la función.

Dado $\varepsilon > 0$, un número real T es una ε -traslación (vertical) del *multi-conjunto* $P = \{s_j\}_{j \in I} \subset \mathbb{C}$ (un conjunto donde cada punto se repite un número finito de veces, llamado *multiplicidad* del punto) si existe una biyección $f : I \rightarrow I$ tal que, para cada $j \in I$ tengamos

$$|s_j + iT - s_{f(j)}| < \varepsilon.$$

Un conjunto $P \subset \mathbb{C}$ es *casi-periódico* si, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto de las ε -traslaciones de P es relativamente denso. En la proposición (13), se demuestra que, el conjunto de ceros de un polinomio de Dirichlet es casi-periódico, y algunos casos sus ceros reducidos módulo $\left|\frac{2\pi i}{a}\right|$, se encuentran sobre el periodo de una curva que involucra a un polinomio (Borwein et al., 2007, Theorem 4.5).

Por ejemplo, los ceros de $\zeta_3(s)$ reducidos módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$ y módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$, con la respectiva ecuación, de la curva que contiene a todos sus ceros son:

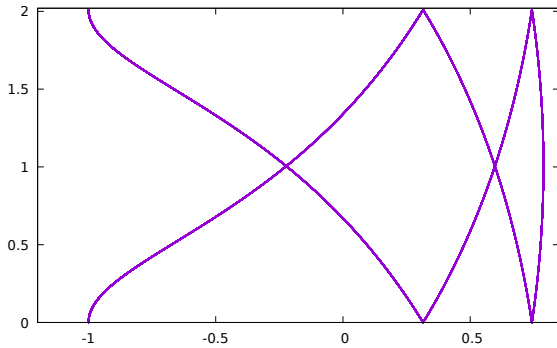


Figura 6: Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$

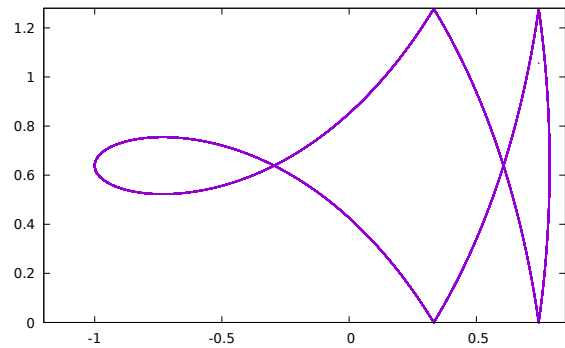


Figura 7: Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$

Si $x = \Re(s)$ e $y = \Im(s)$, la ecuación de la curva con módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$ es,

$$\begin{aligned} & -3^{4x}2^{7x+1} \cos\left(y \log\left(\frac{729}{32}\right)\right) + 3^{2x}(5 \cdot 2^{12x} - 2^{10x}) \\ & - 3^{8x}(5 \cdot 2^{12x} - 19 \cdot 2^{10x} + 2^{4x} + 2^{2x} + 13 \cdot 2^{8x+1} - 7 \cdot 2^{6x+1}) \\ & + 3^{10x}(2^{12x} + 15 \cdot 2^{8x} + 15 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{10x+1} - 5 \cdot 2^{6x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 1) \\ & - 3^{6x}(21 \cdot 2^{10x} + 2^{6x} - 5 \cdot 2^{12x+1} - 3 \cdot 2^{8x+2}) \\ & + 3^{4x}(9 \cdot 2^{10x} - 2^{8x} - 5 \cdot 2^{12x+1}) - 2^{12x} = 0. \end{aligned}$$

y la ecuación de la curva con módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$ es,

$$\begin{aligned} & 3^x2^{10x+1} \cos\left(y \log\left(\frac{2187}{16}\right)\right) \\ & + 3^{8x}(2^{14x} - 7 \cdot 2^{12x} + 21 \cdot 2^{10x} - 35 \cdot 2^{8x} + 35 \cdot 2^{6x} - 21 \cdot 2^{4x} + 7 \cdot 2^{2x} - 1) \\ & + 3^{6x}(17 \cdot 2^{12x} - 25 \cdot 2^{10x} - 11 \cdot 2^{4x} + 3 \cdot 2^{2x} - 2^{14x+2} + 5 \cdot 2^{8x+1} + 5 \cdot 2^{6x+1}) \\ & - 3^{4x}(13 \cdot 2^{12x} + 3 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{14x+1} - 3 \cdot 2^{10x+1} - 2^{6x+2}) \\ & + 3^{2x}(3 \cdot 2^{12x} + 2^{6x} - 2^{14x+2}) + 2^{14x} = 0. \end{aligned}$$

Ecuaciones construidas usando el proceso de eliminación del método bases de Gröbner.

Los ceros especiales

Ahora siguiendo a Platt y Trudgian para $n \geq 19$, $n \neq 20, 21, 28$ existen ceros especiales, sin embargo no son fáciles de hallarlos, lo que nos motiva encontrarlos.

Sea γ un rectángulo que contiene a un cero s_0 de la función $f(s) = \zeta_n(s)$ (con n fijo) y supongamos que existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < \eta \leq |f(s)|, \forall s \in \gamma^*$$

lo que es posible, dado que los ceros de f son aislados.

Sea $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall s \in \gamma^*, |f(s+iT) - f(s)| < \eta \tag{13}$$

entonces $\forall s \in \gamma^*$, $|g(s) - f(s)| < |f(s)|$ con $g(s) = f(s+iT)$. Así por el teorema de Rouché, el número de ceros de f en el interior de γ es igual el número de ceros de g en el interior de γ . Esto es, $|Z(f)|_\gamma = |Z(g)|_\gamma$, y como $|Z(f)|_\gamma = 1$, concluimos que

$$\text{existe } s_0^* \in \text{int}(\gamma); f(s_0^* + iT) = 0$$

El cálculo del T queda garantizado en el teorema (24).

Ahora, para el cálculo de los ceros especiales, con el valor de T ya determinado, usaremos el algoritmo que calcula los ceros de la suma parcial en un rectángulo, entonces, se usará un bucle partiendo desde un cero s_0 (con $\Im(s_0)$ pequeño) y se buscará el cero con el algoritmo para rectángulos ya conocido. En otras palabras, el algoritmo aumenta iT al cero actual (inicializado en un cero hallado previamente) hasta que ya no se pueda encontrar algún cero en la región:

$$\begin{aligned} \max \{1 + 10^{-16}, \Re(s_0) - 0,1\} &\leq \Re(s) \leq \min \{2, \Re(s_0) + 0,1\}, \\ \Im(s_0) + T - 5 &\leq \Im(s) \leq \Im(s_0) + T + 5 \end{aligned}$$

Donde s_0 es una referencia al último cero encontrado durante la ejecución del algoritmo.

Finalmente, se enuncia y demuestra un resultado, que es aplicado al cálculo efectivo de T , y algunos ceros especiales a partir de un cero conocido.

Proposición 2 (Velásquez-T.). *Sea $n \geq 2$, $s_0 \in \mathbb{C}$ un cero de $\zeta_n(s)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\zeta_n(s) \neq 0$ para todo $s \in \partial R_{s_0, \varepsilon}$ con*

$$R_{s_0, \varepsilon} = [\Re(s_0) - \varepsilon, \Re(s_0) + \varepsilon] \times [\Im(s_0) - \varepsilon, \Im(s_0) + \varepsilon]$$

entonces, podemos calcular efectivamente $T > 0$ tal que $\zeta_n(s)$ posee un cero en $R_{s_0 + iT, \varepsilon}$

Capítulo 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema

El objeto de estudio de esta investigación es la función zeta de Riemann, función de variable compleja definida por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}; \quad s = \sigma + it \quad \sigma, t \in \mathbb{R} \text{ y } \sigma > 1$$

Esta función tiene una prolongación analítica a todo el plano complejo, como una función meromorfa con un único polo simple en $s = 1$ y residuo 1. El mismo Riemann conjeturó que los ceros no triviales de esta función están distribuidos sobre una recta vertical.

En el presente trabajo hacemos un estudio de esta función, a partir de la información que nos brinda, las sumas parciales

$$\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} \tag{1.1}$$

Los ceros no triviales de $\zeta(s)$, es decir, los ceros que están en la franja¹ $0 \leq \Re(s) \leq 1$, guarda información relevante sobre la función π

$$\pi(x) = |\{p \leq x : p \text{ es primo positivo}\}|$$

que mide la distribución de los números primos, que por el teorema de Hadamard y de La Vallée Poussin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

de modo que

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} \quad \text{para } x \text{ suficientemente grande}$$

¹ $\Re(s), \Im(s)$ son respectivamente la parte real e imaginaria del complejo s

esto es equivalente, a la no existencia de ceros de la función $\zeta(s)$ en la recta $\Re(s) = 1$. En 1859 Riemann establece que todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ pertenecen a la *recta crítica* $\Re(s) = 1/2$, sin embargo hasta hoy², este problema no ha sido corroborado ni refutado. Por tanto validar o rechazar la hipótesis de Riemann es un problema abierto³, y su solución, no solo tendrá consecuencias en las matemáticas, sino también, en el comercio electrónico, la seguridad en la banca, y en el desarrollo de la misma computación.

1.2. Formulación del problema de investigación

El problema central que abordamos en esta investigación es,

¿Cómo determinar la nube de ceros del polinomio de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en la región rectangular

$$\mathcal{R}_n(T) = \{s = \sigma + it / \psi_n \leq \sigma \leq \varphi_n, 0 \leq t \leq T\}, \quad T > 0 \quad (1.2)$$

y con qué densidad se distribuye en la banda vertical $\psi_n \leq \Re(s) \leq \varphi_n$?

1.3. Delimitación del estudio

- Usando la noción de casi periodicidad de Bohr, se estudia la parte real de los ceros de la función $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$ en regiones acotadas del tipo

$$[\psi_n; \varphi_n] \times [0; T] \quad (1.3)$$

para ψ_n, φ_n dados en (2.77) y (2.79), $0 < T \leq 10^6$ prefijado, y finitos valores de n .

- Buscamos alguna forma de “medir” la distribución de los ceros de $\zeta_n(s)$ en regiones rectangulares del tipo (1.3), relacionandolo con la cantidad de ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ en el rectángulo $[0; 1] \times [0; T]$.

1.4. Justificación e importancia de la investigación

Uno de los desafíos de este milenio es resolver el reto planteado por el instituto norteamericano Clay en mayo del 2000, que consiste en corroborar o rechazar la hipótesis de Riemann (2.73), quizá motivado por el premio que ellos ofrecen, o por ser uno de los problemas aún

²3 de febrero de 2025

³Problema aún no resuelto

no resuelto por más de 165 años, desde que el mismo Riemann lo planteara en 1859.

Muchos resultados aritméticos, que dependen de la validez de la hipótesis de Riemann, serían validados o desechados.

La dificultad en vislumbrar una demostración o encontrar un contraejemplo, encontrando un cero de $\zeta(s)$ fuera de la línea crítica, ha hecho que muchos especialistas busquen formas innovadoras de abordar este problema, usando todas las herramientas que dispone cada investigador; algunos quedan satisfechos de tal dificultad mientras siga siendo una fuente generadora de nuevos teoremas o nuevas teorías que conlleven al desarrollo de esta ciencia.

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

Determinar la nube de ceros del polinomio de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en el rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ y demostrar que se distribuye con mayor densidad en vecindades de la recta $\Re(s) = \varphi_n(T)$, para todo $T > 0$.

1.5.2. Objetivos específicos:

- Implementar un algoritmo eficiente que genere una base de datos con los ceros de $\zeta_n(s)$ en la región $[\psi_n; \varphi_n] \times [0; T]$, y construir por medios computacionales la nube de sus ceros, para valores relevantes de n .
- Sabiendo que los ceros de los polinomios de Dirichlet $\zeta_n(s)$ se encuentran en bandas verticales, para cada $T > 0$ significativo, calcular la cota superior $\varphi_n(T)$ y la cota inferior $\psi_n(T)$ de la parte real de los ceros de $\zeta_n(s)$ en $[\psi_n(T); \varphi_n(T)] \times [0; T]$, con alto grado de precisión.
- Establecer propiedades de la función que mida la densidad de la nube de ceros en el intervalo $[\psi_n; \varphi_n]$, la función de distribución acumulada $\sigma \rightarrow \mu_n^*(\sigma) = \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}$, donde $N_n(\sigma, T)$ es el número de ceros de $\zeta_n(s)$ hasta una altura T con parte real menor o igual que σ , y $N_n(T)$ es el número de ceros de $\zeta_n(s)$ hasta una altura T .
- Construir algún método innovador, para obtener ceros especiales de $\zeta_n(s)$ para $n \geq 19$.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentos teóricos de la investigación

2.1.1. La función Gamma

El estudio de esta función es extraída de (Conway, 2012, Chapter VII, §7, pp.172–176), estudio que iniciamos admitiendo el (Conway, 2012, Theorem 5.12, p.165) sobre el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \in H(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad f(-n) = 0$$

así $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \in H(\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\})$ y cada $-n$ ($n \in \mathbb{N}$) es un polo simple. En particular $c = g(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}}$ es un número real positivo y el número real $\gamma = \log c$ se llama la *constante de Euler*, más aún

$$\gamma = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} e^{\frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 1 - \log(n+1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)$$

de donde

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) \quad (2.1)$$

Definición 1. La función Gamma es la función meromorfa sobre \mathbb{C} con polos simples en $0, -1, -2, \dots$ dada por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (2.2)$$

En particular, $\Gamma(1) = e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}} = e^{-\gamma} c = e^{-\gamma} e^{\gamma} = 1$

Sea

$$g_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z} = z(z+1) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \log n}$$

entonces $g_n(z) = \left\{ z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\} \cdot e^{z\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)}$ y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = z \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right) \cdot e^{\gamma z} = \frac{1}{\Gamma(z)}$. Por tanto

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (2.3)$$

y teniendo en cuenta que $\Gamma(z+1) = z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \cdot \frac{n}{z+n+1}$, se tiene que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, así por inducción

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.4)$$

Teorema 5 (de Reflexión de Shwarz).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}} \cdot \frac{1}{(-z)e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}} = \frac{-1}{z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

y como en (Conway, 2012, Chapter VII, §6, p.170–171) se tiene la factorización del seno $\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$, implica que $\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-1}{z^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}} = \frac{-\pi}{z \operatorname{sen} \pi z}$, de donde

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)\{(-z)\Gamma(-z)\} = -z \left(\frac{-\pi}{z \operatorname{sen} \pi z} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad \square$$

Si en la fórmula de reflexión de Shwarz, $z = \frac{1}{2}$ se tiene que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$, de donde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Corolario 1. La función gamma no tiene ceros en todo el plano complejo, esto es

$$Z(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} : \Gamma(z) = 0\} = \emptyset \quad (2.6)$$

Demostración. De la ecuación (2.5), $\Gamma(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, y por la ecuación (2.4), $\Gamma(n) \neq 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$. Además, en cada entero ≤ 0 la función Γ tiene un polo simple. \square

Ahora calculamos el residuo de la función gamma en cada uno de sus polos simples, teniendo en cuenta que para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ $\operatorname{sen}(\pi(z+n)) = (-1)^n \operatorname{sen}(\pi z)$

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z); -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\pi}{\Gamma(1-z)\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$$

Así, por (2.4)

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z); -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

Finalmente, en (Conway, 2012, Theorem 7.15) se demuestra que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0 \quad (2.8)$$

2.1.2. La función zeta de Riemann

Gran parte de los resultados que se ven aquí han sido extraídos de (Apostol, 2020, Capítulo 12). Sea $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Para cada $s \in \Omega$

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \quad \text{converge}$$

de donde la serie $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$ converge absolutamente en Ω , y como la función “parte real” $\Re : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, para cada $K \subset \Omega$ compacto, existe $s_0 \in K$ tal que $\sigma_0 = \Re(s_0) \leq \Re(s)$ para todo $s \in K$, luego

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}, \quad \forall s \in K$$

y por el M. test de Weierstrass $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$ converge uniformemente en K , para todo $K \subset \Omega$ compacto. Por tanto, dado que $\sum_{n=1}^m n^{-s} \in H(\Omega)$, por el teorema de aproximación de Weierstrass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \in H(\Omega)$$

Definición 2. La función zeta de Riemann en Ω , es la función analítica $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \forall s \in \Omega \quad (2.9)$$

Si en la ecuación (2.8), hacemos que $t = nx$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, tenemos que

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (nx)^{s-1} e^{-nx} n dx = n^s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

de donde, $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}) \Gamma(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^N (e^{-x})^n x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$. Por tanto,

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx, \quad \Re(s) > 1 \quad (2.10)$$

Esta ecuación relaciona la función gamma con la función zeta de Riemann, e inspirados en ella, para cada $s \in \mathbb{C}$ definimos

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz \quad (2.11)$$

donde la curva \mathcal{C} es la yuxtaposición de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 , que están descritas en el siguiente gráfico, para $0 < r < 2\pi$. La demostración del siguiente teorema se puede ver en (Apostol, 2020, Teorema 12.3, p.314)

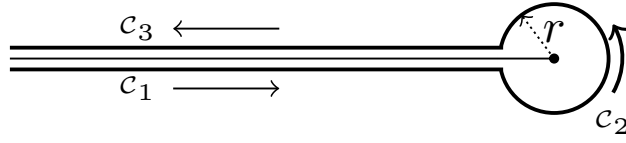


Figura 2.1: La curva \mathcal{C}

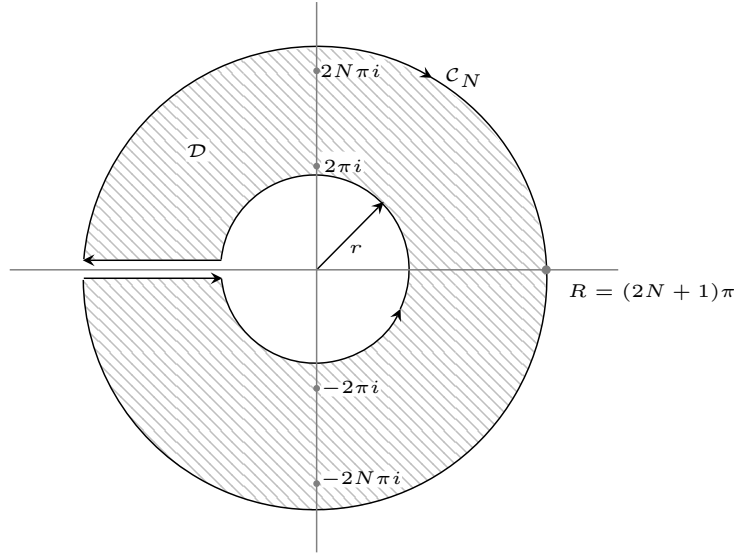


Figura 2.2: La curva \mathcal{C}_N

Teorema 6. Con las notaciones que se acaba de fijar, la función I es entera, además

$$I(s)\Gamma(1-s) = \zeta(s), \quad \Re(s) > 1 \quad (2.12)$$

Sea \mathcal{C}_N la curva mostrada en la figura (2.2), donde $R = (2N + 1)\pi$ y $0 < r < 2\pi$, si

$$I_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_N} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz \quad (2.13)$$

entonces

$$I_N(1-s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_N} \frac{z^{-s} e^z}{1-e^z} dz = - \left\{ \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z); 2n\pi i) + \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z); -2n\pi i) \right\}$$

donde $f(z) = \frac{z^{-s} e^z}{1-e^z}$, y el signo menos se debe al recorrido horario de la curva \mathcal{C}_N . Como

$$\text{Res}(f; 2n\pi i) = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} (z - 2n\pi i) \frac{z^{-s} e^z}{1-e^z} = \frac{-(2n\pi i)^{-s} e^{2n\pi i}}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=2n\pi i}} = -(2n\pi i)^{-s} \text{ y } \text{Res}(f; -2n\pi i)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2n\pi i} (z + 2n\pi i) \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} = \frac{-(-2n\pi i)^{-s} e^{-2n\pi i}}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=-2n\pi i}} = -(-2n\pi i)^{-s}, \text{ se tiene que } I_N(1-s) = \sum_{n=1}^N (2n\pi i)^{-s} + \sum_{n=1}^N (-2n\pi i)^{-s} = (2\pi)^{-s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} (i^{-s} + (-i)^{-s}) = (2\pi)^{-s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

Por lo tanto, se ha demostrado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \Re(s) > 1 \quad (2.14)$$

Proposición 3. Para la función I dada en (2.11)

$$I(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \Re(s) > 1 \quad (2.15)$$

Demostración. Sea $g(z) = \frac{e^z}{1 - e^z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$, r real tal que $0 < r < 1$ y

$$Q_0 = \{z \in \mathbb{C} / |z| \geq r, |\Re(z)| \leq 1, |\Im(z)| \leq \pi\}$$

Siendo Q_0 compacto, g está acotada en Q_0 , es decir $|g(z)| \leq M_1(r)$ para algún $M_1(r) > 0$ y todo $z \in Q_0$. Siendo g periódica de periodo $2\pi i$, g está acotado por $M_1(r)$ en

$$Q = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{C} / |z - 2k\pi i| \geq r, |\Re(z)| \leq 1\}$$

Sea ahora $z \in \mathbb{C}$ con $|\Re(z)| \geq 1$, entonces

$$|g(z)| = \left| \frac{e^z}{1 - e^z} \right| = \frac{e^x}{|1 - e^z|} \leq \frac{e^x}{|1 - e^x|} \leq \frac{e}{e - 1}, \quad x = \Re(z)$$

Por tanto, para $M = \max\left\{\frac{e}{e-1}; M_1(r)\right\}$, $|g(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_r(2k\pi i)$

Para $R = (2N + 1)\pi$, $N \in \mathbb{N}$ y $s = x + yi$

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R} \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} dz \right| &\leq \int_{|z|=R} |g(z)| |z^{-s}| |dz| \leq M \int_0^{2\pi} e^{-x \ln R + y\theta} R d\theta = M \int_0^{2\pi} R^{1-x} e^{y\theta} d\theta \\ &= \frac{M}{R^{x-1}} \cdot \frac{e^{y\theta}}{y} \Big|_0^{2\pi} = \frac{M}{R^{x-1}} \frac{1}{y} (e^{2\pi y} - 1) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (x = \Re(s) > 1) \end{aligned}$$

Para $|z| = R$ se tiene que $z = Re^{i\theta}$, $dz = Rie^{i\theta} d\theta$ y $g(z)$ esta acotada por M , entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} dz = 0$$

Ahora, dividiendo la curva C_N en dos partes

$$I_N(1-s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ominus} \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} dz$$

y tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$ (por tanto $R \rightarrow \infty$) $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(1-s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{-s} e^z}{1-e^z} dz$, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(1-s) = I(1-s)$$

Finalmente, el resultado se sigue de la ecuación (2.14) □

Si denotamos $\zeta_1(s) = I(s)\Gamma(1-s)$, por el teorema 6 $\zeta_1(s) = \zeta(s)$ cuando $\Re(s) > 1$, es decir $\zeta_1|_{\Omega} = \zeta$. Siendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto¹, ζ_1 es la prolongación analítica de ζ , por lo que usaremos la misma notación.

Definición 3. La función zeta de Riemann está definida por

$$\zeta(s) = I(s)\Gamma(1-s) \tag{2.16}$$

Siendo la función I entera, las únicas singularidades posibles son los polos de $\Gamma(1-s)$, esto es $s = 1, 2, 3, \dots$; y como $\zeta(s)$ es analítica en $2, 3, 4, \dots$, el único posible polo de $\zeta(s)$ es 1. Más aún

$$\text{Res}(\zeta(s); 1) = \lim_{s \rightarrow 1} -(1-s)\Gamma(1-s)I(s) = -\lim_{s \rightarrow 1} \Gamma(2-s)I(s) = -\Gamma(1)I(1) = -I(1) = 1,$$

puesto que

$$\begin{aligned} I(1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{1-e^z} dz = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^x}{1-e^x} dx + \int_{C_2} \frac{e^z}{1-e^z} dz + \int_{-r}^{-\infty} \frac{e^x}{1-e^x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^z}{1-e^z} dz = \text{Res} \left(\frac{e^z}{1-e^z}; 0 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{1-e^z} = \frac{-e^0}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=0}} = -1 \end{aligned}$$

\mathcal{C} y \mathcal{C}_2 son los dados en la figura 2.1 y 2.2.

Por tanto, hemos demostrado que, la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en 1, en la cual tiene un polo simple con residuo 1, esto es

$$\zeta \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \text{ y } \text{Res}(\zeta(s); 1) = 1 \tag{2.17}$$

Ahora, teniendo en cuenta la ecuación (2.16) y la proposición 3 $\zeta(1-s) = \Gamma(s)I(1-s) =$

$\Gamma(s)2(2\pi)^{-s}\zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, es decir, $\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right)$, de donde obtenemos la *ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \tag{2.18}$$

¹ $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 1\}$

Un resultado muy conocido, cuya demostración se puede ver en (Gamelin, 2003, Theorem p. 371), es

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1 \quad (2.19)$$

donde p recorre el conjunto de los números primos positivos.

A partir de la ecuación (2.19), se sabe que esta función no tiene ceros en $\Re(s) > 1$. Para $\Re(s) < 0$, por el teorema de reflexión de Schwarz Γ no tiene ceros en \mathbb{C} y como $\Re(1-s) = 1 - \Re(s) > 1$, $\zeta(1-s) \neq 0$, de donde, por la ecuación (2.18) $\zeta\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$, obteniendo los ceros triviales de la función zeta de Riemann $-2, -4, -6, -8, -10, \dots$.

También de (2.18), vemos que los posibles ceros de la función ζ en la banda crítica $0 \leq \Re(s) \leq 1$ guardan una simetría respecto a la recta crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$, más aún, se sabe que para todo t real $\zeta(1+it) \neq 0$ (Apostol, 2020, Teorema 13.6, p.357); es en este contexto que se genera la famosa conjetura o hipótesis de Riemann, el cual afirma que, si $\zeta(s) = 0$ y $0 < \Re(s) < 1$, entonces $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Recientemente, utilizando aritmética de intervalos se

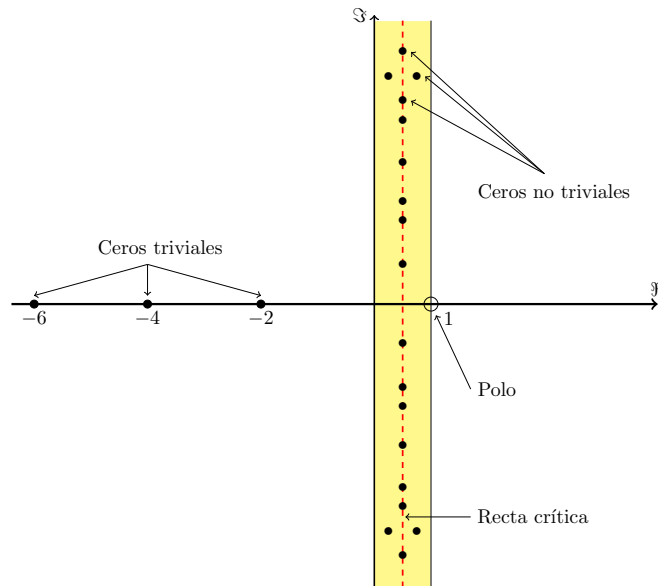


Figura 2.3: La banda crítica

ha logrado verificar que la hipótesis de Riemann es verdadera hasta una altura de 3×10^{12} (Platt and Trudgian, 2020)

Teorema 7 (D. Platt and T. Trudgian, 21 abril 2020). *La hipótesis de Riemann es verdadera hasta una altura de 3×10^{12} . Es decir, todos los ceros $\sigma + it$ no triviales de la función zeta de Riemann con $0 < t < 3 \times 10^{12}$, satisfacen que $\sigma = \frac{1}{2}$.*

En el cálculo de los valores de $\zeta(s)$, históricamente el más conocido, es el valor de zeta en 2 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ resultado debido a Leonhard Euler, conocido como el problema de Basilea². Un resultado más actual de Roger Apéry en el año 1979 dice que $\zeta(3)$ es irracional (Van der Poorten and Apéry, 1979). Sobre los valores de la función zeta en los demás impares $\zeta(2n+1)$ se sabe que son reales, pero no sabemos aún, si son racionales o irracionales (Sprang, 2018).

2.1.3. La función eta de Dirichlet

Una serie de Dirichlet notable, que se relaciona con la función zeta de Riemann, es la *función eta*, definida por

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \Re(s) > 0 \quad (2.20)$$

En particular, para $\Re(s) > 1$

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \eta(s) \quad (2.21)$$

Definición 4. La función eta $\eta(s)$ está definida como la prolongación analítica a todo el plano complejo de la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ con $\Re(s) > 0$.

Como el factor $(1 - 2^{1-s})$ en la ecuación 2.21 tiene un cero simple en 1, que anula al polo simple de $\zeta(s)$, la función eta es una función entera.

De acuerdo a (Sondow, 2003), si $\eta_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ en $\Re(s) > 0$, entonces

$$\eta_{2N}(s) - \zeta_{2N}(s) = \sum_{n=1}^{2N} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^s} \right] = \sum_{k=1}^N \frac{-2}{(2k)^s} = -2^{1-s} \zeta_N(s) = -2^{1-s} \left(\zeta_{2N}(s) - \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n^s} \right)$$

de donde

$$\eta_{2N}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta_{2N}(s) + 2^{1-s} \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s} \quad (2.22)$$

Ahora $\sum_{k=N+1}^{2N} k^{-s} = \sum_{k=1}^N (k+N)^{-s} = N^{1-s} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N}\right)^{-s} \cdot \frac{1}{N}$, y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N}\right)^{-s} \cdot \frac{1}{N} = \int_0^1 (1+x)^{-s} dx = \begin{cases} \frac{1 - 2^{1-s}}{s-1} & , \quad s \neq 1 \\ \log(2) & , \quad s = 1 \end{cases}$$

²Lugar de nacimiento de Euler

Si $d_N(s) = \int_0^1 (1+x)^{-s} dx - \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N}\right)^{-s} \cdot \frac{1}{N}$, entonces $d_N(s) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, y

$$\sum_{k=N+1}^{2N} k^{-s} = N^{1-s} \left[\int_0^1 (1+x)^{-s} dx - d_N(s) \right] \quad (2.23)$$

Reemplazando (2.23) en (2.22)

$$\eta_{2N}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta_{2N}(s) + 2^{1-s} N^{1-s} \left[\int_0^1 (1+x)^{-s} dx - d_N(s) \right] \quad (2.24)$$

En particular $\eta_{2N}(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - d_N(1) = \log(2) - d_N(1)$, así tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, $\eta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$. Ahora para $s = 1 + it$ con $t \neq 0$, la ecuación (2.24) se transforma en

$$\eta_{2N}(1 + it) = (1 - 2^{-it})\zeta_{2N}(1 + it) + 2^{-it} N^{-it} \left[\frac{1 - 2^{-it}}{it} - d_N(1 + it) \right]$$

si elegimos $t \neq 0$ tal que $2^{it} = 1$, esto es $t = \frac{2k\pi}{\log(2)}$ con k entero no nulo

$$\eta_{2N}(1 + it) = -N^{-it} d_N(1 + it) \quad (2.25)$$

finalmente, tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$ en (2.25)

$$\eta(1 + it) = 0, \quad t = \frac{2k\pi}{\log(2)}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (2.26)$$

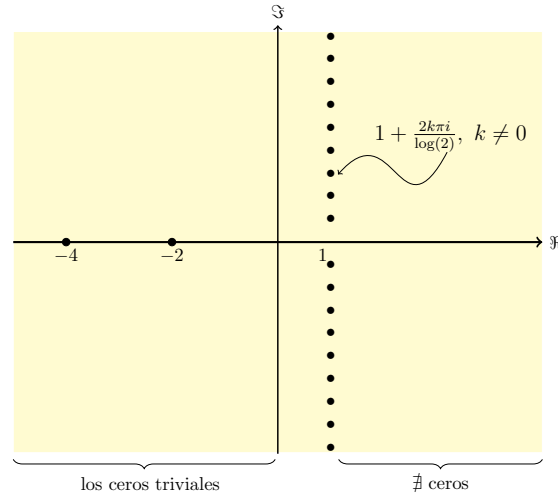


Figura 2.4: Ceros de η en $\Re(s) = 1$

2.1.4. Funciones casi periódicas

La noción de casi periodicidad inicialmente es seguida del artículo (Hernández, 2009), y para algunos resultados seguimos del trabajo original de (Bohr, 1947), la idea es acopiar y desarrollar algunas propiedades de la casi periodicidad indispensable en este trabajo.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Un número real $T = T_f(\varepsilon)$ es un *casi-periodo de f* asociado a $\varepsilon > 0$, si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x + T) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es *relativamente denso* en \mathbb{R} , si existe $l > 0$ tal que, todo intervalo de longitud l posee algún elemento de A , es decir

$$\exists l > 0 / \forall a \in \mathbb{R} \quad \langle a; a + l \rangle \cap A \neq \emptyset$$

Definición 5. Se dice que la función continua f es casi-periódica, si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto de los casi-periodos de f asociado a ε , es relativamente denso en \mathbb{R} , es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l = l(\varepsilon) > 0 / \forall a \in \mathbb{R} \quad \langle a; a + l \rangle \cap \{T_f(\varepsilon)\} \neq \emptyset$$

Ejemplo 1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función periódica y continua con periodo fundamental T , para cualquier m natural $f(x + mT) - f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego tomando $l > T$, se tiene que para cualquier intervalo I de longitud l existe n_0 tal que $n_0T \in I$, y n_0T es un casi-periodo de f asociado a cualquier $\varepsilon > 0$. Por tanto, f es casi-periódica.

Ejemplo 2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función casi-periódica, $c \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\bar{f}, \quad |f|, \quad f(x + c) \quad \text{y} \quad \lambda f$$

también son casi-periódicas. En efecto, considerando $T = T_f(\varepsilon)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\bar{f}(x + T) - \bar{f}(x)| = |f(x + T) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$||f(x + T)| - |f(x)|| \leq |f(x + T) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$|f(x + c + T) - f(x + c)| < \varepsilon$$

y considerando $T = T_f\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}\right)$

$$|\lambda f(x + T) - \lambda f(x)| \leq |\lambda| |f(x + T) - f(x)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} < \varepsilon$$

Proposición 4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es casi-periódica, entonces f está acotada.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, por la hipótesis existe $l > 0$ tal que todo intervalo de longitud l contiene un casi-periodo asociado a $\varepsilon = 1$, en particular si $-x < T < -x + l$ entonces $0 < x + T < l$; y para $K = \sup_{0 \leq r \leq l} |f(r)|$

$$|f(x)| \leq |f(x + T) - f(x)| + |f(x + T)| \leq 1 + K, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

□

Corolario 2. Si f es casi-periódica, también lo es f^2

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como

$$|f^2(x + T) - f^2(x)| \leq 2M|f(x + T) - f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

el resultado termina, eligiendo $T = T_f\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$

□

Corolario 3. Si f es casi-periódica y existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \geq c$ para todo x real, entonces $\frac{1}{f}$ es casi-periódica.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ y $T = T_f(c^2\varepsilon)$

$$\left| \frac{1}{f(x + T)} - \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{c^2} |f(x + T) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

□

Proposición 5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es casi-periódica, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $l > 0$ tal que todo intervalo de longitud l contiene un casi-periodo de f asociado a $\frac{\varepsilon}{3}$. Como f es uniformemente continua en $[-1; 1 + l]$, $\exists \delta > 0$ y $\delta < 1$ tal que

$$s, t \in [-1, 1 + l], \quad |s - t| < \delta \rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sea $x, y \in \mathbb{R} / |x - y| < \delta$ y sea $T = T_f(\frac{\varepsilon}{3})$ tal que $-x \leq T \leq -x + l$, entonces

$$0 \leq x + T \leq l \quad \text{y} \quad -1 < y + T < 1 + l$$

también $|f(x + T) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x + T)| + |f(x + T) - f(y + T)| + |f(y + T) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |f(x + T) - f(y + T)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Finalmente observando que $x + T, y + T \in [-1; 1 + l]$ y $|(x + T) - (y + T)| = |x - y| < \delta$, se tiene que $|f(x + T) - f(y + T)| < \frac{\varepsilon}{3}$, de donde se concluye la demostración. □

La demostración de la siguiente proposición, se puede ver en (Bohr, 1947, p. 40).

Proposición 6. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones casi-periódicas, entonces $f + g$ también es casi-periódica.

De otro lado, considerando que $fg = \frac{1}{4} \left\{ (f + g)^2 - (f - g)^2 \right\}$ y el corolario 2, vemos que el producto de dos funciones casi-periódicas, también es casi-periódica.

Ejemplo 3. Para $(\lambda_k)_k$ sucesión de números reales no nulos, la función

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$$

es casi-periódica, ya que la correspondencia $x \mapsto e^{i\lambda_k x}$ es periódica, con periodo $T_k = \frac{2k\pi}{|\lambda_k|}$.

Ejemplo 4. La función $f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}$ es casi-periódica, pero no es periódica. De lo contrario existiría $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo x real, entonces

$$(e^{iT} - 1)e^{ix} + (e^{i\pi T} - 1)e^{i\pi x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y como $\{e^{ix}; e^{i\pi x}\}$ es \mathbb{C} -linealmente independiente, $T = 2n\pi = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, es decir $\pi = \frac{m}{n}$, lo que evidentemente es un absurdo.

Proposición 7. Sean $(f_n)_n$ una sucesión de funciones casi-periódicas de \mathbb{R} en \mathbb{C} . Si f_n converge uniformemente a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces f es casi-periódica.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme

$$\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y como f_N es casi-periódica, considerando $T = T_{f_N}(\frac{\varepsilon}{3})$, vemos que

$$|f_N(x + T) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, para todo x real

$$\begin{aligned} |f(x + T) - f(x)| &< |f(x + T) - f_N(x + T)| + |f_N(x + T) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x + T) - f_N(x)| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

En particular, si la serie $\sum_{k \geq 1} a_k e^{i\lambda_k x}$ converge uniformemente sobre todo \mathbb{R} , la función $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x}$ es casi-periódica.

Teorema 8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función casi-periódica y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, entonces F está acotada si y solo si f es casi-periódica.

Demostración. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (si $f = f_1 + if_2$ entonces $F(x) = \int_0^x f_1(t)dt + i \int_0^x f_2(t)dt = F_1(x) + iF_2(x)$). Por hipótesis F está acotada, luego existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) \quad , \quad M = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$$

Dado $\eta > 0$ existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq F(x_1) < m + \eta \quad \text{y} \quad M - \eta < F(x_2) \leq M$$

Dado $\varepsilon_1 > 0$, sea $l = l(\varepsilon_1) > 0$ tal que todo intervalo de longitud l contenga un casi-periodo $T_1 = T_f(\varepsilon_1)$, entonces

$$\left| \int_{x_1+T_1}^{x_2+T_1} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t+T_1) - f(t)|dt < \varepsilon_1 |x_2 - x_1|$$

es decir

$$|F(x_2 + T_1) - F(x_1 + T_1) - F(x_2) + F(x_1)| < \varepsilon_1 |x_2 - x_1|$$

de donde, denotando por $d = |x_2 - x_1|$

$$m \leq F(x_1 + T_1) < m + 2\eta + \varepsilon_1 d \tag{2.27}$$

Dado $\varepsilon_2 > 0$, sea $L = L(\varepsilon_2) > 0$ tal que todo intervalo de longitud L contenga un casi-periodo $T_2 = T_f(\varepsilon_2)$. Como

$$|f(x + T_1 + T_2) - f(x)| \leq |f(x + T_1 + T_2) - f(x + T_1)| + |f(x + T_1) - f(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$T_1 + T_2 = T_f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. De donde por (2.27) intercambiando T_1 por $T_1 + T_2$, y ε_1 por $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$$m \leq F(x_1 + T_1 + T_2) < m + 2\eta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d \tag{2.28}$$

Ahora para $x \in \mathbb{R}$ y $T_1 = T_f(\varepsilon_1)$ tal que $x - x_1 < T_1 < x - x_1 + l$, por tanto $0 < x_1 + T_1 - x < l$ y como

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T_2} f(t)dt &= \int_x^{x_1+T_1} f(t)dt + \int_{x_1+T_1}^{x_1+T_1+T_2} f(t)dt + \int_{x_1+T_1+T_2}^{x+T_2} f(t)dt \\ &= \int_x^{x_1+T_1} f(t)dt + \int_{x_1+T_1}^{x_1+T_1+T_2} f(t)dt + \int_{x_1+T_1}^x f(t+T_2)dt \end{aligned}$$

$$\int_x^{x+T_2} f(t)dt = \int_{x_1+T_1}^{x_1+T_1+T_2} f(t)dt + \int_x^{x_1+T_1} (f(t) - f(t+T_2))dt \quad (2.29)$$

además usando (2.27) y (2.28)

$$\left| \int_{x_1+T_1}^{x_1+T_1+T_2} f(t)dt \right| = |F(x_1 + T_1 + T_2) - F(x_1 + T_1)| < 2\eta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d$$

y

$$\left| \int_x^{x_1+T_1} (f(t) - f(t+T_2))dt \right| \leq \int_x^{x_1+T_1} |f(t+T_2) - f(t)|dt < \varepsilon_2(x_1 + T_1 - x) < \varepsilon_2 l$$

Ahora usando (2.29) y las dos desigualdades anteriores, tenemos que

$$|F(x+T_2) - F(x)| = \left| \int_0^{x+T_2} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+T_2} f(t)dt \right| < 2\eta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d + \varepsilon_2 l$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, eligiendo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{6d}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(d+l)}$ y $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$, concluimos que, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|F(x+T_2) - F(x)| < 2 \left(\frac{\varepsilon}{6} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{6d} + \frac{\varepsilon}{2(d+l)} \right) d + \frac{\varepsilon}{2(d+l)} l = \varepsilon$$

Así, la función F es casi-periódica, como se quería demostrar \square

Lema 2. Sea f una función casi periódica, $T > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Si $l = l(\varepsilon)$ y $\tau = \tau_f \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \in \langle \alpha; \alpha + l \rangle$, entonces

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T} \quad (2.30)$$

Demostración. Como

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f = \int_\alpha^\tau f + \int_\tau^{\tau+T} f - \int_{\alpha+T}^{\tau+T} f$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f \right| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_\alpha^\tau f - \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f + \frac{1}{T} \int_{\alpha+T}^{\tau+T} f \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x+\tau)dx \right| + \frac{2\|f\|(\tau-\alpha)}{T} \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x+\tau) - f(x)|dx + \frac{2\|f\|l}{T} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T}$$

\square

Lema 3. Sea f una función casi periódica, $T > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Si $l = l(\varepsilon)$ y $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \langle \alpha; \alpha + l \rangle$, entonces

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.31)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{n}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_0^{nT} f \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \frac{n}{T} \int_0^T f - \left(\frac{1}{T} \int_0^T f + \frac{1}{T} \int_T^{2T} f + \cdots + \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} f \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} f \right| \end{aligned}$$

y usando la ecuación (2.30)

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f \right| < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T}$$

□

Teorema 9 (existencia del valor medio). Si f es una función casi periódica, entonces

$$\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \right) \in \mathbb{C}$$

Demostración. Sea $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ tal que $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{T_1}{n_2} = \frac{T_2}{n_1}$, o bien $n_1 T_1 = n_2 T_2$.

Por el lema (3)

$$\left| \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f - \frac{1}{n_i T_i} \int_0^{n_i T_i} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|l}{T_i} \quad (i = 1, 2)$$

de donde

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f \right| \leq \left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f - \frac{1}{n_1 T_1} \int_0^{n_1 T_1} f \right| + \left| \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f - \frac{1}{n_2 T_2} \int_0^{n_2 T_2} f \right|$$

por tanto

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f \right| < \varepsilon + 2\|f\|l \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

Si escogemos $T_0 = \frac{4l\|f\|}{\varepsilon}$, para $T_1 > T_0$ y $T_2 > T_0$

$$2\|f\|l \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) < 2\|f\|l \left(\frac{2}{T_0} \right) < 2\|f\|l \left(\frac{2\varepsilon}{4l\|f\|} \right) = \varepsilon$$

así

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_0 > 0 / T_1 > T_0, T_2 > T_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f \right| < 2\varepsilon$$

Por lo tanto $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \in \mathbb{C}$

□

Ahora para cada función casi periódica f denotamos

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \quad (2.32)$$

por la linealidad de la integración y de los límites, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y f, g son funciones casi periódicas:

1. $M(\alpha f) = \alpha M(f)$
2. $M(f + g) = M(f) + M(g)$

es decir $M : \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}$ es una \mathbb{C} -transformación lineal³

En particular, dada una función casi periódica f , escribiendo $f = f_1 + if_2$ donde $f_1 = \Re(f)$ y $f_2 = \Im(f)$

$$\begin{aligned} M(f) &= M(f_1 + if_2) = M(f_1) + iM(f_2) \\ M(\bar{f}) &= M(f_1 - if_2) = M(f_1) - iM(f_2) \end{aligned}$$

de donde

$$M(\bar{f}) = \overline{M(f)} \quad (2.33)$$

Proposición 8. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones casi periódicas. Si f_n converge uniformemente a f sobre \mathbb{R} , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} M(f_n) = M(f)$

Demostración.

$$M(f_n) - M(f) = M(f_n - f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_n - f)(x) dx$$

entonces

$$|M(f_n) - M(f)| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|f_n - f\| dx = \|f_n - f\|$$

y por la hipótesis, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} M(f_n) = M(f)$. □

Ahora demostraremos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f \quad (2.34)$$

En efecto: Como

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f = \frac{1}{T} \int_a^0 f + \frac{1}{T} \int_0^T f + \frac{1}{T} \int_T^{a+T} f$$

³ $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ es el conjunto de las funciones casi periódicas

y teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{1}{T} \int_a^0 f \right| \leq \frac{1}{T} \|f\| |a|, \quad \left| \frac{1}{T} \int_T^{a+T} f \right| \leq \frac{1}{T} \|f\| |a| \quad \text{y} \quad T \rightarrow \infty$$

concluimos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f = M(f).$$

Además

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+a) dx$$

es decir

$$M(f(x)) = M(f(x+a)) \quad (2.35)$$

De otro lado, si para cada par de funciones casi periódicas f, g definimos

$$\langle f, g \rangle = M(f\bar{g}) \quad (2.36)$$

demostraremos que \langle, \rangle es un producto interno sobre \mathcal{C}_p . En efecto:

1. Sean f, g, h funciones casi periódicas y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = M((\alpha f + \beta g)\bar{h}) = \alpha M(f\bar{h}) + \beta M(g\bar{h}) = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

en la segunda igualdad se ha usado la linealidad de M .

2. Sean f, g funciones casi periódicas

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{M(g\bar{f})} = M(\overline{g\bar{f}}) = M(\bar{g}f) = M(f\bar{g}) = \langle f, g \rangle$$

en la segunda igualdad se ha usado (2.33)

3. Por la segunda parte $\overline{\langle f, f \rangle} = \langle f, f \rangle$, entonces $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$, y

$$\langle f, f \rangle = M(f\bar{f}) = M(|f|^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx \geq 0$$

finalmente si $\langle f, f \rangle = 0$, se infiere que $f = 0$

Ejemplo 5. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\langle e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x} \rangle = M(e^{i\lambda_1 x} \cdot e^{-i\lambda_2 x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)T} - 1}{i(\lambda_1 - \lambda_2)T} & , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 & , \quad \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

es decir,

$$\langle e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x} \rangle = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

Definición 6 (La transformada de Bohr). Para cada función casi periódica f definimos la aplicación $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$a(\lambda) = \langle f(x), e^{i\lambda x} \rangle$$

y su espectro como $\text{spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} / a(\lambda) \neq 0\}$

En lo que sigue demostraremos que el espectro de cada función casi periódica es un conjunto numerable, antes la siguiente

Proposición 9. Sea f una función casi periódica, $(c_n)_{n=1}^N \subset \mathbb{C}$ y $(\lambda_n)_{n=1}^N \subset \mathbb{R}$ números reales distintos, entonces⁴

$$\left\| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \right\|_B^2 = \|f(x)\|_B^2 - \sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - a(\lambda_n)|^2 \quad (2.37)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \right\|_B^2 &= \left\langle f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x}, f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \right\rangle \\ &= \|f(x)\|_B^2 - \left\langle f(x), \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x}, f(x) \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x}, \sum_{m=1}^N c_m e^{i\lambda_m x} \right\rangle \\ &= \|f(x)\|_B^2 - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} \langle f(x), e^{i\lambda_n x} \rangle - \sum_{n=1}^N c_n \langle e^{i\lambda_n x}, f(x) \rangle + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n \overline{c_m} \langle e^{i\lambda_n x}, e^{i\lambda_m x} \rangle \\ &= \|f(x)\|_B^2 - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} a(\lambda_n) - \sum_{n=1}^N c_n \overline{a(\lambda_n)} + \sum_{n=1}^N |c_n|^2, \quad \delta_{nm} = \langle e^{i\lambda_n x}, e^{i\lambda_m x} \rangle \\ &= \|f(x)\|_B^2 + \sum_{n=1}^N (c_n - a(\lambda_n))(\overline{c_n} - \overline{a(\lambda_n)}) - \sum_{n=1}^N a(\lambda_n) \overline{a(\lambda_n)} \\ &= \|f(x)\|_B^2 - \sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - a(\lambda_n)|^2 \end{aligned}$$

□

En particular, si en la ecuación (2.37) elegimos $c_n = a(\lambda_n)$

$$\left\| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \right\|_B^2 = \|f(x)\|_B^2 - \sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 \leq \|f(x)\|_B^2 \quad (2.38)$$

⁴ $\|f\|_B = \langle f, f \rangle$ es la norma de Bohr

Teorema 10. Si f es una función casi periódica, entonces

$$\text{spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} / a(\lambda) \neq 0\}$$

es un conjunto numerable.

Demostración. Si tomamos una sucesión $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ de elementos distintos, para cada N natural fijo, por (2.38) $\sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 \leq \|f(x)\|_B^2$; de donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2$ es convergente.

- $B_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} / |a(\lambda)| > 1\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}\}$, de lo contrario existiría $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\} \subset B_1$ tal que $|a(\lambda_k)|^2 > 1$, lo que indica que la serie $\sum_{n \geq 1} |a(\lambda_n)|^2$ sería divergente, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} |a(\lambda_n)| \neq 0$.
- $B_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} / 1 \geq |a(\lambda)| > \frac{1}{2}\} = \{\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_{n_2}\}$, de lo contrario existiría $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\} \subset B_2$ tal que $|a(\lambda_k)|^2 > \frac{1}{4}$, y como la serie $\sum_{n \geq 1} |a(\lambda_n)|^2$ es convergente, $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |a(\lambda_n)|^2 \geq \frac{1}{4}$ (¡absurdo!).
- Procediendo inductivamente $B_m = \{\lambda \in \mathbb{R} / \frac{1}{m-1} \geq |a(\lambda)| > \frac{1}{m}\}$ es finito, para todo m natural.

y como $\text{spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} / a(\lambda) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, se concluye que $\text{spec}(f)$ es numerable. \square

Definición 7. Sea f una función casi periódica, si $\text{spec}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$ se llama *serie de Fourier asociada a la función casi periódica f* , y lo denota-

mos por $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$

Así, de la ecuación (2.38) obtenemos la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2 \leq \|f(x)\|_B^2 \quad (2.39)$$

Una función f analítica en la banda vertical

$$\Omega = \{\sigma + it \in \mathbb{C} / \alpha < \sigma < \beta, t \in \mathbb{R}\} = \langle \alpha; \beta \rangle \times \mathbb{R}$$

$(-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty)$ es llamada casi periódica en Ω , si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $l = l(\varepsilon) > 0$ tal que cada intervalo $t_0 < t < t_0 + l$ de longitud l , contiene un número real τ satisfaciendo

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall s \in \Omega$$

esta definición implica que, para cada $\sigma \in \langle \alpha; \beta \rangle$ fijo, la función $h_\sigma(t) := f(\sigma + it)$ es casi periódica, en la variable real t .

2.1.5. Teorema de equivalencia de Bohr

Presentamos aquí los fundamentos de las series de Dirichlet, para entender la equivalencia de esta series, noción introducida por el matemático Danés Harald Bohr (22 Abril 1887 – 22 enero 1951). La presentación que seguimos en esta sección es de T. Apostol (Apostol, 2012, §8.3).

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$, se llama *serie general de Dirichlet*, si la sucesión de exponentes $\Lambda = \{\lambda_n\}_n$ es una sucesión de números reales no negativos estrictamente creciente tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por ejemplo, si $\lambda_n = \log(n)$, obtenemos la serie ordinaria de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. El número

$$\sigma_a = \limsup \frac{\log \sum_{k=1}^n |a_k|}{\lambda_n}$$

es la *abscisa de convergencia absoluta*, es decir, la serie de Dirichlet converge absolutamente para todo s tal que $\Re(s) > \sigma_a$, y diverge para todo s tal que $\Re(s) < \sigma_a$.

Definición 8. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ una serie de Dirichlet. Se dice que la sucesión de números reales $B = \{\beta_n\}_n$ es una base de la sucesión de exponentes $\Lambda = \{\lambda_n\}_n$, si:

1. B es \mathbb{Q} -linealmente independiente⁵
2. $\Lambda \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{Q}}$
3. $B \subseteq \langle \Lambda \rangle_{\mathbb{Q}}$

Por ejemplo, $B = \{\log p_n\}_n$ donde p_n es el n -ésimo primo positivo, es una base de la sucesión de exponentes de la serie ordinaria de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$.

Frecuentemente, usaremos la siguiente notación

$$\Lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \dots]^T \quad \text{y} \quad B = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots]^T$$

Definición 9 (Matriz de Bohr). El arreglo $[r_{ij}]$ con $r_{ij} \in \mathbb{Q}$ para todo $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se llama *matriz de Bohr*, si los elementos de una fila son ceros salvo un número finito de ellos.

⁵ $\langle X \rangle_{\mathbb{Q}}$ es el \mathbb{Q} -espacio vectorial generado por X

Usando este concepto, la definición de base se reescribe así. B es una base de Λ si:

1. Si $SB = 0$ para alguna matriz de Bohr S , entonces $S = 0$
2. Existe una matriz de Bohr R tal que $\Lambda = RB$
3. Existe una matriz de Bohr T tal que $B = T\Lambda$

Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ una serie de Dirichlet y sea $B = \{\beta_n\}$ una base de $\Lambda = \{\lambda_n\}$. Entonces $\Lambda = RB$ para alguna matriz de Bohr $R = [r_{i,j}]$, luego para cada $\lambda_n \in \Lambda$ existe $q_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{q_n} r_{n,k} \beta_k = r_{n,1} \beta_1 + r_{n,2} \beta_2 + \cdots + r_{n,q_n} \beta_{q_n} \quad \text{con } r_{n,k} \in \mathbb{Q}$$

Definición 10. Con las notaciones precedentes, la función F definida por

$$F(z_1, z_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(r_{n,1}z_1 + r_{n,2}z_2 + \cdots + r_{n,q_n}z_{q_n})}$$

se llama *función de Bohr asociada a la serie de Dirichlet $f(s)$ relativa a la base B* .

Si denotamos $Z = [z_1, z_2, \dots]^T$, podemos reescribir la función de Bohr, así

$$F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(RZ)_n}$$

En particular, para $Z = sB$ con $s \in \mathbb{C}$, $RZ = sRB = s\Lambda$, luego $(RZ)_n = (s\Lambda)_n = s\lambda_n$. Así

$$F(sB) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(RZ)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} = f(s)$$

Por lo tanto, la serie de Dirichlet $f(s)$ se recupera de la función de Bohr $F(Z)$, mediante una elección adecuada de las variables z_1, z_2, z_3, \dots

Si la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} = f(s)$ converge absolutamente para algún $s_0 = \sigma_0 + it_0$, y B es una base de $\Lambda = \{\lambda_n\}$, el conjunto $\{F(Z) / \Re(Z) = \sigma_0 B\}$ depende de la base (Apostol, 2020, Theorem 8.8), y será denotado como

$$U_f(\sigma_0) = \{F(Z) / \Re(Z) = \sigma_0 B\} \tag{2.40}$$

Si la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ converge absolutamente a $f(s)$ cuando $\Re(s) = \sigma_0$, el conjunto de valores que toma la serie de Dirichlet $f(s)$ sobre la recta vertical $\sigma = \sigma_0$ será denotado por $V_f(\sigma_0)$, esto es

$$V_f(\sigma_0) = \{f(s) / \Re(s) = \sigma_0\} \tag{2.41}$$

Ahora, si $y \in V_f(\sigma_0)$, entonces $y = f(s)$ con $s = \sigma_0 + it$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Sea B una base de Λ y R la matriz de Bohr tal que $\Lambda = RB$. Eligiendo $Z = sB$

$$\Re(Z) = \sigma_0 B \quad \text{y} \quad F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(RZ)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s(RB)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} = f(s)$$

entonces $y = F(Z)$ y $\Re(Z) = \sigma_0 B$, así $y \in U_f(\sigma_0)$, lo que demuestra que $V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0)$. Más aún, por (Apostol, 2020, Theorem 8.9)

$$V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)} \quad (2.42)$$

Definición 11 (Series de Dirichlet equivalentes). Dadas dos series generales de Dirichlet con la misma sucesión de exponentes $\Lambda = \{\lambda_n\}_n$ y fijada una base B de Λ

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$$

Se dice que $f(s)$ y $g(s)$ son equivalentes y lo denotamos por $f(s) \sim g(s)$, si existe $Y = (y_n)_n$ sucesión de números reales, tal que

$$b_n = a_n e^{i(RY)_n}$$

donde R es la matriz de Bohr para el cual $\Lambda = RB$.

En (Apostol, 2020, Theorem 8.10 y 8.11) se demuestran que: dos series de Dirichlet equivalentes tienen la misma abscisa de convergencia absoluta σ_a , que esta relación independe de la elección de la base B , y que la relación \sim es efectivamente una relación de equivalencia.

También, por (Apostol, 2020, Theorem 8.12), las series ordinarias de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

son equivalentes si, y solo si, existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ completamente multiplicativa⁶ tal que:

1. $b_n = f(n)a_n$
2. $|f(p)| = 1$, cuando $a_n \neq 0$ y p primo tal que $p|n$

⁶ i.e) $f(mn) = f(m)f(n) \forall m, n \in \mathbb{N}$ y $f(1) = 1$

Ahora, si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} \sim g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$, existe $Y = (y_n)_n$ sucesión de números reales, tal que

$$b_n = a_n e^{-i(RY)_n}, \text{ donde } R \text{ es la matriz de Bohr para el cual } \Lambda = RB.$$

y como

$$G(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(RZ)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-i(RY)_n}) e^{-(RZ)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(R(Z+iY))_n}$$

$\Re(Z+iY) = \Re(Z) = \sigma_0 B$. Esto nos permite concluir que, si $f(s) \sim g(s)$ convergen absolutamente en $\sigma = \sigma_0$, entonces

$$U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0) \quad (2.43)$$

De otro lado, dada una serie de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ con abscisa de convergencia absoluta σ_a . Para $\sigma_0 > \sigma_a$ y $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$, el conjunto de valores tomados por f en una vecindad de la recta vertical $\sigma = \sigma_0$, es el conjunto de valores de f en la banda vertical $\langle \sigma_0 - \delta; \sigma_0 + \delta \rangle \times \mathbb{R}$, esto es

$$W_f(\sigma_0; \delta) = \{ f(s) / \sigma_0 - \delta < \Re(s) < \sigma_0 + \delta, t \in \mathbb{R} \}$$

Definimos ahora

$$W_f(\sigma_0) = \bigcap_{\delta} W_f(\sigma_0; \delta) \quad (2.44)$$

donde $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$. Claramente $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$; y en (Apostol, 2020, Theorem 8.14) se demuestra que

$$V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)} \quad (2.45)$$

Lema 4 (Principio de selección de Helly). *Si $(\theta_{m,n})_{m,n}$ es una sucesión doble y acotada de números reales, entonces existe una subsucesión de enteros $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tal que $n_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$; y existe una sucesión $(r_m)_m$ de números reales tal que para cada natural m*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{m, n_k} = r_m$$

Demostración. .

Como $(\theta_{1,n})_n$ está acotada, existe $(\theta_{1, n_k^{(1)}})_k \subset (\theta_{1,n})_n$ convergente, digamos $\theta_{1, n_k^{(1)}} \rightarrow r_1$ y siendo $(\theta_{2, n_k^{(1)}})_k$ acotada, existe $(\theta_{2, n_k^{(2)}})_k \subset (\theta_{2, n_k^{(1)}})_k$ convergente, digamos $\theta_{2, n_k^{(2)}} \rightarrow r_2$ análogamente $(\theta_{3, n_k^{(2)}})_k$ acotada, existe $(\theta_{3, n_k^{(3)}})_k \subset (\theta_{2, n_k^{(2)}})_k$ convergente, digamos $\theta_{3, n_k^{(3)}} \rightarrow r_3$. Así inductivamente, para cada m natural, existe r_m real y existe $(\theta_{m, n_k^{(m)}})_k \subset$

$(\theta_{m,n_k^{(m-1)}})_k$ convergente, tal que $\theta_{m,n_k^{(m)}} \rightarrow r_m$. Ahora considerando $(\theta_{m,n_k^{(k)}})_{m,r}$, observamos que

$$\begin{array}{ccccccccc} \theta_{1,n_1^{(1)}} & \theta_{1,n_2^{(1)}} & \theta_{1,n_3^{(1)}} & \theta_{1,n_4^{(1)}} & \dots & \longrightarrow & r_1 \\ \cancel{\theta_{2,n_1^{(2)}}} & \theta_{2,n_2^{(2)}} & \theta_{2,n_3^{(2)}} & \theta_{2,n_4^{(2)}} & \dots & \longrightarrow & r_2 \\ \cancel{\theta_{3,n_1^{(3)}}} & \cancel{\theta_{3,n_2^{(3)}}} & \theta_{3,n_3^{(3)}} & \theta_{3,n_4^{(3)}} & \dots & \longrightarrow & r_3 \\ \cancel{\theta_{4,n_1^{(4)}}} & \cancel{\theta_{4,n_2^{(4)}}} & \cancel{\theta_{4,n_3^{(4)}}} & \theta_{4,n_4^{(4)}} & \dots & \longrightarrow & r_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Por tanto, si $n_k = n_k^{(k)}$, tenemos que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ y $n_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Así, existe $(r_m)_m$ sucesión de números reales tal que, para cada natural m , $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{m,n_k} = r_m$ \square

Haciendo uso del teorema de Rouché (Gamelin, 2003, Theorem p.229) y del principio de selección de Helly, se demuestra que (Apostol, 2020, Theorem 8.15)

$$W_f(\sigma_0) = \overline{V_f(\sigma_0)} \quad (2.46)$$

Llegamos así al principal resultado de esta sección, el teorema de equivalencia de Bohr, cuya demostración la exponemos.

Teorema 11 (de equivalencia de Bohr). *Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ y $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$ son series de Dirichlet equivalentes con abscisa de convergencia absoluta σ_a , entonces en cualquier semiplano abierto $\sigma > \sigma_1$ ($\sigma_1 \geq \sigma_a$), f y g toman el mismo conjunto de valores.*

Demostración. Sea $S_f(\sigma_1) = \{f(s)/\sigma = \Re(s) > \sigma_1\}$, entonces $S_f(\sigma_1) = \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} V_f(\sigma_0)$
Como $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$, entonces $\bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} V_f(\sigma_0) \subseteq \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0)$, es decir

$$S_f(\sigma_1) \subseteq \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0) \quad (2.47)$$

Recíprocamente, sea $w \in \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0)$, entonces $w \in W_f(\sigma_0)$ para algún $\sigma_0 > \sigma_1$, es decir $w \in \bigcap_{0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a} W_f(\sigma_0; \delta)$ para algún $\sigma_0 > \sigma_1$, así $w \in W_f(\sigma_0; \delta)$ para todo δ tal que $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ y algún $\sigma_0 > \sigma_1$. Esto es

$$w = f(s) / \forall s, \sigma_0 - \delta < \Re(s) < \sigma_0 + \delta, \forall \delta \in \langle 0; \sigma_0 - \sigma_a \rangle \text{ y algún } \sigma_0 > \sigma_1.$$

En particular, para $\delta = \sigma_0 - \sigma_1$ (por tanto $\sigma_1 = \sigma_0 - \delta$). Así $w = f(s)$ para algún s con $\Re(s) = \sigma > \sigma_1$. Por lo tanto, $w \in S_f(\sigma_1) = \{f(s)/\sigma = \Re(s) > \sigma_1\}$, lo que demuestra que

$$\bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0) \subseteq S_f(\sigma_1) \quad (2.48)$$

Por lo tanto,, de (2.47) y (2.48)

$$S_f(\sigma_1) = \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0) \quad (2.49)$$

Ahora como $f(s) \sim g(s)$, y ambas convergen absolutamente en σ_0 ($\sigma_0 > \sigma_1 \geq \sigma_a$) de acuerdo a 2.43 $U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0)$. Además por la ecuación (2.42) $V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)}$, de donde

$$\overline{U_f(\sigma_0)} = \overline{V_f(\sigma_0)}$$

Análogamente $\overline{U_g(\sigma_0)} = \overline{V_g(\sigma_0)}$, así $\overline{V_f(\sigma_0)} = \overline{V_g(\sigma_0)}$. Además, de la ecuación (2.46) que es consecuencia del teorema de Rouché y el principio de selección de Helly $W_f(\sigma_0) = \overline{V_f(\sigma_0)}$ y $W_g(\sigma_0) = \overline{V_g(\sigma_0)}$, en consecuencia

$$W_f(\sigma_0) = W_g(\sigma_0) \quad \forall \sigma_0 > \sigma_1$$

o bien,

$$\bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0) = \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_g(\sigma_0)$$

Por tanto, de la ecuación (2.49) se concluye que $S_f(\sigma_1) = S_g(\sigma_1)$ □

Teorema 12 (de equivalencia de Bohr de bandas). *Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ y $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$ son series de Dirichlet equivalentes con abscisa de convergencia absoluta σ_a , entonces en cualquier banda vertical $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ($\sigma_1 \geq \sigma_a$), f y g toman el mismo conjunto de valores.*

Demostración. Sea $S_f = \{f(s) / \sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2\}$, entonces $S_f = \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} V_f(\sigma_0)$

Como $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$, entonces $\bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} V_f(\sigma_0) \subseteq \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0)$, es decir

$$S_f \subseteq \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0)$$

Recíprocamente, sea $w \in \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0)$, entonces $w \in W_f(\sigma_0)$ para algún σ_0 tal que $\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2$, luego $w \in \bigcap_{0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a} W_f(\sigma_0; \delta)$, es decir $w \in W_f(\sigma_0; \delta)$ para todo δ tal que $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ y algún $\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2$. Así

$$w = f(s) / \sigma_0 - \delta < \Re(s) < \sigma_0 + \delta, \quad \forall 0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a \text{ y algún } \sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2.$$

En particular, para $\delta = \min\{\sigma_0 - \sigma_1; \sigma_2 - \sigma_0\}$ (por tanto $\delta \leq \sigma_0 - \sigma_1 \wedge \delta \leq \sigma_2 - \sigma_0$). Así $w = f(s)$ para algún s con $\sigma_1 \leq \sigma_0 - \delta < \Re(s) < \sigma_0 + \delta \leq \sigma_2$. Por lo tanto $w \in S_f = \{f(s) / \sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2\}$, lo que demuestra que

$$\bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0) \subseteq S_f$$

Por lo tanto

$$S_f = \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0) \quad (2.50)$$

Ahora como $f(s) \sim g(s)$, y ambas convergen absolutamente en $\sigma_0 \in \langle \sigma_1; \sigma_2 \rangle$ de acuerdo a 2.43 $U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0)$, luego por la ecuación (2.42) $V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)}$, de donde

$$\overline{U_f(\sigma_0)} = \overline{V_f(\sigma_0)}$$

Análogamente $\overline{U_g(\sigma_0)} = \overline{V_g(\sigma_0)}$, así $\overline{V_f(\sigma_0)} = \overline{V_g(\sigma_0)}$. Además, de la ecuación (2.46) que es consecuencia del teorema de Rouché y el principio de selección de Helly $W_f(\sigma_0) = \overline{V_f(\sigma_0)}$ y $W_g(\sigma_0) = \overline{V_g(\sigma_0)}$, por ende

$$W_f(\sigma_0) = W_g(\sigma_0) \quad \forall \sigma_0 / \sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2$$

o bien,

$$\bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_f(\sigma_0) = \bigcup_{\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2} W_g(\sigma_0)$$

Por tanto, de la ecuación (2.49) se concluye que $S_f = S_g$ □

Para cerrar esta sección anotamos que si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ y $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\lambda_n}$ son dos series de Dirichlet con abscisa de convergencia absoluta σ_a y en todo semiplano abierto $\sigma > \sigma_1$ las series $f(s)$ y $g(s)$ toman el mismo conjunto de valores, entonces de acuerdo a (Righetti, 2017) $f(s)$ y $g(s)$ son equivalentes, precisamente el recíproco del teorema de equivalencia de Bohr.

2.1.6. Turán, Montgomery, Roy y Vatwani

La serie de Dirichlet asociada a la función aritmética $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ es dada por $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ y sus sumas parciales $F_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s}$ son los *polinomios de Dirichlet asociados a f*. Cuando $f(n) = 1$ para todo entero positivo n , en el semiplano $\Re(s) > 1$, la serie de dirichlet $F(s)$ representa la función zeta de Riemann $\zeta(s)$, y sobre las sumas parciales Turán (Turán, 1948) demostró que , si $\zeta_N(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\sigma > 1 + \frac{(\log N)^3}{\sqrt{N}}$ para todo N suficientemente grande, entonces $\zeta(s)$ no tiene ceros en $\sigma > \frac{1}{2}$, es decir, la célebre hipótesis de Riemann sería verdadera.

Recién en 1983 Montgomery demuestra que la hipótesis requerida por Turán sobre los ceros de $\zeta_N(s)$ es falsa, Montgomery demuestra que para cualquier constante $0 < c < (\frac{4}{\pi} - 1)$ existe $N_0(c)$ tal que si $N > N_0(c)$, entonces $\zeta_N(s)$ tiene ceros en el semiplano

$$\sigma > 1 + c \frac{\log \log N}{\log N} \quad (2.51)$$

En particular, esto significa que para N suficientemente grande $\zeta_N(s)$ tiene ceros en $\sigma > 1$, y recientemente Platt y Trudgian (Platt and Trudgian, 2016) logran determinar los finitos valores de N para los cuales $\zeta_N(s)$ no tiene ceros en $\sigma > 1$. De hecho, en el 2001 Montgomery y Vaughan (Montgomery and Vaughan, 2002) demostraron que existe una constante N_0 tal que si $N > N_0$, entonces $\zeta_N(s)$ no se anula en el semiplano

$$\sigma \geq 1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \frac{\log \log N}{\log N} \quad (2.52)$$

el método aquí empleado es aplicado a funciones completamente multiplicativas con valores dentro del disco unitario, pero falla para una clase más general de funciones multiplicativas. Recientemente en noviembre del 2021 Arindam Roy de la University of North Carolina y Akshaa Vatwani del Indian Institute of Technology (Roy and Vatwani, 2021), salvan esta brecha al obtener una región libre de ceros para sumas parciales asociadas a funciones en una subclase adecuada C_k de funciones multiplicativas que pasamos a definir

Definición 12. Para k entero positivo se dice que $f \in C_k$ si, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ es multiplicativa y cada una de las series

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad \log F(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s \log n}, \quad \frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} \quad (2.53)$$

es absolutamente convergente en $\Re(s) > 1$ y $|\Lambda_f(n)| \leq k\Lambda(n)$, donde $\Lambda(n)$ es la función de Mangoldt.

Esta clase de funciones incluye la mayoría de las funciones multiplicativas. Roy y Vatwani demuestran que si $f \in C_k$, entonces el correspondiente polinomio de Dirichlet $F_N(s)$ para N suficientemente grande, no se anula en el semiplano,

$$\sigma \geq 1 + \left(\frac{4k}{\pi} - 1 \right) \frac{\log \log N}{\log N} \quad (2.54)$$

En particular, cuando $k = 1$ nos permite deducir el resultado de Montgomery y Vaughan. Más aún, Montgomery demostró que el factor $\frac{4}{\pi} - 1$ que aparece en (Montgomery, 1983) es el óptimo, es decir, para cualquier constante $0 < c < (\frac{4}{\pi} - 1)$ existe $N_0(c)$ tal que, si $N > N_0$ entonces $\zeta_N(s)$ si tiene ceros en el semiplano

$$\sigma > 1 + c \frac{\log \log N}{\log N} \quad (2.55)$$

Definición 13. Para $m > 0$ decimos que $f \in C_{k,m}$ si, $f \in C_k$ y su serie de Dirichlet asociada $F(s)$ puede ser escrito en la forma

$$F(s) = \frac{H(s)}{(s-1)^m}$$

con $H(s)$ analítica en el semiplano $\sigma > 1 - \frac{c_1}{(1+\log(|t|+2))^M}$ para algunas constantes $c_1, M > 0$. Además asumimos que en este semiplano $F(s)$ satisface las acotaciones

$$\frac{F'(s)}{F(s)} \ll (\log(|t|+2))^B \quad \text{y} \quad \log F(s) \ll (\log \log(|t|+2))^C$$

para $B, C > 0$

Con estos preliminares Roy y Vatwani enuncian su teorema principal

Teorema 13 (Roy-Vatwani). *Sea $f \in C_{k,m}$ y $F_N(s)$ su correspondiente polinomio de Dirichlet. Si $0 < c < \frac{4m}{\pi} - 1$, entonces existe $N_0(c)$ tal que $F_N(s)$ tiene ceros en el semiplano*

$$\sigma > 1 + c \frac{\log \log N}{\log N}$$

pero no en el semiplano

$$\sigma \geq 1 + \left(\frac{4k}{\pi} - 1 \right) \frac{\log \log N}{\log N}$$

para todo $N > N_0(c)$.

En este teorema $m > \pi/4$, y para su demostración (Roy and Vatwani, 2021, pp. 7–14) se requiere entre otros, de los siguientes lemas;

Lema 5 (Fórmula de Perron). *Sea $f(n)$ una función aritmética, σ_a la abscisa de convergencia absoluta de la correspondiente serie de Dirichlet $F(s)$. Entonces para cualquier $\alpha > \max\{0, \sigma_a\}$, $T \geq 1$ y $x \geq 1$ se tiene que*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + \left(x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\alpha (1+T|\log(x/n)|)} \right).$$

La demostración de este lema se puede ver en (Tenenbaum, 2015, Theorem 2.3, p.219)

Sea $r > 0$, el contorno de Hankel es el contorno positivamente orientado del círculo $|s| = r$ excluyendo el arco desde $re^{i(\pi-\varepsilon)}$ hasta $re^{i(-\pi+\varepsilon)}$, y de las líneas horizontales desde $-\infty$ a $re^{i(\pi-\varepsilon)}$ y desde $re^{i(-\pi+\varepsilon)}$ a $-\infty$.

Sea $\mathcal{H}(X)$ la parte del contorno de Hankel en el semiplano $\sigma > -X$, entonces la fórmula de Hankel para el contorno $\mathcal{H}(X)$ esta dado como

Lema 6. *Sea $X > 1$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}(X)} s^{-z} e^s ds = \frac{1}{\Gamma(s)} + O\left(47^{|z|} \Gamma(1+|z|) e^{-\frac{1}{2}X}\right)$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C}$

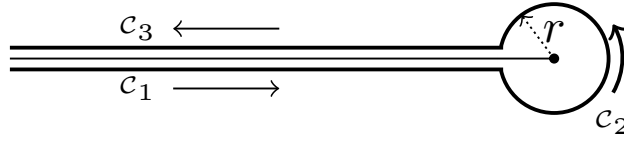


Figura 2.5: El contorno de Hankel \mathcal{H}

Resultado que puede corroborarse en (Tenenbaum, 2015, Corollary 0.18, p.180)

Sea $1 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ y $b_\delta(\theta)$ la función periódica de periodo 1, definida por

$$b_\delta(\theta) = \begin{cases} ie^{i\pi\theta} & , \delta \leq \theta \leq 1 - \delta \\ -e^{(1-(2\delta)^{-1})i\pi\theta} & , -\delta < \theta \leq \delta \end{cases}$$

Entonces, la serie de Fourier de $b_\delta(\theta)$ es una serie absolutamente convergente dada por

$$b_\delta(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{b}_\delta(j) e^{2\pi i j \theta}$$

donde $\hat{b}_\delta(j) = \frac{\sin 2\pi(j\delta - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4})}{(2j-1)2\pi(j\delta - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4})}$ estos coeficientes de fourier satisfacen las siguientes propiedades

Lema 7. Sea $\delta \in [0; 1/2]$ fijado, entonces para cada entero k :

1. El coeficiente de Fourier $\hat{b}_\delta(k) \in \mathbb{R}$;
2. $\hat{b}_\delta(k) \ll_\delta \frac{1}{k^2 + 1}$;
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \hat{b}_\delta(k) = \frac{2}{\pi(2k-1)} = \hat{b}_0(k)$;
4. $\hat{b}_\delta(1) - \hat{b}_\delta(0)$ es estrictamente decreciente como función de δ ;
5. $\hat{b}_0(k) \leq \frac{2}{\pi}$.

2.1.7. Polinomios de Dirichlet

Veremos aquí un caso particular de los polinomios exponenciales, es decir, funciones $f(s)$ de la forma

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s} = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (2.56)$$

donde $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ y los a_k son constantes complejas no nulas $0 \leq k \leq n$. Esta expresión nos recuerda las sumas parciales de las series de Dirichlet. Un polinomio exponencial de esta forma se llama *polinomio de Dirichlet*.

Un caso simple es aquel donde todos los λ_i son generados aditivamente por un elemento $\lambda > 0$.

Proposición 10. *Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet definido por (2.56), para el cual existe $\lambda > 0$ y enteros $k_1 < \dots < k_n$ tales que $\lambda_j = k_j \lambda$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces $f(s)$ es periódica de periodo $2\pi i/\lambda$; además los ceros de $f(s)$ conforman una unión finita de progresiones aritméticas de igual periodo.*

Demostración. En efecto, $f(s) = P(e^{-\lambda s})$, donde

$$P(z) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j z^{k_j}$$

Los ceros de $f(s)$ corresponden a los valores de s tales que $e^{-\lambda s} = z_j$, donde z_j , $1 \leq j \leq k_n$ son los ceros de $P(z)$, entonces $-\lambda s = \log(z_j)$, esto es

$$s = -\lambda^{-1}(\log |z_j| + \arg(z_j)i + 2\pi ki),$$

donde $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq k_n$. □

En general, la estructura de los ceros es más complicada. Por ejemplo, la función

$$f(s) = 1 + e^{-s} + e^{-\lambda s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

es periódica (y sus ceros son descritos por la proposición 10) si y solo si $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Escribiendo $s = \sigma + i\tau$ en (2.56), es evidente que los ceros de un polinomio de Dirichlet están dentro de una banda vertical del plano complejo, pues

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f(s) = a_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} e^{\lambda n s} f(s) = a_n \neq 0, \quad \text{uniformemente en } \tau$$

La siguiente proposición nos proporciona una banda que contiene los ceros de $f(s)$, que es óptima en cierto sentido.

Lema 8. *Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet definido por (2.56). Entonces los ceros de $f(s)$ se encuentran en la banda*

$$\sigma_I \leq \sigma \leq \sigma_S,$$

donde σ_S es la única raíz real de $h(\sigma) = |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k|e^{-\lambda_k\sigma}$, y σ_I es la única raíz real de $g(\sigma) = |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|e^{(\lambda_n-\lambda_k)\sigma}$.

En el caso que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{Q}

$$\sigma_S = \sup \{ \sigma : f(s) = 0 \} \quad \text{y} \quad \sigma_I = \inf \{ \sigma : f(s) = 0 \}$$

Para una demostración de esta proposición vea (Lapidus and Van Frankenhuijsen, 2006, §2.1) ó (Lapidus and Frankenhuijsen, 2003, §3.3). Trivialmente

$$|f(s)| \geq |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k|e^{-\lambda_k\sigma},$$

donde la parte derecha de la desigualdad es una función creciente de σ , positiva para $\sigma > \sigma_S$. Esto muestra que $\sup\{\sigma : f(s) = 0\} \leq \sigma_S$. Mostraremos las igualdades restantes después, utilizando el teorema de equivalencia de Bohr.

La siguiente proposición describe el número y las multiplicidad de los ceros de un polinomio de Dirichlet (Bellman and Cooke, 1963, Theorem 12.5).

Proposición 11. *Dado un polinomio de Dirichlet $f(s)$ definido por (2.56) y $T_1 < T_2$, el número $N(T_1, T_2)$ de ceros de $f(s)$ con $T_1 < \tau < T_2$ satisface una desigualdad*

$$\left| N(T_1, T_2) - \frac{T_2 - T_1}{2\pi} \lambda_n \right| \leq n. \quad (2.57)$$

En particular, la multiplicidad de un cero cualquiera de $f(s)$ es a lo más n .

Demostración. Apliquemos el principio del argumento en un rectángulo $\sigma'_I \leq \sigma \leq \sigma'_S$, $T_1 < \tau < T_2$, donde $\sigma_I \leq \sigma \leq \sigma_S$ es la banda del lema 8. Haciendo $\sigma'_S \rightarrow +\infty$ y $\sigma'_I \rightarrow -\infty$, obtenemos $f(\sigma'_S + i\tau) = a_0(1 + o(1))$ y $f(\sigma'_I + i\tau) = a_n e^{-\lambda_n(\sigma'_I + i\tau)}(1 + o(1))$ uniformemente en $\tau \in \mathbb{R}$.

Ahora, acotamos la variación del argumento sobre los lados horizontales del rectángulo. Multiplicando $f(s)$ por una constante conveniente, podemos suponer que $a_0 = 1$. Fijando T , hacemos $g(\sigma) = \Im f(\sigma + iT)$; la variación del argumento de $f(s)$ sobre $\sigma'_I \leq \sigma \leq \sigma'_S$, $\tau = T$ está acotada por $\pi(r + 1)$, donde r es el número de ceros de $g(\sigma)$ en este segmento.

Ahora bien $g(\sigma) = \sum_{k=1}^n a_k^* e^{-\lambda_k\sigma}$, de donde

$$e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\dots \frac{d}{d\sigma} \left(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\sigma} \frac{d}{d\sigma} (e^{\lambda_1\sigma} g(\sigma)) \right) \right)$$

es una función constante. Por el teorema de Rolle, el número de ceros de $g(\sigma)$ para $\sigma'_I \leq \sigma \leq \sigma'_S$ es $r \leq n - 1$. Esto muestra que la variación del argumento de $f(s)$ sobre $\sigma'_I \leq \sigma \leq \sigma'_S$, $\tau = T_1$ es $\leq \pi n$; igual para $\sigma = T_2$. Eso demuestra (2.57).

Finalmente, si s_0 es un cero de $f(s)$ con $\Im s_0 = \tau_0$, y $\varepsilon > 0$, la multiplicidad de s_0 es $\leq N(\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon) \leq \varepsilon \lambda_n / \pi + n$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos el resultado esperado. \square

Veamos las consecuencias de (2.57). Para $0 < \delta < 2\pi/\lambda_n$ y $T \in \mathbb{R}$, $N(T, T + \delta) \leq n$. Para $\varepsilon > 0$ fijado, consideramos la familia de bolas centradas en los ceros s_0 de $f(s)$ y de radio $\varepsilon > 0$, $B(s_0, \varepsilon) = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < \varepsilon\}$. Si s_1, \dots, s_m son los ceros de $f(s)$ (contados con sus multiplicidades) tales que $\bigcup_{i=1}^m B(s_i, \varepsilon)$ sea conexo, entonces la distancia entre las ordenadas de dos ceros de este conjunto es $< 2m\varepsilon$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $4m\varepsilon < \delta$, obtenemos $m \leq N(\Im s_1 - \delta/2, \Im s_1 + \delta/2) \leq n$.

El conjunto de fronteras de las uniones finitas conexas de las bolas nos proporciona una familia de curvas muy especial, que describimos a continuación.

Lema 9. Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet dado por (2.56). Para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de curvas cerradas $\{C_j\}_{j \geq 1}$ que contienen los ceros de $f(s)$, cuyos puntos se encuentran a una distancia $\geq \varepsilon$ de estos ceros, siendo el diámetro de cada C_j (que contiene a lo más n ceros, contados con sus multiplicidades) $\leq 2n\varepsilon$.

Lema 10. Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet dado por (2.56), $F \subset \mathbb{C}$ un conjunto cerrado uniformemente alejado del conjunto de ceros de $f(s)$, es decir, tal que

$$\inf\{|s - z| : s \in F, z \in \mathbb{C}, f(z) = 0\} > 0.$$

Entonces

$$\inf\{f(s) : s \in F\} > 0.$$

Para una demostración de este resultado, vea (Cooke, 1963, Lemma 12.1) y (Cooke, 1963, Theorem 12.6). La idea es llevar el problema a un conjunto compacto, donde la solución resulta trivial. Con este fin, desarrollamos los términos exponenciales del polinomio y aprovechamos la periodicidad de cada uno de esos términos.

El siguiente resultado, que mejora la información disponible respecto a la multiplicidad de los ceros de ciertos polinomios de Dirichlet, nos será de utilidad

Proposición 12. (*Lapidus and Van Frankenhuijsen, 2006, Theorem 3.30*) Sean $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$, λ_1, λ_2 números reales positivos tales que $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ no sea racional. Entonces los ceros de la función

$$f(s) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s}$$

son simples.

Evidentemente, toda función periódica es casi-periódica; esto, nos permite concluir que todo polinomio de Dirichlet es casi-periódico. Podemos obtener una prueba directa de este hecho a partir de la siguiente variante del teorema de aproximación de Kronecker: dados los números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\varepsilon > 0$, existe un conjunto relativamente denso de números reales T tal que

$$|\lambda_j T - a_j| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n,$$

para los enteros a_1, \dots, a_n (Gottschalk, 1946, Corollary 4)

Lema 11. *Todo polinomio de Dirichlet es una función casi-periódica.*

Sea $f(s)$ una función casi-periódica en una banda $a < \sigma < b$ y σ fijo en tal intervalo, podemos, para cada λ real, calcular el límite (finito)

$$a_\lambda = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\sigma + i\tau) e^{\lambda(\sigma + i\tau)} d\tau.$$

Podemos mostrar que este límite no depende de σ , y que el conjunto $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : a_\lambda \neq 0\}$ es a lo más numerable. Escribimos $\Lambda = \{\lambda_n\}$ y para cada n , a_n en lugar de a_{λ_n} ; la suma $\sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$ es la *serie de Dirichlet asociada a $f(s)$* , y escribimos

$$f(s) \sim \sum_n a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Esta suma nos permite estudiar la función $f(s)$; es claro que toda serie de Dirichlet absolutamente convergente es igual a su serie asociada. El teorema de aproximación establece que toda función casi-periódica puede aproximarse uniformemente por polinomios de Dirichlet, en toda banda $a + \delta < \sigma < b - \delta$ ($\delta > 0$); para los detalles vea (Bohr, 1947, Appendix II). Esto muestra que, lejos de ser un caso particular, los polinomios de Dirichlet son la base de la teoría de funciones analíticas casi-periódicas.

Esperamos que el conjunto de ceros de una función casi-periódica tenga una estructura de translación análoga a la que posee la función.

Dado $\varepsilon > 0$, un número real T es una ε -*translación* (vertical) del *multi-conjunto* $P = \{s_j\}_{j \in I} \subset \mathbb{C}$ (un conjunto donde cada punto se repite un número finito de veces, llamado *multiplicidad* del punto) si existe una biyección $f : I \rightarrow I$ tal que, para cada $j \in I$ tengamos

$$|s_j + iT - s_{f(j)}| < \varepsilon.$$

Un conjunto $P \subset \mathbb{C}$ es *casi-periódico* si, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto de las ε -*translaciones* de P es relativamente denso.

Proposición 13. *El conjunto de ceros de un polinomio de Dirichlet es casi-periódico.*

Demostración. Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet, y sea $a \leq \sigma \leq b$ una banda que contiene los ceros $Z = \{s_j\}_{j \in I}$ de $f(s)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por el lema 9, existe una familia de curvas cerradas $\{C_q\}_{q \geq 1}$ que contienen a los ceros de $f(s)$, a una distancia $\geq \delta$ de los ceros, y de diámetro $\leq 2n\delta < \varepsilon$. Ahora bien, el lema 10 nos asegura que $|f(s)| \geq m > 0$ en el exterior de la región delimitada por tales curvas. Debido a la casi-periodicidad de $f(s)$, existe un conjunto relativamente denso de $m/2$ -periodos de $f(s)$ en la banda $a - \delta < \sigma < b + \delta$. Si T es un $m/2$ -periodo, entonces $|f(s - iT)| \geq m/2$ en el exterior de la región limitada por las curvas C_q , y

$$|f(s) - f(s - iT)| < m/2 \leq |f(s)|$$

para s en las curvas C_q y al exterior de ellas, luego ni $f(s)$ ni su *translación* $s \mapsto f(s - iT)$ tienen ceros en el exterior de estas curvas. Por el teorema de Rouché, $f(s)$ y $s \mapsto f(s - iT)$ poseen el mismo número de ceros en el interior de cada curva C_q (a lo más n). Así, podemos asociar, a cada cero s_j de $f(s)$, un cero $s_{k_j} - iT$ de $s \mapsto f(s - iT)$ a una distancia $< \delta$ de s_j , es decir, un cero z'_0 de $f(s)$ con

$$|s_j + iT - s_{k_j}| < \varepsilon.$$

Esto muestra que T es una ε -*translación* de Z , lo cual concluye la demostración. \square

De esta proposición se deriva el siguiente hecho: si $s_0 = \sigma + i\tau_0$ es un cero del polinomio de Dirichlet $f(s)$ y $\varepsilon > 0$, entonces por la casi-periodicidad de los ceros de $f(s)$, podemos construir una sucesión $\{s_n = \sigma_n + i\tau_n\}_{n \geq 1}$ de ceros de $f(s)$ con $\sigma_n \in]\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon[$ para todo $n \geq 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \pm\infty$. Podemos ir más lejos estudiando los movimientos medios de $f(s)$ sobre la densidad de esos ceros (por ejemplo, un resultado de Jessen nos dice que el número de ceros en $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$ es $\asymp T$ (Bohr, 1947, p. 112)).

De hecho, este último resultado no es válido para todas las funciones casi-periódicas, solamente para un subconjunto de funciones para el cual se verifican los lemas 8, 9 y 10 (funciones de la clase $[\Delta]$, (Levin, 1996, Chapter VI, §2 y Appendix VI, §2)).

Cabe resaltar que resultados similares han sido obtenidos por Lapidus y van Frankenhuijsen en el estudio de cuerdas fractales. Su punto de vista consiste en aproximar los polinomios de Dirichlet por polinomios periódicos, obtenidos por la aproximación diofántica simultánea de frecuencias (Lapidus and van Frankenhuijsen, 2000, §3.1, §3.3, §3.4), (Lapidus and van Frankenhuijsen, 2003). Sus resultados proporcionan una estructura quasi-periódica de los ceros, análoga a la estructura casi periódica. La información obtenida por estos métodos es más cuantitativa que cualitativa.

Enunciamos el resultado de aproximación diofántica siguiente (Lapidus and van Frankenhuijsen, 2000, Lemma 3.16).

Lema 12. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ números reales positivos, tal que al menos uno de los λ_j/λ_1 , $2 \leq j \leq n$ no es racional. Entonces, para todo $Q > 1$, existen enteros q y k_1, \dots, k_n tal que $1 \leq q \leq Q^{n-1}$ y

$$\left| q \frac{\lambda_j}{\lambda_1} - k_j \right| \leq \frac{1}{Q}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Resaltamos que, en el lema anterior, bajo las condiciones dadas, $q \rightarrow +\infty$ cuando $Q \rightarrow +\infty$. Ahora proporcionamos, con las constantes simplificadas, una versión del teorema en (Lapidus and van Frankenhuijsen, 2000, Theorem 3.18).

Teorema 14. Sean $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ números reales tales que al menos uno de los λ_j/λ_1 , $2 \leq j \leq n$ no es racional, a_0, a_1, \dots, a_n números complejos, y $K, \varepsilon > 0$. Consideremos el polinomio de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{j=0}^n a_j e^{-\lambda_j s},$$

y

$$C = \frac{1}{2\pi} e^{-2\lambda_n K} \left(\sum_{j=1}^n |a_j| \right)^{-1}.$$

Sean $Q > 1$, q, k_1, \dots, k_n enteros dados por el lema 12, y $k_0 = 0$. Entonces el polinomio de Dirichlet periódico

$$g(s) = \sum_{j=0}^n a_j e^{-\frac{\lambda_j}{q} k_j s},$$

de periodo $2\pi\frac{q}{\lambda_1}i$, aproxima $f(s)$ en la banda $|\sigma| < K$, para $|s| < 2\pi\frac{q}{\lambda_1}\varepsilon CQ$, es decir, mientras εCQ periodos de $g(s)$, en el sentido que

$$|f(s) - g(s)| < \varepsilon.$$

Demostración. Seguimos la demostración de (Lapidus and Van Frankenhuijsen, 2006, Theorem 3.18). Basta observar que

$$|f(s) - g(s)| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |e^{-\lambda_j s} - e^{-\frac{\lambda_1}{q} k_j s}|$$

y $e^{-\lambda_j s} - e^{-\frac{\lambda_1}{q} k_j s} = -s \int_{\frac{\lambda_1}{q} k_j}^{\lambda_j} e^{-ts} dt$, de donde para $|\sigma| < K$

$$|e^{-\lambda_j s} - e^{-\frac{\lambda_1}{q} k_j s}| \leq |s| \frac{\lambda_1}{qQ} e^{2\lambda_n |\sigma|}$$

para $1 \leq j \leq n$. Esto muestra que

$$|f(s) - g(s)| \leq |s| \frac{\lambda_1}{2\pi qQ} C^{-1},$$

para $|\sigma| < K$, de donde se sigue el resultado. \square

2.1.8. Bases de Gröbner

Esta sección es un breve extracto de (Adams et al., 1994). En el anillo de polinomios sobre un cuerpo k con n indeterminadas $k[x_1, \dots, x_n]$, al conjunto de sus monomios lo denotamos por

$$M_n = \left\{ x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} / \beta_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

este conjunto es una base para el k -espacio vectorial $k[x_1, \dots, x_n]$, y por el teorema base de Hilbert (Fulton, 2008, p.16) $k[x_1, \dots, x_n]$ es un anillo Noetheriano. El monomio $x_1 x_2 \dots x_n$ será denotado por \mathbf{X} , y si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, escribiremos

$$\mathbf{X}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{y} \quad \text{grad}(\mathbf{X}^\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (2.58)$$

Definición 14. El orden *lexicográfico* (lex) en M_n es definido por:

1. $x_1 > x_2 > \dots > x_n$
2. $\mathbf{X}^\alpha <_{\text{lex}} \mathbf{X}^\beta$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, si la primera componente no nula de $\beta - \alpha$ es positiva.

Definición 15. El orden de *lexicográfico graduado* (lexg) en M_n es definido por:

1. $x_1 > x_2 > \dots > x_n$
2. $\mathbf{X}^\alpha <_{\text{lexg}} \mathbf{X}^\beta$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, si $\text{grad}(\mathbf{X}^\alpha) < \text{grad}(\mathbf{X}^\beta)$ o ($\text{grad}(\mathbf{X}^\alpha) = \text{grad}(\mathbf{X}^\beta)$ y $\mathbf{X}^\alpha <_{\text{lex}} \mathbf{X}^\beta$).

Sea $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ no nulo, fijado un orden monomial, podemos escribir

$$f = a_1 \mathbf{X}^{\alpha_1} + a_2 \mathbf{X}^{\alpha_2} + \dots + a_r \mathbf{X}^{\alpha_r}$$

donde los $a_i \in k^*$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ y $\mathbf{X}^{\alpha_1} > \mathbf{X}^{\alpha_2} > \dots > \mathbf{X}^{\alpha_r}$. En este caso, $\text{ml}(f) = \mathbf{X}^{\alpha_1}$, $\text{cl}(f) = a_1$, $\text{tl}(f) = a_1 \mathbf{X}^{\alpha_1}$ y $\text{mgrad}(f) = \alpha_1$, son respectivamente el *monomio lider*, *coeficiente lider*, *término lider* y el *multigrado* de f .

Definición 16. Dados f, g, h en $k[x_1, \dots, x_n]$ con $g \neq 0$, y fijado un orden monomial entre los monomios. Decimos que f se reduce a h módulo g en un paso, y escribimos $f \xrightarrow{g} h$ si $\text{tl}(g)$ divide a algún término no nulo T de f y $h = f - \frac{T}{\text{tl}(g)}g$

Por ejemplo, si $f = 2x^3 + x^2y + y^3$ y $g = x^2 - xy$ en $\mathbb{R}[x, y]$ con el orden monomial lex $x > y$ (prefijado) se tiene que $\text{tl}(g) = x^2$, y si escogemos el término $T = 2x^3$ de f

$$h = f - \frac{T}{\text{tl}(g)}g = (2x^3 + x^2y + y^3) - \frac{2x^3}{x^2}(x^2 - xy) = 3x^2y + y^3$$

Definición 17. Sean f, h y $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ en $k[x_1, \dots, x_n]$, con $g_i \neq 0, 1 \leq i \leq s$. Decimos que f se reduce a h módulo G , y escribimos $f \xrightarrow{G} h$, si existe una sucesión de índices $i_1, i_2, \dots, i_t \in \{1, \dots, s\}$ y una sucesión de polinomios $h_1, \dots, h_{t-1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ tale que

$$f \xrightarrow{g_{i_1}} h_1 \xrightarrow{g_{i_2}} h_2 \xrightarrow{g_{i_3}} \dots \xrightarrow{g_{i_{t-1}}} h_{t-1} \xrightarrow{g_{i_t}} h \quad (2.59)$$

Sea $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ y $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ tal que $f \xrightarrow{g_1} h_1 \xrightarrow{g_2} h_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{g_s} h$. Para algún término no nulo T_1 de f , $\text{tl}(g_1)$ divide a T_1 y $h_1 = f - \frac{T_1}{\text{tl}(g_1)}g_1$. Luego, para algún término no nulo T_2 de h_1 , $\text{tl}(g_2)$ divide a T_2 y $h_2 = h_1 - \frac{T_2}{\text{tl}(g_2)}g_2$. Así, por un proceso inductivo se tiene que

$$f = \frac{T_1}{\text{tl}(g_1)}g_1 + \frac{T_2}{\text{tl}(g_2)}g_2 + \dots + \frac{T_s}{\text{tl}(g_s)}g_s + h = u_1g_1 + u_2g_2 + \dots + u_sg_s + h \quad (2.60)$$

Definición 18. Un conjunto de polinomios no nulos $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ contenido en un ideal I de $k[x_1, \dots, x_n]$ es llamado una *base de Gröbner* para I , si

$$\forall f \in I \text{ no nulo}, \exists g_i \in G : \text{ml}(g_i) \mid \text{ml}(f) \quad (2.61)$$

Es decir, el monomio líder de cualquier polinomio no nulo f del ideal I es múltiplo del monomio líder de algún $g_i \in G$

Si $Tl(M) := \langle \{tl(s) : s \in M\} \rangle$ es el ideal generado por los términos líderes de $M \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Las siguientes afirmaciones, son formas equivalentes de definir una base de Gröbner (Adams et al., 1994, Theorem 1.6.2). Para un ideal no nulo I de $k[x_1, \dots, x_n]$ y $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$:

1. G es una base de Gröbner para I .
2. $f \in I$ si y solo si $f \xrightarrow{G} 0$.
3. $f \in I$ si y solo si $f = \sum_{i=1}^t h_i g_i$, con $ml(f) = \max_{1 \leq i \leq t} \{ml(h_i) ml(g_i)\}$.
4. $Tl(G) = Tl(I)$.

Definición 19. Para dos polinomios no nulos $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ con $tl(f) = aX^\alpha$ y $tl(g) = bX^\beta$, definimos el S -polinomio de f y g , de la forma

$$S(f, g) = \frac{1}{a} X^{\gamma-\alpha} f - \frac{1}{b} X^{\gamma-\beta} g, \quad \gamma = (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \max\{\alpha_n, \beta_n\}) \quad (2.62)$$

Teorema 15 (de Buchberger). *Un conjunto $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de polinomios no nulos en $k[x_1, \dots, x_n]$ es una base de Gröbner para el ideal $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, si $\forall i \neq j \quad S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$*

La demostración de este teorema, se puede ver en (Adams et al., 1994, Theorem 1.7.4), y en base al teorema de Buchberger.

Sea $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ digamos $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$. El *soporte* de f es el conjunto de los monomios de este polinomio, es decir $\text{supp}(f) = \{X^{\alpha} : a_{\alpha} \neq 0\}$.

La base de Gröbner obtenida mediante el algoritmo de Buchberger, en general no es única, sin embargo, imponiendo ciertas condiciones adicionales a los polinomios de esta base se logra tal objetivo. Así, para un orden monomial prefijado en $k[x_1, \dots, x_n]$, todo ideal no nulo $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ tiene una única base de Gröbner reducida. Este resultado es conocido como el teorema de Buchberger, cuya demostración se encuentra en (Adams et al., 1994, Theorem 1.8.7)

Dado un conjunto de polinomios $C = \{f_1, \dots, f_s\}$ en $k[x_1, \dots, x_n]$, resolver el sistema

$$f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0 \quad (2.63)$$

sobre k , significa determinar una n -upla (a_1, \dots, a_n) en k^n tal que $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ el ideal generado por estos polinomios y supongamos que $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ es otro conjunto generador de I , entonces las soluciones del sistema $g_1 = g_2 = \dots = g_t = 0$, son equivalentes a las soluciones del sistema original.

En general, para toda extensión L de k , y $M \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, el conjunto

$$V_{L/k}(M) = \{(a_1, \dots, a_n) \in L^n / f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in M\} \quad (2.64)$$

es llamado la variedad algebraica de M sobre el cuerpo k . Así $V_{L/k}(C) = V_{L/k}(I) = V_{L/k}(G)$, donde G es una base de Gröbner del ideal $I = \langle C \rangle$.

Sea G una base de Gröbner de un ideal I de $k[x_1, \dots, x_n]$ (con respecto al orden lexicográfico). Si $G_l = G \cap k[x_{l+1}, \dots, x_n] \neq \emptyset$, entonces G_l es una base de Gröbner del l -ésimo ideal de eliminación $I_l = I \cap k[x_{l+1}, \dots, x_n]$. Este resultado nos permite trabajar con sistemas de menos variables, sin embargo se necesita completar la solución del sistema inicial, lo que es posible gracias al siguiente teorema (Adams et al., 1994, theorem 2.3.4).

Teorema 16. *Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un ideal de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, I_1 el primer ideal de eliminación de I y consideramos $f_i \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n][x_1]$, es decir*

$$f_i = h_i x_1^{N_i} + (\text{términos de grado menor que } N_i \text{ en } x_1), \quad h_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Si $(a_2, \dots, a_n) \in V_{\mathbb{C}}(I_1)$ y $(a_2, \dots, a_n) \notin V_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_s)$, entonces existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_{\mathbb{C}}(I)$$

2.1.9. El algoritmo LLL

Definición 20. Un subconjunto L de \mathbb{R}^m es un *retículo*, si existe $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^m$ linealmente independiente sobre \mathbb{R} ($n \leq m$) tal que

$$L = \langle \beta \rangle_{\mathbb{Z}} = \sum_{j=1}^n \mathbb{Z} b_j = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j b_j / x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.65)$$

en este caso β es una \mathbb{Z} -base de L , el entero n se llama el rango del retículo L y el número $\det(L) = |\det(b_1, b_2, \dots, b_n)|$ es el determinante del retículo, que independe de la elección de la base.

Siendo b_1, b_2, \dots, b_n linealmente independientes, aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, e iteradamente obtenemos los vectores ortogonales $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ por

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = b_1 \\ \tilde{b}_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \tilde{b}_j \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.66)$$

donde $\mu_{ij} = \frac{\langle b_i, \tilde{b}_j \rangle}{\langle \tilde{b}_j, \tilde{b}_j \rangle}$ $1 \leq j < i \leq n$

Definición 21. Una base $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ del retículo L con base ortogonal $\tilde{\beta} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$ es una base LLL-reducida con factor δ ($\frac{1}{4} < \delta < 1$), si:

1. $|\mu_{ij}| < \frac{1}{2}$ para $1 \leq j < i \leq n$ (reducida en tamaño)
2. $\|\tilde{b}_i\|^2 \geq (\delta - \mu_{ii-1}^2) \|\tilde{b}_{i-1}\|^2$ $i = 2, 3, \dots, n$ (condición de Lovász)

Algoritmo 1 Algoritmo LLL

Entrada: b_1, b_2, \dots, b_n vectores L.I de \mathbb{R}^m , $\frac{1}{4} < \delta < 1$

Salida: Una base LLL-reducida b_1, b_2, \dots, b_n en \mathbb{R}^m

- 1: Ejecutar el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ y los coeficientes μ_{ij}
- 2: $B_i \leftarrow \langle \tilde{b}_i, \tilde{b}_i \rangle$ para todo $1 \leq i \leq n$
- 3: $k \leftarrow 2$
- 4: **mientras** $k \leq n$ **hacer**
- 5: **para** $j = k - 1 \rightarrow 1$ **hacer**
- 6: $q_{kj} \leftarrow \llbracket \mu_{kj} \rrbracket$
- 7: $b_k \leftarrow b_k - q_{kj} b_j$
- 8: Actualizar los valores de $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ y μ_{ij} respectivamente
- 9: **fin para**
- 10: **si** $B_k \leq (\delta - \mu_{kk-1}^2) B_{k-1}$ **entonces**
- 11: $k \leftarrow k + 1$
- 12: **si no**
- 13: Intercambiar b_k y b_{k-1}
- 14: Actualizar los valores \tilde{b}_i, μ_{ij} y B_i que se vean afectados
- 15: $k \leftarrow \max\{2, k - 1\}$
- 16: **fin si**
- 17: **fin mientras**
- 18: **devolver** $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Proposición 14. Sea $\tilde{\beta} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$ una base LLL-reducida con factor δ , asociada a la base $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ del retículo L . Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $2^{i-j} \|\tilde{b}_i\|^2 \geq \|\tilde{b}_j\|^2$ cuando $1 \leq j < i \leq n$
2. $\|\tilde{b}_i\|^2 \leq \|b_i\|^2 \leq (\frac{1}{2} + 2^{i-2}) \|\tilde{b}_i\|^2$ $i = 1, 2, \dots, n$

$$3. \|b_j\| \leq 2^{\frac{i-1}{2}} \|\tilde{b}_i\| \quad \text{para } 1 \leq j \leq i \leq n$$

$$4. \|b_1\| \leq 2^{\frac{n-1}{4}} \det(L)^{\frac{1}{n}}$$

$$5. \det(L) \leq \prod_{i=1}^n \|b_i\| \leq 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \det(L)$$

Demostración. Eligiendo $\delta = \frac{3}{4}$, en la condición de Lovász

$$\|\tilde{b}_i\|^2 \geq \left(\frac{3}{4} - \mu_{ij}^2\right) \|\tilde{b}_{i-1}\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\tilde{b}_{i-1}\|^2 \quad i = 2, 3, \dots, n$$

luego $\|\tilde{b}_i\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\tilde{b}_{i-1}\|^2 \geq \frac{1}{2^2} \|\tilde{b}_{i-2}\|^2 \geq \frac{1}{2^3} \|\tilde{b}_{i-3}\|^2 \geq \dots \geq \frac{1}{2^{i-j}} \|\tilde{b}_j\|^2$, o bien

$$2^{i-j} \|\tilde{b}_i\|^2 \geq \|\tilde{b}_j\|^2 \quad \text{cuando } 1 \leq j < i \leq n \quad (2.67)$$

De (2.66), se tiene que $b_i = \tilde{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \tilde{b}_j$, luego

$$\|b_i\|^2 = \left\| \tilde{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \tilde{b}_j \right\|^2 = \|\tilde{b}_i\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \tilde{b}_j \right\|^2 = \|\tilde{b}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij}^2 \|\tilde{b}_j\|^2$$

y dado que $\mu_{ij}^2 > 0$, $\|\tilde{b}_i\|^2 \leq \|b_i\|^2$, además

$$\|\tilde{b}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij}^2 \|\tilde{b}_j\|^2 \stackrel{(2.67)}{\leq} \|\tilde{b}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4} \cdot 2^{i-j} \|\tilde{b}_i\|^2 = \|\tilde{b}_i\|^2 \left(\frac{1}{2} + 2^{i-2} \right)$$

de donde

$$\|\tilde{b}_i\|^2 \leq \|b_i\|^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 2^{i-2} \right) \|\tilde{b}_i\|^2 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.68)$$

De otro lado, para $j \geq 1$, $1 + 2^{j-1} \leq 2^j$, o bien $\frac{1}{2} + 2^{j-2} \leq 2^{j-1}$, luego

$$\|b_j\|^2 \stackrel{(2.68)}{\leq} \left(\frac{1}{2} + 2^{j-2} \right) \|\tilde{b}_j\|^2 \leq 2^{j-1} \|\tilde{b}_j\|^2 \stackrel{(2.67)}{\leq} 2^{j-1} \cdot 2^{i-j} \|\tilde{b}_i\|^2$$

de donde

$$\|b_j\| \leq 2^{\frac{i-1}{2}} \|\tilde{b}_i\| \quad \text{para } 1 \leq j \leq i \leq n \quad (2.69)$$

En particular para $j = 1$, $\|b_1\| \leq 2^{\frac{i-1}{2}} \|\tilde{b}_i\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ y multiplicando todas estas desigualdades $\|b_1\|^n \leq 2^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i-1)} \prod_{i=1}^n \|\tilde{b}_i\| = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \det(L)$. Por tanto

$$\|b_1\| \leq 2^{\frac{n-1}{4}} \det(L)^{\frac{1}{n}} \quad (2.70)$$

También de (2.68) y (2.69), $\|\tilde{b}_i\| \leq \|b_i\| \leq 2^{\frac{i-1}{2}} \|\tilde{b}_i\|$ para $1 \leq i \leq n$, y multiplicando estas desigualdades $\prod_{i=1}^n \|\tilde{b}_i\| \leq \prod_{i=1}^n \|b_i\| \leq \prod_{i=1}^n 2^{\frac{i-1}{2}} \|\tilde{b}_i\| = 2^{\sum_{i=1}^n \frac{i-1}{2}} \prod_{i=1}^n \|\tilde{b}_i\|$. Por tanto $\det(L) \leq \prod_{i=1}^n \|b_i\| \leq 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \det(L)$ \square

El algoritmo Lenstra-Lenstra-Lovász transforma una base de un retículo L en una base LLL-reducida. El pseudocódigo de este algoritmo se muestra en el Algoritmo (1)

2.2. Antecedentes de la investigación

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-z\lambda_n}$$

donde $a_n, z \in \mathbb{C}$ y $(\lambda_n)_n$ es una sucesión de números reales no negativos estrictamente creciente tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, se llama serie general de Dirichlet.

Si $\lambda_n = \ln(n)$, obtenemos la serie (ordinaria) de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

Una de las series de Dirichlet ordinaria y notable, es la serie que define la función zeta de Riemann, donde $a_n = 1$ para todo n , esto es, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ que es absolutamente convergente en el semiplano $\Re(z) > 1$ y uniformemente convergente en el semiplano cerrado $\Re(z) \geq \sigma$, con $\sigma > 1$ fijo.

Otra serie de Dirichlet ordinaria relevante es la función eta de Dirichlet $\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$, que se relaciona con la función zeta, de la forma

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z}) \zeta(z) \quad (2.71)$$

Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > 1$, se prueba que

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + 1 - z \int_0^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{z+1}} dx \quad (2.72)$$

donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte decimal de x . Como la integral de la derecha en (2.72) es absolutamente convergente en el semiplano $\Re(z) > 0$ y uniformemente convergente en el semiplano $\Re(z) \geq \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ fijo, esta integral define una función analítica en el semiplano $\Re(z) > 0$. Así, la ecuación (2.72) nos da una prolongación analítica de la función $\zeta(s)$ a la región $\Re(z) > 0$ excepto en 1, en el cual se tiene un polo simple con residuo 1, pues

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ 1 + (z-1) - z(z-1) \int_0^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{z+1}} dx \right\} = 1.$$

La conexión entre la función zeta de Riemann y los números primos, se debe al producto que Euler demostró en 1737, para s número real mayor que 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

el mismo Euler usó esta identidad para dar una prueba analítica de la no finitud de los números primos; pero fue Riemann, quien estudia esta función para s complejo, logrando

enunciar la famosa conjetura que lleva su nombre, y es universalmente referido, como la *hipótesis de Riemann*, esto es

$$\text{Si } \zeta(\sigma + it) = 0 \text{ y } 0 < \sigma < 1, \text{ entonces } \sigma = 1/2 \quad (2.73)$$

Si para cada $T > 0$, $N(T)$ denota el número de ceros no triviales de $\zeta(s)$ en el rectángulo

$$R = \{ (\sigma + it) \in \mathbb{C} / 0 < \sigma < 1, 0 < t \leq T \}$$

y $N_0(T)$ denota el número de ceros de $\zeta(s)$ de la forma $z = \frac{1}{2} + it$ en el rectángulo R , la hipótesis de Riemann, es equivalente a

$$N(T) = N_0(T), \quad \forall T > 0 \quad (2.74)$$

En este contexto, algunos resultados son (Laurinčikas, 2012):

- En 1895, H. Von Mangoldt demostró que

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), \quad T \rightarrow \infty$$

- El problema de corroborar o descartar la hipótesis de Riemann, fue propuesto formalmente por David Hilbert (1862-1943), en el congreso internacional de matemáticas el 8 de agosto de 1900, como el octavo problema de su lista de 23 problemas abiertos hasta entonces, lo que revela la dificultad y trascendencia de resolver esta conjetura.
- En 1914, G. H. Hardy⁷ demostró que

$$N_0(T) > cT \quad c > 0, \quad T \geq T_0$$

En particular, esto nos indica que $N_0(T) \rightarrow \infty$, es decir, el número de ceros de la función zeta de Riemann en la recta crítica es infinito.

- En 1942, el matemático noruego Atle Selberg (1917-2007) mejoró el resultado de Hardy, logrando demostrar que

$$N_0(T) > cT \log(T) \quad c > 0, \quad T \geq T_0$$

- En 1974, El matemático norteamericano Norman Levinson (1912-1975) probó que

$$N_0(T) > \frac{1}{3}N(T)$$

⁷Godfrey Harold Hardy (1877-1947), matemático británico

- En 1989, el matemático norteamericano y actualmente profesor de la universidad de Bristol, John Brian Conrey (1955) consiguió demostrar que (Mora and Sepulcre, 2015).

$$N_0(T) > \frac{2}{5}N(T)$$

Siguiendo el orden cronológico de logros alcanzados, con respecto a los problemas relacionados a la función zeta de Riemann, tenemos que:

- $\zeta(2)$ converge⁸ a $\frac{\pi^2}{6}$, resultado conocido como el problema de Basilea. El cálculo exacto pertenece a Euler y el nombre del problema se debe a la ciudad natal de Leonhard Euler⁹.
- En 1978, Roger Apéry demuestra que $\zeta(3)$ es un número irracional (Van der Poorten and Apéry, 1979).
- Sobre el número real $\zeta(5)$, aún se desconoce si es o no, irracional (Sánchez et al., 2006).
- A un siglo de la propuesta de Hilbert, en el año 2000 el instituto CLAY “Clay Mathematics Institute” fundado el año 1998 por Landon T. Clay y por el matemático Arthur M. Jaffe, relanzan el reto, de corroborar o refutar la hipótesis de Riemann, como uno de los siete problemas del milenio, ofreciendo un millón de dólares a quien lo resuelva.
- El 2001, Keith Martin Ball (1960) de la universidad de Warwick (Inglaterra) y Tanguy Rivoal (1972) de la universidad de Caen (Francia), demostraron que la sucesión $\{\zeta(2n + 1)\}_n$ contiene infinitos números irracionales (Sprang, 2018)
- Con la tecnología de este siglo se ha calculado ya mas de 100 mil millones de ceros de esta función, y por ahora todos se encuentran efectivamente en la recta crítica $\Re(s) = 1/2$ (Borwein et al., 2007), lo que no corrobora ni refuta la hipótesis de Riemann.

Una estrategia de estudio de la función zeta de Riemann es trabajar con la sucesión de funciones $\zeta_N(s)$ obtenida de las sumas parciales de la función zeta, es decir

$$\zeta_N(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s} \tag{2.75}$$

Estas son funciones casi-periódicas (Hernández, 2009), y sobre la búsqueda de los ceros de $\zeta_N(s)$ en el semiplano $\Re(s) > 1$, se sabe que:

⁸ $\zeta(1)$ es divergente, la serie armónica

⁹Euler nació el 5 de abril de 1707, Basilea, Suiza

- En 1948, Paul Turán demostró que $\zeta_N(s) = 0$ no tiene solución en $\Re(s) > 1$, para $N = 1, 2, 3, 4$ y 5 (Turán, 1948)
- En 1966, Robert Spira demostró que $\zeta_N(s) = 0$ no tiene solución en $\Re(s) > 1$, para $N = 6, 7, 8$ y 9 (Spira, 1966)
- Dos años mas tarde, el mismo Robert Spira demuestra que $\zeta_N(s)$ si tiene raíces en el semiplano $\Re(s) > 1$ para¹⁰

$$N = 19; 22, 23, 24, 25, 26, 27; 29, 30, 31, \dots, 49 \text{ y } 50$$

- En 1980, W.R. Monach, demuestra que $\zeta_N(s) = 0$ si tiene solución en $\Re(s) > 1$, para $N \geq 51$.(Monach, 1980)
- Cerrando este enfoque en el año 2016 David J. Platt de la universidad de Bristol (Inglaterra) y Timothy S. Trudgian (Australia) demuestran el siguiente resultado. (Platt and Trudgian, 2016) Para

$$1 \leq N \leq 18; \quad N = 20, 21, 28 \tag{2.76}$$

no hay ceros de $\zeta_N(s)$ en el semiplano $\Re(s) > 1$. Para los demás enteros positivos N , si existen infinitos ceros en esta región¹¹.

- Si

$$\varphi_N = \sup \{ \Re(s) / \zeta_N(s) = 0 \} \tag{2.77}$$

en 1983 el matemático estadounidense Hugh Lowell Montgomery, y en el 2001 el matemático británico Robert Charles Vaughan (1945) (Montgomery and Vaughan, 2002) demostrarón que, para $0 < c < \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)$ fijado, existe $N_0(c)$ tal que $\forall N \geq N_0$

$$1 + c \frac{\log(\log N)}{\log N} < \varphi_N \leq 1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \frac{\log(\log N)}{\log N}. \tag{2.78}$$

de donde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = 1$$

- Si

$$\psi_N = \inf \{ \Re(s) / \zeta_N(s) = 0 \} \tag{2.79}$$

¹⁰En esta lista no aparecen los números 20, 21 y 28

¹¹Estos ceros son llamados *los ceros especiales*

el 2009 M. Balazard y O. Velásquez Castañón demostraron que (Balazard and Velásquez Castañón, 2009)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi_N}{N} = -\log 2 \quad (2.80)$$

en particular $|\frac{\psi_N}{N} + \log 2| < \frac{1}{5}$ para todo $N \geq N_0$ y algún N_0 natural, de donde $\psi_N < N(\frac{1}{5} - \log 2)$, así

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = -\infty$$

Para cada N fijo, todos los ceros de $\zeta_N(s)$ están comprendidos en franjas verticales, llamadas *franjas críticas*

$$\{\sigma + it : \psi_N \leq \sigma \leq \varphi_N, t \in \mathbb{R}\}$$

Un resultado clave en el estudio de ψ_N y φ_N es el teorema de equivalencia de Bohr, que permite *torcer* los coeficientes de un polinomio de Dirichlet, como $\zeta_N(s)$ (incluso de una serie) para estudiar de manera más sencilla sus propiedades (Dubon, 2015)

Siendo las sumas parciales de la función zeta de Riemann, funciones casi periódicas Gaspar Mora Martínez de la universidad de Valencia, demuestra un resultado importante sobre la distribución de sus ceros (Mora, 2013a), esto es, toda suma parcial $\zeta_N(s)$ (para $N \neq 2$), posee infinitos ceros en cada semiplano

$$\{z : \Re(z) < 0\} \text{ y } \{z : \Re(z) > 0\}$$

La noción de casi periodicidad, introducida por Harald Bohr, será aquí usada para analizar las proyecciones reales de los ceros de las funciones $\zeta_N(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s}$ (Sepulcre and Vidal, 2018).

En (Mora, 2013b) se investiga la distribución de los ceros de las sumas parciales $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$ de la función zeta de Riemann, siendo el objetivo principal demostrar que para n suficientemente grande, los ceros de $\zeta_n(s)$ se distribuyen de manera uniformemente asintótica dentro de la franja crítica, definida por $\{s : a_n \leq \Re(s) \leq b_n\}$ donde a_n y b_n son los extremos la parte real de los ceros $\zeta_n(s)$.

Con la ayuda del teorema de Kronecker (Hardy and Wright, 1960, Theorem 444) se demuestra que existe N natural, tal que las proyecciones reales de los ceros de $\zeta_n(z)$ son densos en el intervalo $[a_n, b_n]$ para todos $n > N$, esto es

$$\overline{\{\Re(s) : \zeta_n(s) = 0\}} = [a_n, b_n]$$

Se demuestra también que a medida que n aumenta, la anchura de la franja crítica también aumenta, y la distribución de los ceros se vuelve cada vez más uniforme, como se corrobora con la distribución irregular de los ceros para sumas parciales pequeñas. La distribución de los ceros está fuertemente influenciada por los números primos, en particular al mayor primo $p \leq n$. Finalmente se muestra cómo esta influencia, moldea la distribución y densidad de los ceros en la franja crítica.

En (Dubon et al., 2014) se analiza las proyecciones reales de los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann $\zeta_n(s)$ a partir de la función

$$G_n(s) = 1 + 2^s + \cdots + n^s$$

que se relaciona con la función zeta de Riemann por $\zeta_n(s) = G_n(-s)$. Se demuestra que para cualquier $n > 2$, la proyección real de cada cero simple de $G_n(s)$ es un punto de acumulación del conjunto

$$R_n := \overline{\{\Re(s) : G_n(s) = 0\}}$$

es decir, existen infinitos ceros arbitrariamente cercanos a cualquier recta vertical contenida en la franja crítica de $G_n(s)$.

En este artículo se proporciona una caracterización detallada de los ceros de $G_n(s)$ utilizando el concepto de curvas de nivel de una función entera $f(s)$, esto es, las curvas definidas por la ecuación $|f(x + iy)| = k$ para k real no negativo. Luego introduciendo la función auxiliar $G_n^*(s) = G_n(s) - p_{k_n}^s$ donde p_{k_n} es el último primo $\leq n$, se da una nueva caracterización de los conjuntos R_n , esto es, $\sigma \in R_n$ si y solo si la curva de nivel $|G_n^*(s)| = p_{k_n}^\sigma$ interseca a la recta vertical $\Re(s) = \sigma$. Se demuestra también que $R_n \subset R_{n+1}$ cuando $n + 1$ es un número primo.

El principal resultado de este artículo es, si $s_0 = \sigma_0 + it_0$ es un cero simple de $G_n(s)$, entonces existen ε_1 y ε_2 no negativos con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ tal que $[\sigma_0 - \varepsilon_1; \sigma_0 + \varepsilon_2] \subset R_n$.

Es decir, la proyección real de cada cero simple de $\zeta_n(s)$ es un punto de acumulación de $\{\Re(s) / \zeta_n(s) = 0\}$

En (Beliakov and Matiyasevich, 2015) se investiga la aproximación de la función zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ utilizando series de Dirichlet finitas, definidas por la condición de que se anulan en tantos ceros iniciales de la función zeta de Riemann como sea posible, esto es,

$$\Delta_N(s) = \sum_{n=1}^N \delta_{N,n} n^{-s}$$

donde los coeficientes $\delta_{N,n}$ son seleccionados de manera que los primeros $N - 1$ ceros de $\zeta(s)$ sean los ceros de $\Delta_N(s)$. Tomando $N = 2M + 1$, $\delta_{N,1} = 1$ y de la condición $\Delta_N\left(\frac{1}{2} \pm i\gamma_k\right) = 0$ con $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$ para $k = 1, 2, \dots, M$ se tiene que

$$\delta_{N,n} = \frac{\tilde{\delta}_{N,n}}{\tilde{\delta}_{N,1}}$$

donde

$$\tilde{\delta}_{N,n} = (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^{-\bar{\rho}_1} & (n-1)^{-\rho_1} & \dots & (n-1)^{-\bar{\rho}_M} & (n-1)^{-\rho_M} \\ (n+1)^{-\bar{\rho}_1} & (n+1)^{-\rho_1} & \dots & (n+1)^{-\bar{\rho}_M} & (n+1)^{-\rho_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ N^{-\bar{\rho}_1} & N^{-\rho_1} & \dots & N^{-\bar{\rho}_M} & N^{-\rho_M} \end{vmatrix}$$

recordando que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann están en parejas conjugadas, es decir $\zeta(\bar{\rho}_i) = \zeta(\rho_i) = 0$ para todo i . La idea fundamental es explorar la precisión de estas aproximaciones, por lo que los autores emplean aritmética de múltiple precisión para lograr altos niveles de exactitud en sus cálculos, utilizando a menudo hasta 10,000 cifras decimales. Los autores observan también que los coeficientes $\delta_{N,n}$ exhiben una estructura que se relaciona con el comportamiento de los números primos, propiedades descubiertas en experimentos numéricos, que hasta el momento no tienen explicación teórica alguna.

En (Sepulcre, 2016) se investiga el comportamiento de la clausura del conjunto de las proyecciones reales de los ceros de polinomios exponenciales de la forma

$$P(s) = c_1 e^{w_1 s} + c_2 e^{w_2 s} + \dots + c_n e^{w_n s}, \quad c_j \in \mathbb{C}^*$$

donde el conjunto ordenado de frecuencias $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{R}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{Q} , $R_P = \overline{\{\Re(s); P(s) = 0\}}$. Se proporciona una caracterización de R_P basada en un principio geométrico que involucra los módulos de los coeficientes c_j , por ejemplo se demuestra que R_P es invariante con respecto a los cambios en los módulos de los coeficientes c_j ; esta invariancia juega un papel crucial en la determinación del número exacto de huecos en R_P y permite un cálculo preciso de los extremos del intervalo crítico.

El autor explica que el número de huecos en R_P depende del número de soluciones de un conjunto de $(n - 2)$ ecuaciones que involucran los coeficientes c_j .

$$|c_j| e^{w_j \sigma} = \sum_{k=1, k \neq j}^n |c_k| e^{w_k \sigma} \quad (j = 2, \dots, n - 1) \quad (2.81)$$

Para lograr los resultados, se introduce una función auxiliar $F_P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ asociado con $P(s)$ de la forma

$$F_P(\sigma, x) = \sum_{m=1}^n c_m e^{w_m \sigma} e^{x_m i} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{R}$$

y con la ayuda del teorema de Kronecker (Hardy and Wright, 1960, Theorem 444) se demuestra que el conjunto $\text{Img}(F_P(\sigma_0, x))$ coincide con la clausura de $\text{Img}(P(\sigma_0 + it))$; lo que permite dar dos caracterizaciones del conjunto R_P mediante la función auxiliar

- $\sigma \in R_P$ si y solo si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $F_P(\sigma, x) = 0$
- $\sigma_0 \in R_P$ si y solo $|c_j| e^{\sigma_0 w_j} \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |c_k| e^{\sigma_0 w_k}$, $(j = 1, 2, \dots, n)$

Finalmente, se demuestra que R_P o es igual $[a_P, b_P]$ o es la unión disjunta de a lo más $(n-1)$ intervalos cerrados.

En (Mora, 2019) se explora la relación entre la teoría de puntos fijos y los ceros de las sumas parciales $\zeta_n(z)$ de la función zeta de Riemann. El estudio se centra en dos funciones reales $f_n(c)$ y $g_n(c)$ con $c \in \mathbb{R}$, que están asociadas con los extremos del intervalo de variación de la variable x en la curva de nivel $|\zeta_n^*(z)| = p_{\pi(n)}^{-c}$, donde $\zeta_n^*(z) = \zeta_n(z) - p_{\pi(n)}^{-z}$. Se aborda el comportamiento asintótico de los ceros de $\zeta_n(z)$ evidenciando que se dispersan en una franja vertical formando una nube que se desplaza hacia la izquierda a medida que n aumenta, esta nube está limitada por la recta $\Re(z) = 1$ a la derecha, así la distribución de los ceros queda dentro de la franja crítica $[a_{\zeta_n(z)}, b_{\zeta_n(z)}] \times \mathbb{R}$.

El análisis de las propiedades de las funciones $f_n(c)$ y $g_n(c)$ permiten explicar la distribución de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(z)$. Por ejemplo un número real $c \in R_n = \overline{\{\Re(s) / \zeta_n(s) = 0\}}$ si y solo si

$$f_n(c) \leq c \leq g_n(c)$$

Que f_n es continua, creciente sobre \mathbb{R} y acotada superiormente por $a_{\zeta_n^*(s)}$. Que g_n es creciente en \mathbb{R}^- y decreciente en \mathbb{R}^+ . Y los puntos fijos de estas funciones están relacionados al conjunto de números primos \mathcal{P}^* y al conjunto de números compuestos \mathcal{C}^* mayores que 2. En particular, $a_{\zeta_n(z)}$ es un punto fijo de $f_n(c)$ para todo n compuesto.

En el artículo también se demuestra la existencia de un intervalo de densidad mínima para cada $\zeta_n(z)$, esto es, un intervalo cerrado $[A_n, b_{\zeta_n(s)}] \subseteq R_n$ con $a_{\zeta_n(s)} \leq A_n \leq b_{\zeta_n(s)}$, lo que significa que no hay rectas verticales en $[A_n, b_{\zeta_n(s)}] \times \mathbb{R}$ libres de ceros. Si $A_n = a_{\zeta_n(s)}$, se

dice que $\zeta_n(z)$ tiene un intervalo de densidad máxima, que corresponde exactamente al intervalo crítico $[a_{\zeta_n(z)}, b_{\zeta_n(z)}]$. Finalmente con el estudio de los gráficos de $f_n(c)$ y $g_n(c)$ de logran demostrar algunas propiedades del conjunto $\overline{\{\Re(s) : \zeta_n(s) = 0\}}$. Así, la introducción de la teoría de puntos fijos proporciona una nueva herramienta para comprender el complejo comportamiento de estos ceros.

En (Mora and Benítez, 2022) se investiga el comportamiento de las cotas inferiores de las sumas parciales de las series de Dirichlet de clase \mathcal{P} , que contienen como casos particulares a la función zeta de Riemann y eta de Dirichlet.

En este artículo se establece que para las series de Dirichlet en la clase \mathcal{P} , el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{n}$ existe, donde ρ_n son las cotas inferiores de Henry de las sumas parciales $P_n(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_j}{(j+1)^s}$, esto es, ρ_n es la única solución real de la ecuación

$$|\alpha_{n-1}|e^{-\rho \log n} = 1 + \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha_j|e^{-\rho \log(j+1)}$$

También se proporciona una estimativa bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes α_j de la serie. Para series con coeficientes positivos, se demuestra la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{P_n(s)}}{n}$, donde $a_{P_n(s)} = \inf\{\Re(s) / P_n(s) = 0\}$ es la cota inferior de las partes reales de los ceros de las sumas parciales.

El principal resultado de este artículo establece que para las series de Dirichlet en la clase \mathcal{P} con coeficientes positivos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{P_n(s)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{n} = -\log(2)$$

De esta forma se generaliza el resultado de (Velasquez Castanon, 2008) sobre los ceros de sumas parciales de la función zeta de Riemann, y se proporciona nuevos conocimientos sobre el comportamiento asintótico de estos ceros y sus cotas inferiores.

En (Gonek and Ledoan, 2008) se investiga la distribución de los ceros de $F_X(s) = \sum_{n \leq X} n^{-s}$ a la derecha de una recta vertical y hasta una altura T . Aquí $\rho_X = \beta_X + i\gamma_X$ es un cero de $F_X(s)$ y β_X su parte real, $N_X(T)$ el número de ceros hasta la altura T , y $N_X(\sigma, T)$ el número de ceros con parte real $\geq \sigma$. Asumiendo verdadera la hipótesis de Riemann, se demuestra que $\beta_X \leq \frac{1}{2} + \frac{c_2 \log(T)}{\log(X) \log(\log(T))}$ para algún c_2 real y para T suficientemente grande. Ellos demuestran también que los ceros a la derecha de la línea $\Re(s)=1/2$ están en promedio

cerca de $1/2$, esto es, para $X \in [3; T]$

$$\sum_{\substack{\beta_X > 1/2 \\ \gamma_X \leq T}} \left(\beta_X - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{T}{4\pi} \log(\log X) + O\left(\frac{X}{\log X}\right)$$

Y el principal resultado de este artículo, para $X \in [2; T]$, los ceros de $F_X(s)$ para valores arbitrarios de $\Re(s) < 1/2$, es que uniformemente para $\sigma < 1/2$

$$\sum_{\substack{\beta_X > \sigma \\ \gamma_X \leq T}} (\beta_X - \sigma) \leq \left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \frac{T}{2\pi} \log(X) - \frac{T}{4\pi} \log(1 - 2\sigma) + O((\sigma + 1)X) + O(T)$$

Aunque no se tiene una estimativa asintótica para esta suma.

2.3. Marco conceptual

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y no vacío. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* en Ω , si f es derivable en todo punto de Ω . f es holomorfa en z_0 , si existe $U \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $x_0 \in U$ y f es holomorfa en U , por ejemplo:

1. La función $f(z) = e^{1/z}$ es holomorfa en \mathbb{C}^*
2. La función $g(z) = 1 + 2^{-z}$ es holomorfa en \mathbb{C} .

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y no vacío, la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *meromorfa* en Ω , si existe un subconjunto $P \subset \Omega$ discreto tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$, y cada punto de P es un polo, por ejemplo:

1. Toda función racional $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es meromorfa en \mathbb{C} con¹² $P = Z(q(z))$, finito.
2. La función $f(z) = \cot(\pi z)$ es meromorfa no racional con $P = \mathbb{Z}$, infinito numerable.

Otro concepto de uso frecuente es el de función analítica, que definimos ahora. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y no vacío, la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica* en $\xi \in \Omega$, si existe $D_r(\xi) \subset \Omega$ y existe una serie de potencias (centrado en ξ) $\sum_{n \geq 0} c_n(z - \xi)^n$, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \xi)^n \quad \forall z \in D_r(\xi)$$

y se dice que f es analítica en Ω , si f es analítica en todo punto de Ω . Denotamos por $A(\Omega)$ y $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones analíticas y holomorfas (respectivamente) en Ω , el

¹² $Z(q)$ es el conjunto de los ceros de q

teorema de Goursat (Conway, 2012) dice que estos conjuntos son indistintos. Un resultado trascendente es el principio de prolongación analítica, que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 17. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Son equivalentes:*

1. $f = 0$ en Ω .
2. $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.
3. $\exists z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(m)}(z_0) = 0 \quad \forall m \geq 0$.
4. $\exists z_0 \in \Omega, \exists r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset \Omega$ y $f = 0$ en $D_r(z_0)$.

Dada la serie que define la *función zeta de Riemann* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ sobre $\Re(s) > 1$, las sumas parciales de esta serie, es la sucesión de sumas finitas truncadas, esto es

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{k^s} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1)$$

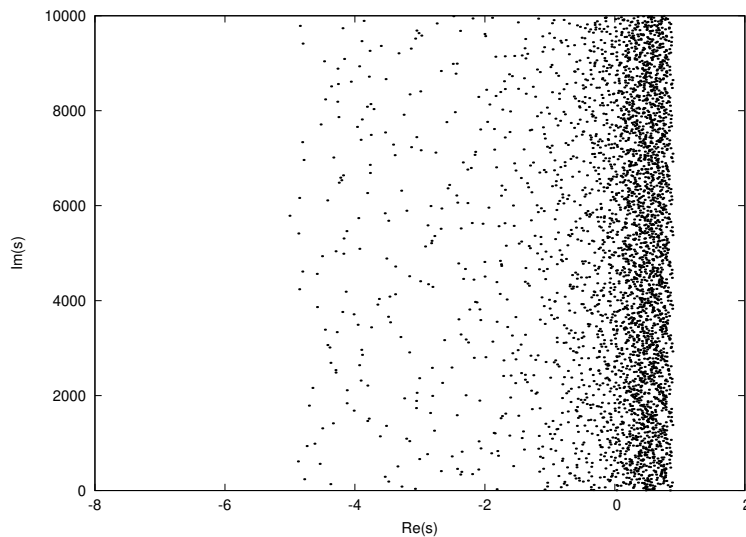


Figura 2.6: Nube de ceros de $\zeta_9(s)$

Diremos también que $s \in \mathbb{C}$ es un *cerro de la función* $\zeta_n(s)$, si $\zeta_n(s) = 0$. Por ejemplo

$$\zeta_2(s) = 0 \iff 1 + \frac{1}{2^s} = 0 \iff 2^s = -1 \iff z = \frac{\pi(2k+1)}{\log 2}i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en este caso, conocemos todos los ceros de $\zeta_2(s)$ y están distribuidos sobre el eje imaginario $\Im(s)$. Para $n \geq 3$ natural, los ceros de las sumas parciales de $\zeta_n(s)$ genera una *nube de puntos* en ciertas regiones del plano, distribución que aquí investigamos.

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Hipótesis central de la investigación

La nube de ceros de los polinomios de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$ se encuentran en bandas verticales $\psi_n(T) \leq \Re(s) \leq \varphi_n(T)$ distribuidas de forma casi periódica con mayor densidad alrededor de la banda crítica $0 < \Re(s) < 1$.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

Variables independientes:

- La altura T del rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$.
- El número de términos n , del polinomio de Dirichlet $\zeta_n(s)$.
- Los números complejos s de la región $\mathcal{R}_n(T)$.

Variables dependientes:

- Los ceros del polinomio de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$.
- El tiempo t en segundos, usado al calcular los ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$.
- El número de ceros $N_n(T)$ en cada nube de ceros de $\zeta_n(s)$ sobre $\mathcal{R}_n(T)$.
- Los extremos inferior $\psi_n(T)$ y superior $\varphi_n(T)$ de la parte real de la nube de ceros de los polinomios de Dirichlet $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$.
- La función de distribución $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma)$ de los ceros de $\zeta_n(s)$, para $\sigma \in [\psi_n, \varphi_n]$.

Definición conceptual

- **Los ceros de $\zeta_n(s)$.** Un cero de $\zeta_n(s)$ es un número complejo $s = \sigma + it$ ($s, t \in \mathbb{R}$) que satisface la ecuación $\zeta_n(s) = 0$.
- **Alta precisión.** Una raíz o cero de $\zeta_n(s)$ se considera que tiene alta precisión, si su valor es exacto hasta por lo menos 20 cifras decimales.
- **Nube de ceros.** Si graficamos todos los ceros calculados de $\zeta_n(s)$ con una altura prefijada, se genera una conglomerado de puntos que se asemeja a una nube, por la gran cantidad de ceros calculados y el poco espacio que disponemos para mostrarlos.
- **Densidad.** Al observar la nube de ceros, vemos que la distribución no es uniforme, la noción de mayor o menor concentración de dichos ceros, es la *densidad*.

Definición operacional

- **Los ceros de $\zeta_n(s)$.** Determinar analíticamente los ceros de $\zeta_n(s)$ en regiones acotadas de la forma $\mathcal{R}_n(T)$, utilizando algún algoritmo computacional en un lenguaje de programación robusto.
- **Nube de ceros.** Determinar gráficamente los ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$, haciendo uso de algún graficador, que nos permita visualizar datos matemáticos almacenados matricialmente.
- **Densidad.** La densidad de la nube de ceros será analizada construyendo una función de distribución de variable continua $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ en el intervalo $[\psi_n; \varphi_n]$.

Indicadores

- **Los ceros de $\zeta_n(s)$**
 - Calcular el extremo inferior de la parte real de los ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$
 - Calcular el extremo superior de la parte real de los ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$
 - Contar el número de ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$
- **Nube de ceros**
 - Determinar una matriz de pares ordenados, cuyas componentes sean la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de cada cero de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$.

- Identificar un graficador que nos permita visualizar los elementos de esta matriz.
 - Mostrar la nube de ceros, para cada valor elegido de n .
- **Densidad**
- Para cada n , corroborar que en su distribución gráfica hay cierta acumulación en la banda vertical $0 < \Re(s) < 1$
 - Identificar el intervalo de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$, esto es $[\psi_n(T) : \phi_n(T)]$.
 - Construir la función de distribución de variable continua $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ en el intervalo $[\psi_n; \phi_n]$.

3.3. Métodos de la investigación

El método de la investigación es de tipo básica, descriptiva-demostrativa y computacional desde que buscamos una mejor explicación del problema en estudio y/o ampliar el conocimiento existente, tratando en lo posible de aproximarnos a resolver uno de los problemas del milenio “*la hipótesis de Riemann*”.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

Nuestro proceso de investigación ha seguido las siguientes etapas:

- Después de revisar la literatura existente, se ha elegido una forma de calcular los ceros de las funciones holomorfas en regiones rectangulares, y para el cálculo de los ceros con alta precisión se ha elegido trabajar con \mathbb{C}^{++}
- Utilizando las técnicas del análisis complejo y la programación se ha diseñado un programa que genere la nube de ceros de cada función $\zeta_n(s)$, para algunos valores relevantes de n .
- Corroboramos aquí la existencia de las cotas superior e inferior de las partes reales de los ceros de nuestra función objeto $\zeta_n(s)$.
- También se ha analizado la función *eta*, como una función que “aproxima” en cierto sentido, a la función objeto.

3.5. Población y muestra

- **Población:** En esta investigación nuestra población es el conjunto de los polinomios de Dirichlet $\mathcal{P}_D(\Omega)$, definidos sobre $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, es decir, expresiones de la forma

$$p(s) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (3.1)$$

donde $a_k \in \mathbb{C}$ ($0 \leq k \leq n$), $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ y $s \in \mathbb{C}$.

- **Muestra:** Una familia finita de polinomios de Dirichlet, definidos en (1.1)

$$\zeta_3(s), \zeta_4(s), \zeta_5(s), \dots, \zeta_{22}(s), \zeta_{508}(s) \text{ y } \zeta_{2024}(s)$$

generada por la función zeta de Riemann en $\Omega : \Re(s) > 1$.

3.6. Actividades del proceso investigativo

- Se ha analizado la teoría de Bohr sobre la noción de casi-periodicidad y los teoremas de equivalencia de Bohr, que son utilizadas en nuestras demostraciones.
- Se ha reconstruido la demostración de existencia de cotas de los polinomios de Dirichlet, existentes en revistas especializadas, para aplicar nuestro método numérico con certeza.
- Se ha diseñado un programa en \mathbb{C}^{++} , para determinar los ceros de las sumas parciales, generando nuestra base de datos, que acopiamos como tripletes.
- Usando Python se ha convertido estos datos en números complejos, y con gnuplot se ha graficado la nube de ceros de nuestra función objeto $\zeta_n(s)$ en ciertas regiones rectangulares con altura significativa.
- Con los datos como números complejos, usando PARI/GP, determinamos las cotas $\psi_n(T)$, $\varphi_n(T)$, y hacemos la cuenta del número de ceros de $\zeta_n(s)$ en $\mathcal{R}_n(T)$ para cierta altura T prefijada.
- Se revisa la última información disponible sobre la hipótesis de Riemann, que afirma su verdad hasta una altura de 3×10^{12} (Platt and Trudgian, 2020)

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

La técnica de recolección de datos fue el análisis e interpretación de la información registrada por muchos investigadores en revistas científicas actualizadas.

También se ha usado técnicas lógicas de inducción, deducción y análisis, al hacer las demostraciones y verificaciones de los principales resultados de nuestro problema de investigación. Un instrumento de uso frecuentemente es el uso de los repositorios académicos disponibles y actualizados en tiempo real, que nos han permitido interactuar, inclusive, con especialistas de otros continentes.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

Para la obtención concreta de los datos, los ceros de las sumas parciales, se ha construido un programa en C++, con el respaldo del trabajo de X.Ying y N. Katz sobre un método confiable en computación paralela para calcular los ceros de las funciones analíticas en regiones acotadas (Ying and Katz, 1988), y el apoyo de Víctor Racsó Galvan, especialista en ciencias de la computación de la UNI en la parte de la programación en paralelo.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

En este trabajo, la mayor base de datos recolectada para el análisis, está constituida por los ceros de las sumas parciales de la función zeta $\zeta_n(s)$, para distintos valores de n . Con ellos, realizamos el siguiente procesamiento básico, para un valor de n fijo:

- Graficado de los ceros.
- Cálculo de estadísticas básicas: conteo, mínimo y máximo de las partes reales.

Con el fin de ordenar el estudio de la distribución de los ceros, se realiza, para un valor fijo de σ , el conteo del número de ceros de $\zeta_n(s)$ de parte real $\leq \sigma$, y luego la proporción con respecto al número total de ceros calculados, obteniendo una distribución discreta de probabilidad. Este procedimiento, constituye la base para la introducción posterior de la distribución de probabilidad asintótica de las partes reales de los ceros, y su análisis.

Luego, analizamos el movimiento de estas distribuciones en función de los valores de $n \geq 2$. En el estudio de las simetrías de nuestros ceros, realizamos un graficado de los ceros reducidos módulo determinadas combinaciones de periodos de los términos de las funciones estudiadas. Esto se liga a la distribución en curvas de estos ceros reducidos, estudiados en conjunción del método de reducción de sistemas no lineales basado en bases de Gröbner.

Capítulo 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. El método numérico

El comportamiento de los polinomios de Dirichlet $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda_k s}$, donde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ y $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, para $s \in \mathbb{C}$ es de interés en el estudio del problema de Lagrange sobre el movimiento medio, en el tratamiento de las perturbaciones de los planetas grandes, como se hace en el trabajo de (Jessen and Tornehave, 1945), donde se estudian varios aspectos de estos polinomios, en particular, la casi periodicidad de las funciones. Esta última propiedad también se transmite al conjunto de ceros, relevante para nuestro estudio. Entonces, aquí encaramos el problema de calcular los ceros de los polinomios de Dirichlet en regiones acotadas del plano complejo, que reduciremos a calcular los ceros en regiones rectangulares.

Mientras se buscaba un método confiable y preciso para calcular los ceros de las funciones analíticas, encontramos un resultado de (Ying and Katz, 1988, p. 144–145) el cual establece que un número finito de valores de una función y de sus derivadas, por sí solos, no son suficientes para determinar el número de ceros de una función analítica, o incluso de una función polinomial complejo, en una región acotada. Por lo tanto, la clave de un algoritmo confiable para calcular los ceros, es el uso de datos globales sobre la función dada.

Podemos rastrear el método de encontrar ceros de funciones analíticas, hasta el trabajo de (Delves and Lyness, 1967) donde describen varios métodos y sus dificultades. El método propuesto por Delves y Lyness es el cálculo de la integral relacionada con el principio del argumento, abordado por fórmulas de cuadratura. Ellos también discuten la idea de subdivisión de nuestra región de cálculo. Sin embargo, el control del error de la integral es difícil, porque implica acotar superiormente $|f'/f|$, y esto está relacionado con la cota inferior de

$|f|$, luego relacionado con la no anulación del denominador, por tanto relacionado con el problema que estamos tratando de resolver. Delves y Lyness también describen una estrategia de subdivisión de rectángulos, aunque no tan buena, porque genera superposiciones.

Otra estrategia de subdivisión se describe en el trabajo de (Dellnitz et al., 2002), que llaman el algoritmo QZ-40, que es similar a nuestro método. El resultado de (Dellnitz et al., 2002, Proposition 3.2) establece su convergencia.

Nuestro método propuesto se basa en una variación del cálculo de argumento, criterio derivado de (Ying and Katz, 1988). Este algoritmo calcula el número de ceros dentro de un rectángulo dado utilizando una cota global para la segunda derivada, que no es una condición tan fuerte, al menos para algunas funciones particulares, como los polinomios exponenciales que nos interesan aquí. Generamos un método adaptativo para calcular la variación del argumento, luego el número de ceros de una función dentro de cualquier rectángulo dado. Posteriormente, un método de bisección bidimensional que nos permita aislar los ceros y aplicar el método de Newton para calcularlos.

También (Ying and Katz, 1989) implementó un método basado en (Ying and Katz, 1988) donde hablan del proceso de subdivisión, pero el procedimiento es recursivo. Desarrollamos aquí una herramienta interesante que llamamos *el criterio de exclusión*, siempre que se cumpla la condición dada, de lo contrario, descartamos el rectángulo correspondiente y continuamos trabajando para averiguar si hay o no ceros dentro de cada rectángulo.

Otro método de bisección-exclusión se analiza a minuciosamente, incluyendo la complejidad en el trabajo de (Yakoubsohn, 2005). La idea de subdivisión, descrita como un proceso de descomposición recursiva es estudiada recientemente en el trabajo de (García-Zapata et al., 2019), donde los autores sugieren la necesidad de paralelizar el método.

4.1.1. Conteo de ceros por el principio del argumento

Recordamos algunos hechos básicos del análisis complejo, referenciamos al lector a (Amar and Matheron, 2004, §5.4). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco (una función continua con derivada en todos los puntos de $[a, b]$, excepto para una colección finita de puntos, donde tiene derivadas laterales finitas). Una *determinación continua del argumento* de γ es una función continua $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$e^{i\theta(t)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Se garantiza que tal función θ existe para un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sin más condiciones. Con estas notaciones, la *variación del argumento* a lo largo de γ es

$$\Delta_\gamma \arg = \theta(b) - \theta(a).$$

Ahora, supongamos que tenemos una función argumento \arg con valores en el intervalo $] - \pi/2, \pi/2[$, tal que, si s_1, s_2 son dos números complejos verificando $|\Delta_{[s_1, s_2]} \arg| < \pi$, tenemos $\Delta_{[s_1, s_2]} \arg = \arg\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$.

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $R \subset \Omega$ una región cuya frontera $\partial R \subset \Omega$ puede ser parametrizada como un arco simple, orientado en sentido antihorario. Como establece el principio del argumento, (Amar and Matheron, 2004, Proposition 8.3.2) el número de ceros de $f(s)$ en R , $N(R)$, esta dada por

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{f \circ \partial R} \arg.$$

Pero entonces, si R es una región poligonal contenida en Ω tal que $\partial R = \bigcup_{i=0}^{n-1} [z_i, z_{i+1}]$, donde $z_i = s_1, z_{i+1} = s_2$, y para $i = 0, \dots, n-1$, la variación del argumento es $|\Delta_{f \circ [z_i, z_{i+1}]} \arg| < \pi$, entonces

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{f \circ [z_i, z_{i+1}]} \arg = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \arg\left(\frac{f(z_{i+1})}{f(z_i)}\right).$$

El criterio de (Ying and Katz, 1988, Theorem 2.1) nos permite determinar los puntos z_i para dividir una curva dada ∂R y calcular la variación del argumento de $f \circ \partial R$.

En lo que sigue, $\langle z, w \rangle = \Re(z\bar{w})$ denota el producto escalar (real) en \mathbb{C} .

Teorema 18 (Ying and Katz). *Sea $P(s)$ una función afín compleja, $f(s)$ una función holomorfa sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, y $R(s)$ la función definida por $R(s) = f(s) - P(s)$. Si*

$$\min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| > \max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)|, \quad (4.1)$$

entonces

$$|\Delta_{f \circ [s_1, s_2]} \arg| < \pi \quad y \quad \Delta_{f \circ [s_1, s_2]} \arg = \arg\left(\frac{f(s_2)}{f(s_1)}\right).$$

Mas precisamente, si $s_0 \in [s_1, s_2]$ es tal que $P(s_0) = \min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| > 0$, entonces para todo $s \in [s_1, s_2]$

$$\langle f(s), P(s_0) \rangle > 0.$$

Demostración. Como $P([s_1, s_2])$ es un conjunto convexo que no contiene al cero, sea $P(s_0)$ la proyección del 0 sobre este conjunto, por una caracterización geométrica clásica de este punto (Brezis and Brézis, 2011, Theorem 5.2) se tiene que, para todo $s \in [s_1, s_2]$

$$\langle P(s) - P(s_0), 0 - P(s_0) \rangle \leq 0,$$

o bien

$$\langle P(s), P(s_0) \rangle \geq |P(s_0)|^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle f(s), P(s_0) \rangle &= \langle P(s) + R(s), P(s_0) \rangle \\ &= \langle P(s), P(s_0) \rangle + \langle R(s), P(s_0) \rangle \\ &\geq |P(s_0)|^2 - |R(s)| \cdot |P(s_0)| \\ &\geq \left(\min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| - \max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| \right) \cdot |P(s_0)| > 0. \end{aligned}$$

□

También corroboramos, con una pequeña mejora, el resultado (Ying and Katz, 1988, Lemma 2.1).

Lema 13. Sea $f(s)$ una función holomorfa sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, $P(s)$ y $R(s)$ definidos por

$$P(s) = f(s_1) + \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1}(s - s_1)$$

y $R(s) = f(s) - P(s)$. Si $M(s_1, s_2)$ es tal que para todo $s \in [s_1, s_2]$,

$$|f''(s)| \leq M(s_1, s_2),$$

entonces

$$\max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| \leq M(s_1, s_2) \frac{|s_1 - s_2|^2}{8}.$$

Demostración. En una variable real, esto podría ser una aplicación directa de la fórmula del resto en la interpolación de Lagrange, pero en variable compleja esto requiere de un retoque. En efecto, sea $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ fijo arbitrario, y definimos $f_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_u(t) = \left\langle f(s_1 + t(s_2 - s_1)), u \right\rangle.$$

También definimos la interpolación (lineal) polinomial $P_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_u(0) = f_u(0) = \langle f(s_1), u \rangle, \quad P_u(1) = f_u(1) = \langle f(s_2), u \rangle,$$

así que

$$\begin{aligned} P_u(t) &= P_u(0) + t(P_u(1) - P_u(0)) \\ &= \left\langle f(s_1) + t(f(s_2) - f(s_1)), u \right\rangle \\ &= \left\langle P(s_1 + t(s_2 - s_1)), u \right\rangle. \end{aligned}$$

La aplicación de la fórmula del error en la interpolación polinomial (Stoer and Bulirsch, 2002, Theorem 2.1.4.1, p.49) para $n = 1$ nos dá, la existencia, para cada $t \in]0, 1[$, de $\xi_t \in]0, 1[$ tal que

$$f_u(t) - P_u(t) = \frac{f_u''(\xi_t)}{2!} t(t-1),$$

que se transforma en

$$\langle R(t), u \rangle = \frac{\left\langle f''(s_1 + \xi_t(s_2 - s_1))(s_2 - s_1)^2, u \right\rangle}{2} t(t-1).$$

Usando la cota $M(s_1, s_2)$ para $|f''(s)|$ en $[s_1, s_2]$, y teniendo en cuenta que $0 \leq t(1-t) \leq 1/4$ para todo $t \in [0, 1]$ obtenemos

$$|\langle R(t), u \rangle| \leq \frac{1}{8} M(s_1, s_2) |s_2 - s_1|^2.$$

Finalmente, para $t \in [0, 1]$ es suficiente elegir u tal que $\langle R(t), u \rangle = |R(t)|$ y reescribir la desigualdad anterior \square

Este lema reemplaza el cálculo del máximo de $|R(s)|$ por un cálculo más simple, a partir de alguna cota de $|f''(s)|$ en el intervalo $[s_1, s_2]$. El cálculo del mínimo de la norma de $P(s)$ también es directa de acuerdo a (Ying and Katz, 1988, Lemma 2.2), en efecto, dado que P es una función afín $P([s_1, s_2]) = [P(s_1), P(s_2)]$, y para cualquier $t \in [0, 1]$

$$P(s_1 + t(s_2 - s_1)) = P(s_1) + t(P(s_2) - P(s_1))$$

En el siguiente lema, demostraremos que

$$\min_{z \in [z_1, z_2]} |P(z)| \in \left\{ \frac{\Im(P(z_1)\overline{P(z_2)})}{|P(z_1) - P(z_2)|}, |P(z_1)|, |P(z_2)| \right\} \quad (4.2)$$

Lema 14. Sea $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$,

$$m = \min_{t \in [0, 1]} |a + t(b - a)|.$$

Si t^* representa el valor único en el intervalo $[0, 1]$ que realiza el mínimo, $m = |a + t^*(b - a)|$, entonces:

1. Si $\Re(a\bar{b}) \geq |a|^2$, entonces $m = |a|$, $t^* = 0$.
2. Si $\Re(a\bar{b}) \geq |b|^2$, entonces $m = |b|$, $t^* = 1$.
3. En cualquier otro caso

$$m = \frac{|\Im(a\bar{b})|}{|b-a|} \quad y \quad t^* = \frac{|a|^2 - \Re(a\bar{b})}{|b-a|^2}.$$

Demostración. Sea $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $\min_{t \in \mathbb{R}} |a + t(b-a)| = |a + t^*(b-a)|$, entonces

$$0 = \langle b-a, a + t^*(b-a) \rangle = \langle b, a \rangle - |a|^2 + t^*|b-a|^2 = \Re(a\bar{b}) - |a|^2 + t^*|b-a|^2$$

de donde

$$t^* = \frac{|a|^2 - \Re(a\bar{b})}{|b-a|^2} \tag{4.3}$$

Caso 1. $\Re(a\bar{b}) \geq \min\{|a|^2, |b|^2\}$

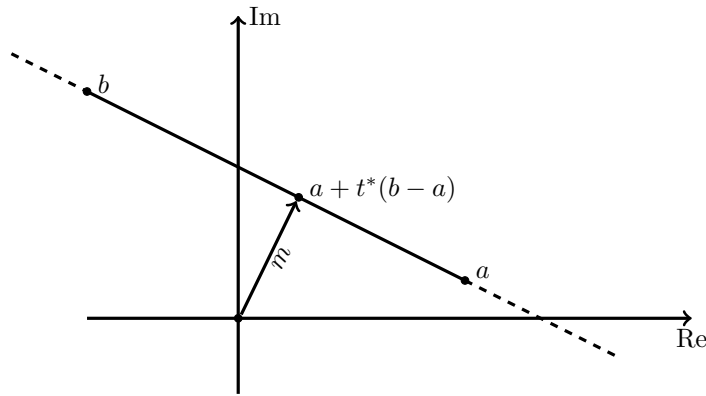


Figura 4.1: Mínimo del segmento $[a, b]$ al cero

- $\Re(a\bar{b}) \geq |a|^2$, entonces $t^* \leq 0$, de donde $t^* = 0$ y $\min_{t \in [0,1]} |a + t(b-a)| = |a|$.
- Si $\Re(a\bar{b}) \geq |b|^2$, entonces $t^* = \frac{|a|^2 - \Re(a\bar{b})}{|b-a|^2} = \frac{|a|^2 - \langle a, b \rangle}{|b-a|^2} \geq 1$, puesto que $\langle a, b \rangle \geq |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 + \langle a, b \rangle \geq |a|^2 + |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 - \langle a, b \rangle \geq |a|^2 + |b|^2 - 2\langle a, b \rangle = |b-a|^2$
de donde $t^* = 1$ y $\min_{t \in [0,1]} |a + t(b-a)| = |b|$.

Caso 2. $\Re(a\bar{b}) < \min\{|a|^2, |b|^2\}$, por tanto $t^* \in \langle 0, 1 \rangle$ y

$$|a + t^*(b - a)| |\overline{b - a}| = |\overline{a\bar{b}} - |a|^2 + t^*|b - a|^2| = |\overline{a\bar{b}} - \Re(a\bar{b})| = |i\Im(a\bar{b})|$$

la igualdad central se debe a (4.3). Así,

$$\min_{t \in [0,1]} |a + t(b - a)| = |a + t^*(b - a)| = \frac{|\Im(a\bar{b})|}{|b - a|}$$

□

Este lema (14), es implementado en el Algoritmo (2)

Algoritmo 2 get_min(a, b)

Entrada: $a, b \in \mathbb{C}$

Salida: El mínimo de $p(z) = (1 - t)a + tb$ para $0 \leq t \leq 1$

- 1: $c \leftarrow a\bar{b}$
 - 2: **si** $\Re(c) \geq |a|^2$ **entonces** ▷ cuando el mínimo está en $t \leq 0$
 - 3: **devolver** $|a|$
 - 4: **fin si**
 - 5: **si** $\Re(c) \geq |b|^2$ **entonces** ▷ cuando el mínimo está en $t \geq 1$
 - 6: **devolver** $|b|$
 - 7: **fin si**
 - 8: **devolver** $|\Im(c)|/|b - a|$ ▷ cuando el mínimo está en $0 < t < 1$
-

Con toda esta información, nuestro criterio de discretización del contorno consiste en determinar segmentos más pequeños $[s'_1, s'_2]$ tales que

$$\min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)| > M(s'_1, s'_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8} \quad (4.4)$$

esto, junto con el Lema 13, nos da la condición del Teorema 18 para $f(s)$ sobre $[s'_1, s'_2]$.

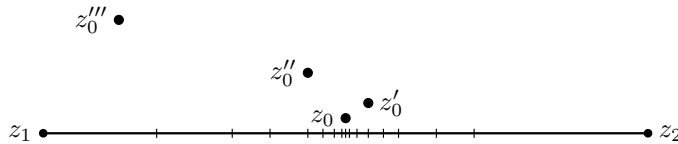


Figura 4.2: Discretización de un segmento dado. A medida que nos acercamos a un grupo de ceros, el argumento varía más rápidamente y necesitamos más subdivisiones de segmentos.

La siguiente proposición, asegura la existencia de una discretización conveniente para un segmento del plano complejo que no contiene ningún cero de $f(s)$, lo que nos permitirá calcular la variación del argumento de la función sobre dicho segmento.

Proposición 15 (Convergencia). *Dada una función holomorfa $f(s)$ sin cero sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, y $M(s_1, s_2) > 0$ tal que, para todo $s \in [s_1, s_2]$, $|f''(s)| \leq M(s_1, s_2)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $[s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2]$, $|s'_1 - s'_2| < \delta$, y $P(s)$ dada por*

$$P(s) = f(s'_1) + \frac{f(s'_2) - f(s'_1)}{s'_2 - s'_1}(s - s'_1),$$

se tiene que

$$\min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)| > M(s_1, s_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8} \geq \max_{s \in [s'_1, s'_2]} |R(s)|,$$

donde $R(s) = f(s) - P(s)$.

Demostración. Primero

$$m = \min_{s \in [s_1, s_2]} |f(s)| = \text{dist}\left(0, f([s_1, s_2])\right) > 0.$$

Por la continuidad uniforme, existe $\delta' > 0$ tal que, para $x, y \in [s_1, s_2]$, $|x - y| < \delta'$, implica que $|f(x) - f(y)| < m/2$. Si $[s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2]$ es tal que $|s'_1 - s'_2| < \delta = \min\left\{\delta', 2\sqrt{\frac{m}{M(s_1, s_2)}}\right\}$, entonces $|f(s'_1) - f(s'_2)| < m/2$, de donde

$$|P(s)| \geq |f(s'_1)| - |f(s'_1) - f(s'_2)| > \frac{m}{2},$$

y

$$\min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)| \geq \frac{m}{2} > M(s_1, s_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8} \geq \max_{s \in [s'_1, s'_2]} |R(s)|.$$

donde la desigualdad estricta viene de $\frac{4m}{M(s_1, s_2)} > |s'_1 - s'_2|^2$, equivalente a $|s'_1 - s'_2| < 2\sqrt{\frac{m}{M(s_1, s_2)}}$, lo que concluye nuestra demostración. \square

Al intentar obtener (4.4), puede ocurrir que $M(s_1, s_2)$ sea demasiado grande como cota, o que $\min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)|$ sea demasiado pequeño. Por ejemplo, si existe algún cero de $f(s)$ cerca del segmento $[s'_1, s'_2]$, la condición nunca se cumplirá, puesto que $|s'_1 - s'_2|$ se volverá demasiado pequeño. Por tanto, se debe considerar un tope de tolerancia en nuestro método. De lo contrario, los valores demasiado pequeños de $|s'_1 - s'_2|$ necesitarán demasiados pasos para calcular la variación del argumento en $[s_1, s_2]$, y acumularán demasiados errores de redondeo. La mejor estrategia será buscar valores grandes de $|s'_1 - s'_2|$ cuando sea posible y, dado que consideramos una variación suave del argumento en cada segmento, la mejor opción será trabajar con un *método adaptativo*.

Observación: 1. Si $f(s)$ admite ceros en el intervalo $[s_1, s_2]$, la condición (4.1) no quedará satisfecha y nuestro método generará una secuencia de pasos que convergen a cero, que no permitirá la elección de $[s'_1, s'_2]$ cubriendo este cero. El criterio de parada nos dirá que cambiemos nuestra elección del intervalo.

Implementamos un método de búsqueda en el segmento por retroceso, similar al Algoritmo 3.1 en (Nocedal and Wright, 2006) con criterios de parada (4.4). Requerimos si, una cota *monótona* para $|f''(s)|$, en el sentido que

$$\text{si } [s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2], \text{ entonces } M(s'_1, s'_2) \leq M(s_1, s_2).$$

Esto nos permitirá evitar recalcular la costosa cota superior $R(s_1, s_2) = M(s_1, s_2) \frac{|s_2 - s_1|^2}{8}$ por $|R(s)|$, $s \in [s_1, s_2]$ con demasiada frecuencia, ya que

$$\text{si } [s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2], \text{ entonces } R(s'_1, s'_2) \leq R(s_1, s_2) \frac{|s'_2 - s'_1|^2}{|s_2 - s_1|^2}. \quad (4.5)$$

El método resultante, nos permite calcular la variación del argumento de una función a lo largo de un segmento (por lo tanto, en cualquier curva poligonal), lo que se establece en Algoritmo (3).

4.1.2. Método de bisección bidimensional

Dado el método para calcular el número de ceros dentro de un rectángulo, ahora estamos en la posición de dar un método para calcularlos, previamente los aislaremos.

Estrategia general de subdivisión

Nuestra principal suposición es que $f(s)$ no tiene ceros sobre la frontera ∂R de nuestro primer rectángulo. Dividimos el rectángulo por el lado más largo, calculando los puntos medios del lado más grande, luego se calcula la variación del argumento entre los puntos medios y se divide el rectángulo.

Este último paso puede fallar si nuestra función tiene ceros sobre o cerca del segmento elegido para la subdivisión. Pero entonces, volvemos a calcular el argumento de una pequeña perturbación del segmento de subdivisión. De esta manera, nos aseguramos de que, en cada paso, no haya ceros en la frontera de los rectángulos posteriores. El proceso se muestra en la figura 4.1.2.

En cada paso obtenemos dos rectángulos de menor diámetro, que se pueden tratar de forma similar. Esta particular configuración se describirá en la sección 4.1.4. Los rectángulos dados

Algoritmo 3 $\text{var_arg}(s_1, s_2)$

Entrada: $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ **Salida:** La variación del argumento de $f(s)$ sobre $[s_1, s_2]$

```
1:  $d \leftarrow s_2 - s_1$ 
2:  $s_3 \leftarrow s_1$ 
3:  $t \leftarrow 1$ 
4:  $t_0 \leftarrow 0$ 
5:  $dx \leftarrow \varepsilon_3$ 
6:  $dy \leftarrow \varepsilon_3$ 
7:  $ans \leftarrow 0$ 
8: mientras  $t_0 + \varepsilon_1 < 1$  hacer
9:    $s_4 \leftarrow s_3 + td$ 
10:   $fs_3 \leftarrow f(s_3)$ 
11:   $R_0 \leftarrow M(s_3, s_4) \frac{|s_4 - s_3|^2}{8}$ 
12:   $minP \leftarrow \text{get\_min}(fs_3, f(s_4))$ 
13:  mientras  $minP \leq R_0 + \varepsilon$  y  $t > \varepsilon_2$  hacer
14:     $t \leftarrow t/2$ 
15:     $R_0 \leftarrow R_0/4$  ▷ por (4.5)
16:     $s_4 \leftarrow s_3 + td$ 
17:  fin mientras
18:  si  $t \leq \varepsilon_2$  entonces
19:    devolver FAIL
20:  fin si
21:   $ans \leftarrow \arg(f(s_4)/f(s_3))$ 
22:   $t_0 \leftarrow t_0 + t$ 
23:   $s_3 \leftarrow s_3 + dt$ 
24:  si  $|(s_2 - s_3)/(s_2 - s_1)| < 2t$  entonces
25:     $t \leftarrow |(s_2 - s_3)/(s_2 - s_1)|$ 
26:  si no
27:     $t \leftarrow 2t$ 
28:  fin si
29:  si  $t > 1 + \varepsilon_1 - t_0$  entonces
30:     $t \leftarrow 1 + \varepsilon_1 - t_0$ 
31:  fin si
32: fin mientras
33: devolver  $ans$ 
```

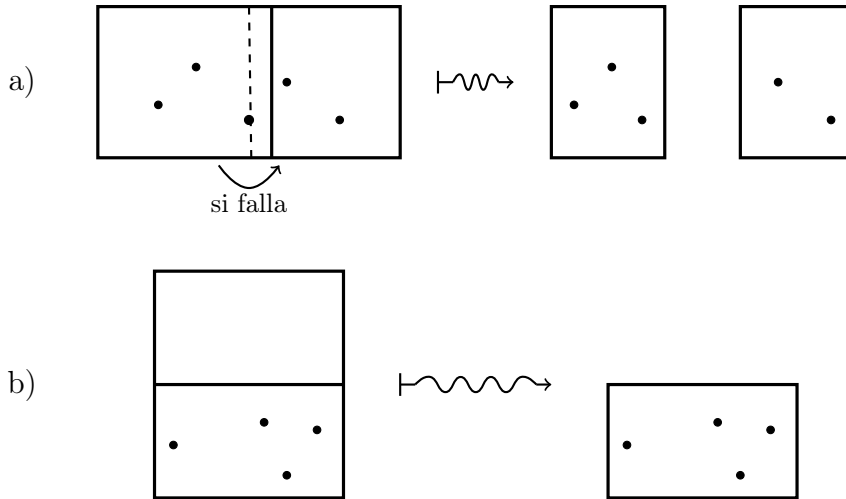


Figura 4.3: Bisección y estrategia de exclusión

también podrían excluirse directamente utilizando el método de exclusión que describiremos a continuación.

Finalmente, tendremos una colección de ceros aislados, dentro de rectángulos de tamaño equilibrado, que convergerán a los ceros contenidos. Como este proceso es lento, lo aceleraremos combinándolo con el método de Newton.

Método de exclusión

Recordemos ahora el método de exclusión descrito en (Ying and Katz, 1989, Theorem 2.2), reiterada de la siguiente manera. Requerimos de una función $N(z_1, z_2)$ que proporcione una cota para la segunda derivada de $f(s)$ dentro de un rectángulo $R(z_1, z_2)$ con esquinas opuestas z_1 y z_2 :

$$|f''(s)| \leq N(z_1, z_2), \text{ para } s \in R = R(z_1, z_2),$$

Teorema 19. *Sea $f(s)$ una función holomorfa sobre un rectángulo R cuya esquina inferior izquierda es z_1 y su esquina superior derecha es z_2 . Sea $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ el centro del rectángulo, $r = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$ y $N(z_1, z_2)$ tal que*

$$\max_{z \in R} |f''(z)| \leq N(z_1, z_2).$$

Entonces, para todo $z \in R$

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| - |f'(z_0)|r - \frac{1}{2}N(z_1, z_2)r^2.$$

Por tanto, si el lado derecho de esta última desigualdad es positivo, entonces $f(s)$ no tiene ningún cero sobre R .

Demostración. Como en la demostración del Lema 13, necesitamos algunos retoques para que la prueba funcione. Sea $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$, $z \in R$ y

$$f_u(t) = \langle f(z_0 + t(z - z_0)), u \rangle, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Por el teorema de Taylor con resto de Lagrange, existe $0 < t_u < 1$ tal que

$$f_u(1) = f_u(0) + f'_u(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}f''_u(t_u),$$

que se transforma en

$$\langle f(z), u \rangle = \langle f(z_0), u \rangle + \langle f'(z_0)(z - z_0), u \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(z_0 + t_u(z - z_0))(z - z_0)^2, u \rangle.$$

Entonces $\langle f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0), u \rangle \leq \frac{1}{2}N(z_1, z_2)|z - z_0|^2$. Ahora elegimos u de modo convenientemente, y obtenemos $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \frac{1}{2}N(z_1, z_2)|z - z_0|^2$. Por tanto

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |f(z_0)| - |f'(z_0)||z - z_0| - \frac{1}{2}N(z_1, z_2)|z - z_0|^2 \\ &\geq |f(z_0)| - |f'(z_0)|r - \frac{1}{2}N(z_1, z_2)r^2. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Al usar nuestro método de exclusión, la verificación de la desigualdad

$$|f(z_0)| - |f'(z_0)|r - \frac{1}{2}N(z_1, z_2)r^2 > 0$$

es opcional, y se supone que esto acelera el tiempo de ejecución de nuestro método.

Linealidad del método

Mostramos ahora, como se esperaba, que el método de división es lineal. Para esto, suponemos que, en la n -ésima iteración el rectángulo R_n contiene solo el cero x^* de $f(s)$ y tiene lados $a > 0$, $b > 0$ con $a \geq b$, entonces x^* será aproximado por cualquier punto $x_n \in R_n$ con error $|x^* - x_n| \leq r_n$, donde $r_n = \sqrt{a^2 + b^2}$. Para la siguiente subdivisión

$$r_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \frac{r_{n+1}^2}{r_n^2} = \frac{a^2 + 4b^2}{4a^2 + 4b^2} \leq \frac{5}{8},$$

así $r_{n+1} \leq \sqrt{\frac{5}{8}}r_n$. En particular, tenemos la convergencia lineal de la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al 0. Al considerar dos pasos de subdivisión consecutivos en lugar de uno solo, independientemente de las opciones, obtenemos $r_{n+2} \leq \frac{1}{2}r_n$, por lo que obtenemos una mejor convergencia.

4.1.3. Refinando y acelerando el cálculo de los ceros

Como ya hemos visto, el método de bisección bidimensional es confiable, pero lento, ya que solo es de convergencia lineal. Para acelerar las cosas, cuando disponemos de un rectángulo R con un solo cero en su región interior, como podemos asegurar cuando trabajamos con funciones con ceros simples, podemos combinar nuestro método principal con algún método más rápido, como el método de Newton. Partiendo del centro $z_0 \in R$, iteramos

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0$$

esperando obtener $|f(z_n)| < \varepsilon$ o $|z_{n+1} - z_n| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, eligiendo el criterio de parada apropiado. Como se sabe, el método de Newton converge cuadráticamente, esto es

$$|z_{n+1} - z^*| \leq C|z_n - z^*|^2$$

para alguna constante $C > 0$ y $z^* \in R$ con $f(z^*) = 0$. Sin embargo, el método de Newton es localmente convergente, es decir, solo converge cuando se inicia lo suficientemente cerca de la solución, por lo que puede ejecutarse sin converger o divergir totalmente, por lo que agregamos dos criterios más de parada; o $n > n_0$ para algún límite de iteración fijado n_0 , o $z_n \notin R$ para algún $n > 0$. Cuando falla, usamos nuevamente el método de división sobre nuestro rectángulo, luego aplicamos nuevamente el método de Newton. De esta manera, aseguramos la convergencia global del método.

Finalmente, si queremos alguna certificación del cero, usamos el resultado en (Kantorovich and Akilov, 1982, Theorem 6, pp. 532–533) adaptado a nuestro caso.

Teorema 20 (Kantorovich and Akilov). *Sea $f(z)$ una función holomorfa sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\eta > 0$, $K > 0$ y $\Omega_0 \subset \Omega$ tales que las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $f'(z_0) \neq 0$;
2. $|f'(z_0)^{-1}f(z_0)| \leq \eta$;
3. $|f'(z_0)^{-1}f''(z)| \leq K$ para $z \in \Omega_0$.

Entonces, si

$$h = K\eta < \frac{1}{2}$$

y

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta$$

la ecuación $f(z) = 0$ tiene una solución z^* , y el método de Newton converge a esta solución. Además,

$$|x^* - z_0| \leq r_0$$

También, si

$$r < r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$$

z^* es la única solución en Ω_0 , y la razón de convergencia esta dada por

$$|x_n - z^*| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \cdot \frac{\eta}{h}, \quad n \geq 0.$$

En cuanto a la convergencia del método, el argumento es muy simple, ya que viene dado por la convergencia global del método de bisección y la convergencia local del método de Newton. Por las estimaciones anteriores, por el método de bisección bidimensional, los ceros de $f(s)$ dentro de un rectángulo inicial R están encerrados en un número finito de rectángulos R_n con diámetro

$$\text{diam}(R_n) \leq \sqrt{\frac{5}{8}} \text{diam}(R),$$

tan pequeño como se desee. Consideramos un cero simple $z^* \in R_n$ de $f(s)$. Como $f(z^*) = 0$ y $f'(z^*) \neq 0$, la continuidad uniforme de $f'(s)$ nos permite elegir n suficientemente grande tal que $|f'(z)| \geq \frac{1}{2} |f'(z^*)|$. Tomando $\Omega_0 = R_n$ y

$$K = \max_{z \in R_n} |f''(z)| \cdot \frac{2}{|f'(z^*)|}.$$

se garantiza las condiciones 1 y 3 del Teorema 20. Ahora, por la continuidad uniforme de $f(s)$, para cualquier $0 < \eta < \frac{1}{2K}$ fijo, podemos elegir n suficientemente grande tal que

$$|f(z_0)| < \frac{2\eta}{|f'(z^*)|}$$

para todo $z_0 \in R_n$. Esto asegura la condición 2 del Teorema 20. Finalmente, eligiendo $r = r_0$ obtenemos las conclusiones.

4.1.4. La implementación

Como hemos dividido los rectángulos, se han convertido en problemas independientes y nuestro método es adecuado para aplicar la *programación paralela*.

Cada rectángulo subdividido se coloca en una pila y luego es procesado por un procesador disponible. Para evitar problemas de acceso, que podrían resultar en *corrupción de datos*,

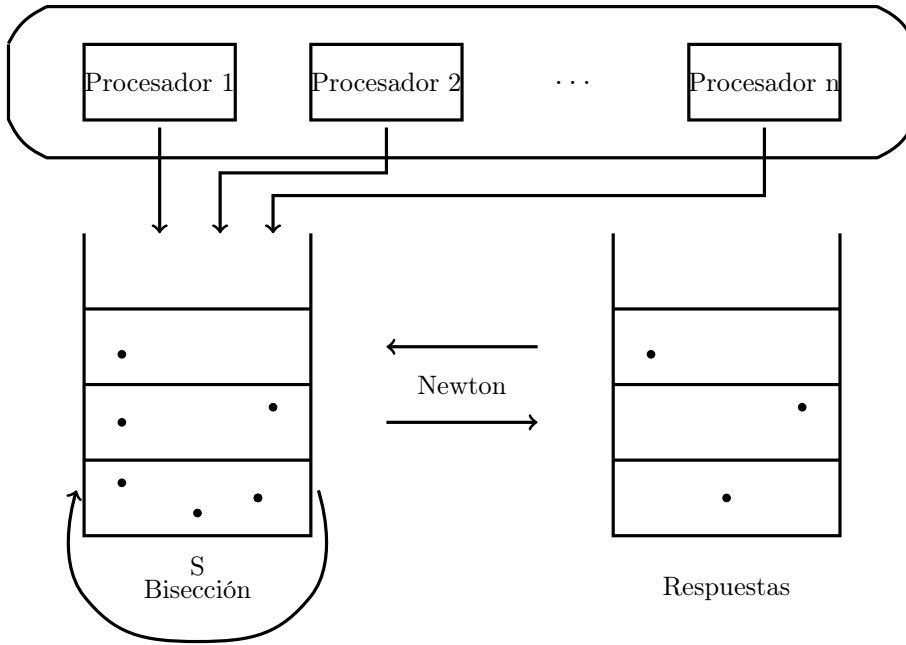


Figura 4.4: Pilas de exclusión mutua y procesamiento en paralelo

usamos pilas de exclusión mutua (Mutex). Como el método de Newton converge, las respuestas certificadas se colocan en la pila de respuestas. El proceso se ilustra en la Figura 4.1.4

Para manejar multiprecisión, usamos el Boost C++ libraries (Schäling, 2014). El número de parámetros es proporcionado con la implementación, como en la Table 4.1.

Variable	Alcance	Significado
EPS, eps1, eps2, eps3	global	error de redondeo y tolerancia de las desigualdades
limit	global	límite del número de hilos para paralelizar
LD	solve function	esquina inferior izquierda para el rectángulo
RU	solve function	esquina superior derecha para el rectángulo

Cuadro 4.1: Los parámetros a proporcionar en la implementación del algoritmo

Además, tenemos que proporcionar algunas funciones para que el método funcione, como en la Tabla 4.2

Función	Parámetros	Significado
f	x	función holomorfa principal
df	x	derivada de f
M	s_1, s_2	una cota superior monótona para $ f''(s) $, $s \in [s_1, s_2]$
N	s_1, s_2	una cota superior para $ f''(s) $, s en el rectángulo con esquinas s_1 y s_2

Cuadro 4.2: Funciones a proporcionar, para que el método funcione

4.1.5. Ejecutando y benchmarking

Los polinomios de Dirichlet son de nuestro interés particular, por lo que brindamos una implementación completa de esta clase simple de funciones

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s} \quad \text{donde } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n.$$

Usamos la cota $M(s_1, s_2)$ de $|f''(s)|$ para $s \in [s_1, s_2]$, dado por

$$M(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^n |a_k| \lambda_k^2 e^{-\min\{\Re(s_1), \Re(s_2)\}}.$$

Usamos también $N(s_1, s_2) = M(s_1, s_2)$ la cota $|f''(s)|$ para s en un rectángulo con esquinas opuestas s_1, s_2 . Las funciones dadas se proporcionan al programa fuente.

Nuestro programa fue compilado con Boost C++ Library versión 1.77 y G++ versión 10.3.0. La línea de compilación tenía parámetros `-O3 -pthread`, para usar múltiples hilos de procesador y optimizado para la velocidad. Todos estos tiempos de ejecución se calcularon en Ubuntu Linux 18.04 de 64 bits ejecutandose en una CPU Intel Core i7-8700T a 2.40 GHz x 12 con 8 GB de RAM. El parámetro `limit` para el número de hilos se estableció igual a 8.

Ejecutamos nuestro programa para calcular los ceros de $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$, la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann, para diferentes valores de n y dentro de diferentes rectángulos dados, como funciones de n y $T > 0$, dados por

$$1 - n \leq \Re(s) \leq 1,73, \quad 0 \leq \Im(s) \leq T.$$

n	T	número de ceros	tiempo(s)
3	1 000 000	174 850	6 312,3
4	1 000 000	220 636	12 497,0
5	1 000 000	256 150	21 633,1
6	100 000	28 517	3 321,5
7	100 000	30 970	4 306,9
8	100 000	33 095	4 778,9
9	100 000	34 970	5 239,8
10	100 000	36 647	6 426,5
11	100 000	38 164	7 827,7
12	100 000	39 549	9 136,9
13	100 000	40 823	10 143,8
14	100 000	42 002	12 347,2
15	100 000	43 100	13 776,2
16	100 000	44 127	15 432,0
17	100 000	45 092	16 602,8
18	100 000	46 002	19 157,1
19	100 000	46 862	19 767,9
20	100 000	47 679	21 623,3
21	100 000	48 455	25 892,6
22	100 000	49 195	27 898,8

Cuadro 4.3: Tiempos de ejecución calculando los ceros de la n -ésima suma parcial de la función zeta de Riemann

4.2. Cálculo inicial de los ceros de $\zeta_n(s)$

Para cada altura T prefijada, $N_n(T)$ es número de ceros de $\zeta_n(s)$ en la franja horizontal $0 \leq \Im(s) \leq T$, esto es

$$N_n(T) = \left| \left\{ s \in \mathbb{C} / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \right\} \right|$$

estos ceros se encuentran en el rectángulo $\mathcal{R}_n(T) = [\psi_n(T), \varphi_n(T)] \times [0, T]$, donde

$$\psi_n(T) = \min \left\{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \right\} \quad (4.6)$$

y

$$\varphi_n(T) = \max \{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \} \quad (4.7)$$

de hecho, habría que considerar además que $\zeta_n(s)$ no tiene ceros reales, y para los ceros de $\zeta_n(s)$ con parte imaginaria negativa, observamos que $\overline{\zeta_n(s)} = \zeta_n(\bar{s})$, de modo que

$$\{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, 0 \leq \Im(s) \leq T \} = \{ \Re(s) / \zeta_n(s) = 0, -T \leq \Im(s) \leq T \}.$$

n	T	$\psi_n(T)$	$\varphi_n(T)$
3	1000000	-0,99999999994488190769477563395052620541	0,78788491100080513161042799038478234229
4	1000000	-1,2142853227009554567026878487995769152	0,62628810392839922378739717570136306842
5	1000000	-2,4259769648667923075323611202507188521	0,89089957457283420253067328390163288814
6	100000	-2,8862226301368737347849176292444813055	0,84104188145876599098277287691183228644
7	100000	-3,8026034112627661409796484569448555656	0,97589973342495939623308316170841190106
8	100000	-4,3788606094940782994854791815896348454	0,91927464134950744301256016104353388291
9	100000	-5,0092467225214577472708529635759918930	0,89334984719043742717924166268951287566
10	100000	-5,6890185653119604462140872207341021189	0,90046529928043258100811152998849864883
11	100000	-6,5531009048504185995389754239641768431	0,96371715888953452367523883953954336352
12	100000	-7,1882520918401419573433059957448578976	0,93339980910059801226682383787263875108
13	100000	-7,8639779358273720016868444303457438713	0,98142404974668293290647876760789951268
14	100000	-8,4980268515173385232282490619752711698	0,99087709550751238870933549625757232880
15	100000	-9,1607989716169630449088409692942400229	0,98360931818839141407691905674931899458
16	100000	-9,9572032165313162338115365769774668844	0,96013638306393947984912214623585297756
17	100000	-10,548011601142543724560538089701827984	0,97941849761614455486350102402553317082
18	100000	-11,228794182588007735707088798197516549	0,96297858317736989424664718868446637695
19	100000	-11,851287991612315058550076035580718678	0,98976036494785157834100818691724556871
20	100000	-12,679973002399099550023459267995941159	0,97272831698666258694590118168142705292
21	100000	-13,248351612463561408032483280541565636	0,97892737899289254962707472830597876995
22	100000	-13,850574152015439897243342187534644974	0,98781722396880927342156445806408217400

Cuadro 4.4: Cálculo del ancho de cada rectángulo $\mathcal{R}_n(T)$ con extrema precisión

En los siguientes gráficos mostramos la *nube de ceros* de $\zeta_n(T)$ para los primeros valores de n , con cierta altura T prefijada.

Nube de ceros de $\zeta_3(s)$

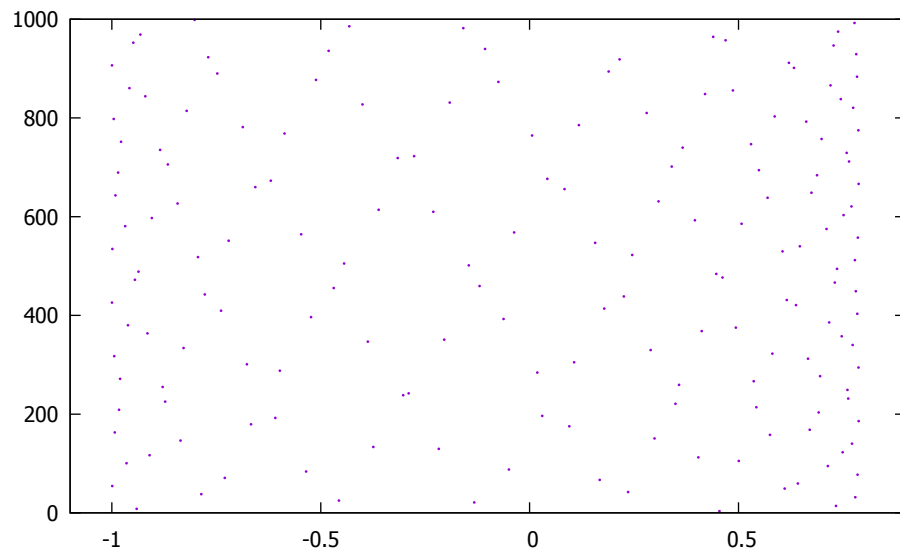


Figura 4.5: Nube de ceros de $\zeta_3(s)$ para $T = 10^3$

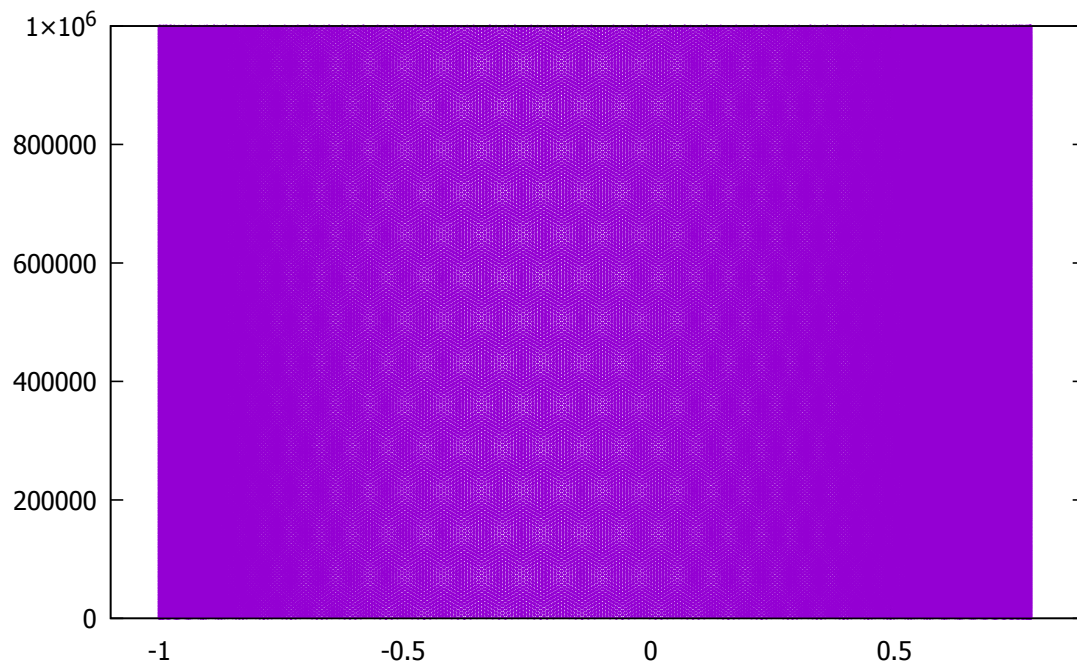


Figura 4.6: Nube de ceros de $\zeta_3(s)$ para $T = 10^6$

Nube de ceros de $\zeta_4(s)$

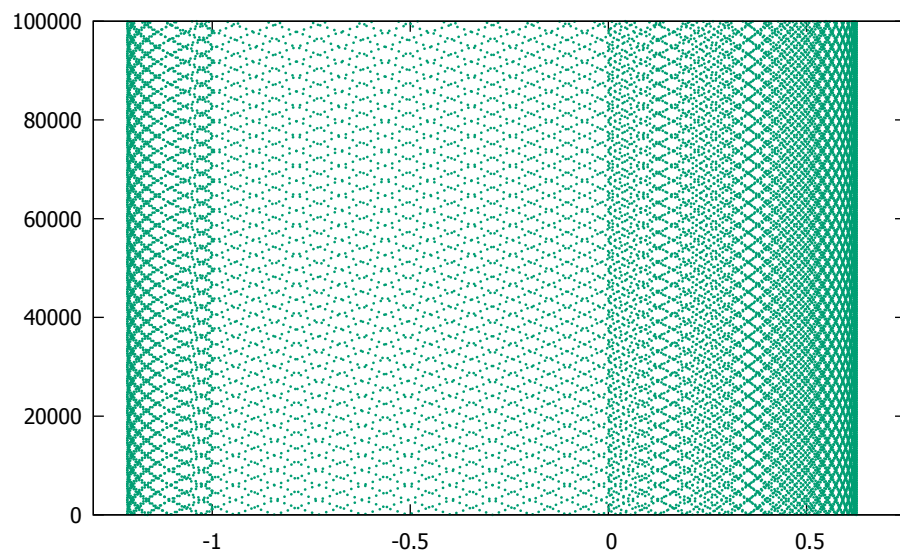


Figura 4.7: Nube de ceros de $\zeta_4(s)$ para $T = 10^5$

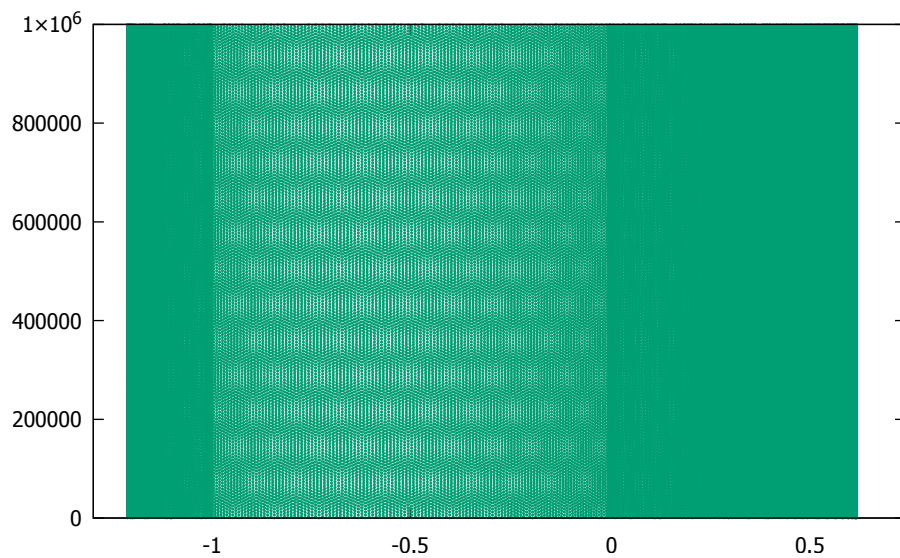


Figura 4.8: Nube de ceros de $\zeta_4(s)$ para $T = 10^6$

Nube de ceros de $\zeta_5(s)$

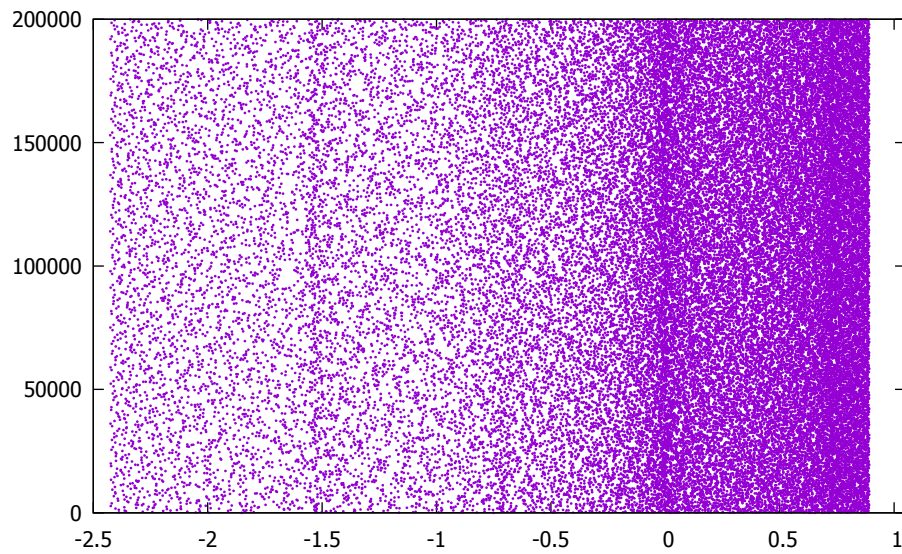


Figura 4.9: Nube de ceros de $\zeta_5(s)$ para $T = 2 \times 10^5$

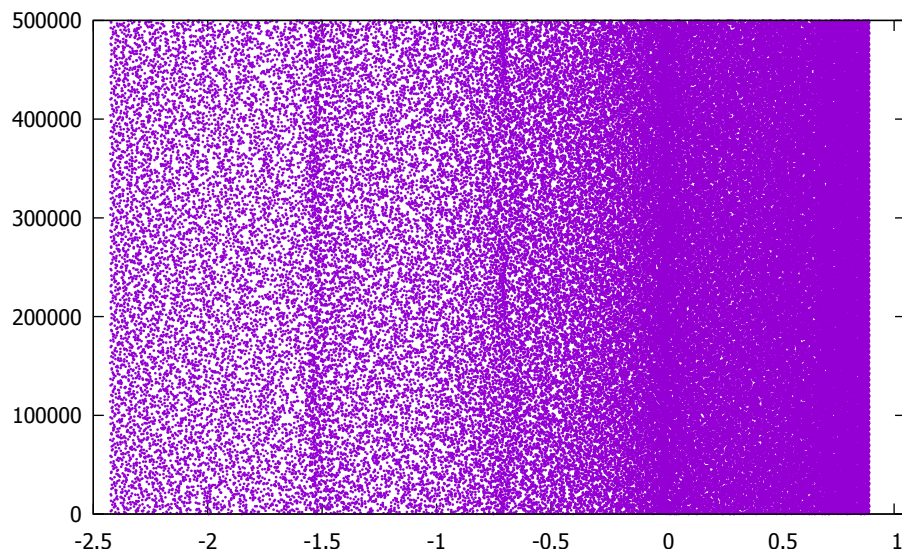


Figura 4.10: Nube de ceros de $\zeta_5(s)$ para $T = 5 \times 10^5$

Nube de ceros de $\zeta_6(s)$

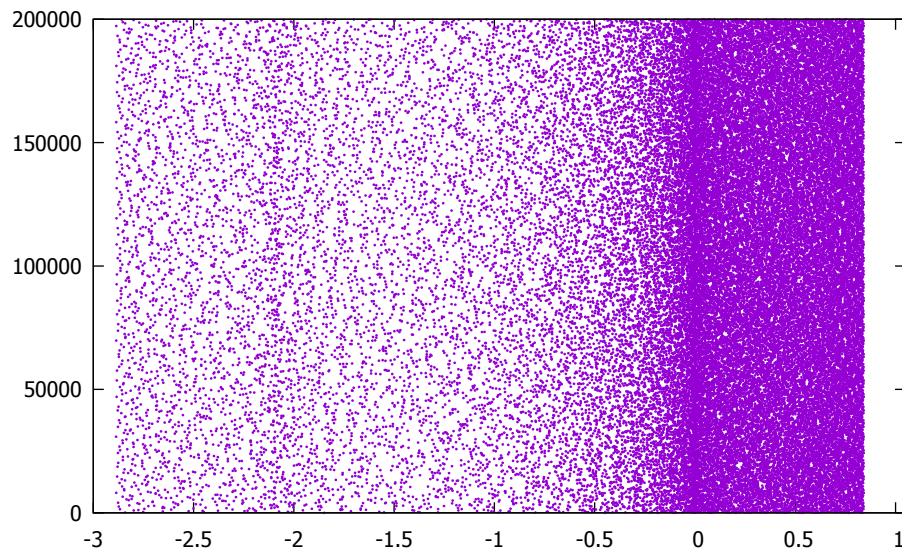


Figura 4.11: Nube de ceros de $\zeta_6(s)$ para $T = 2 \times 10^5$

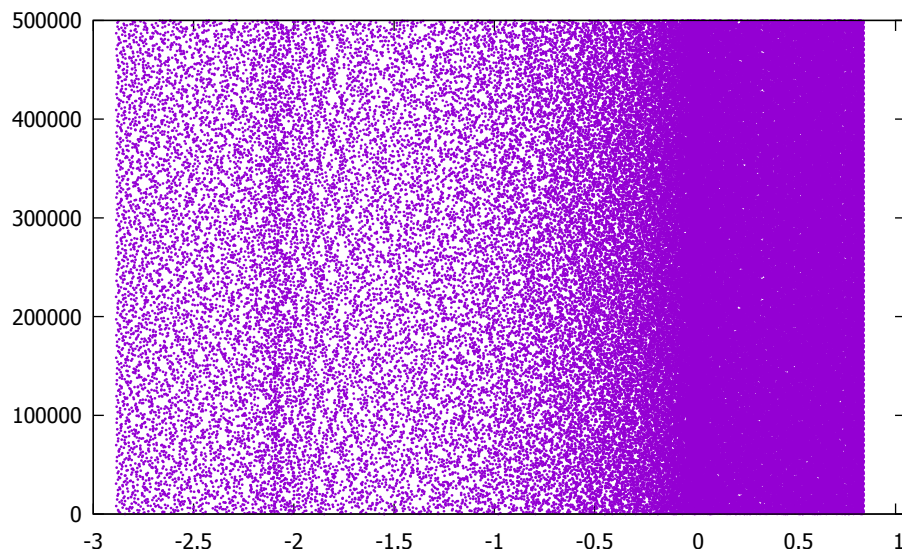


Figura 4.12: Nube de ceros de $\zeta_6(s)$ para $T = 5 \times 10^5$

Nube de ceros de $\zeta_7(s)$

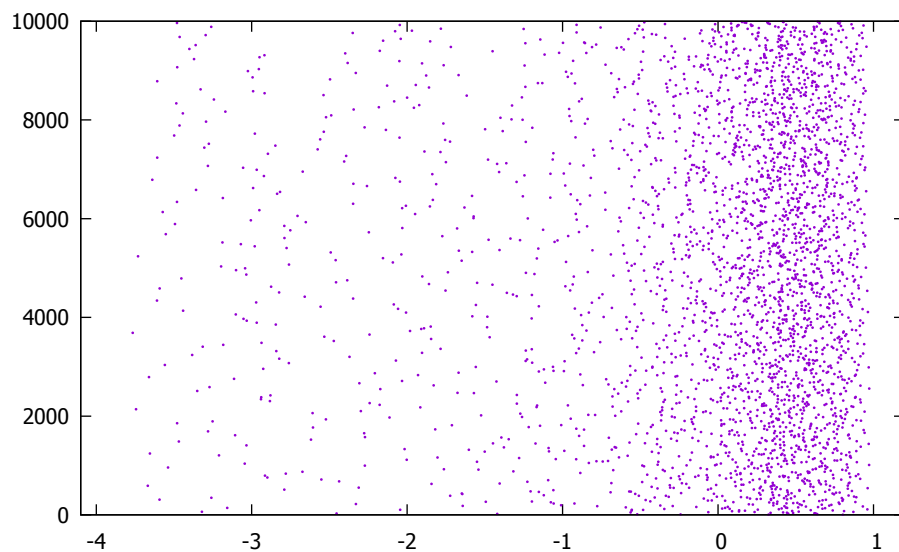


Figura 4.13: Nube de ceros de $\zeta_7(s)$ para $T = 10^4$

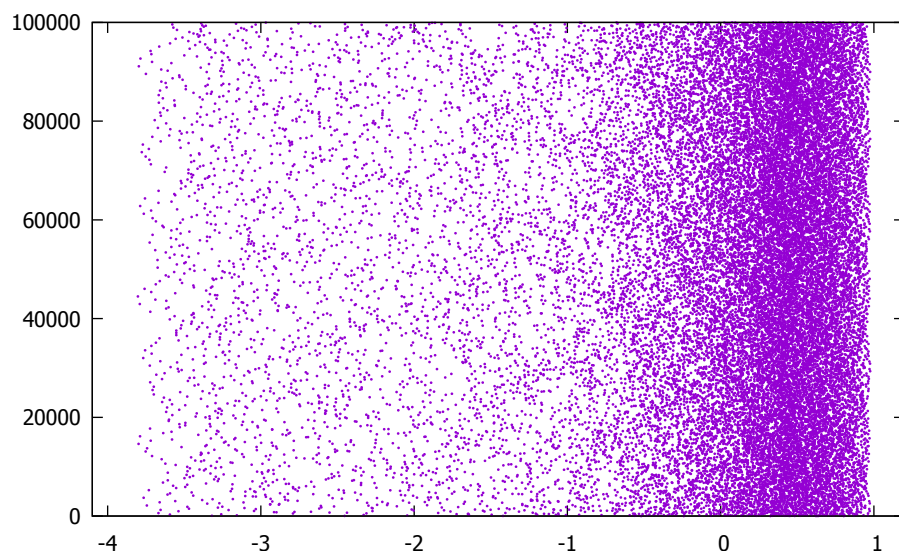


Figura 4.14: Nube de ceros de $\zeta_7(s)$ para $T = 10^5$

Nube de ceros de $\zeta_8(s)$

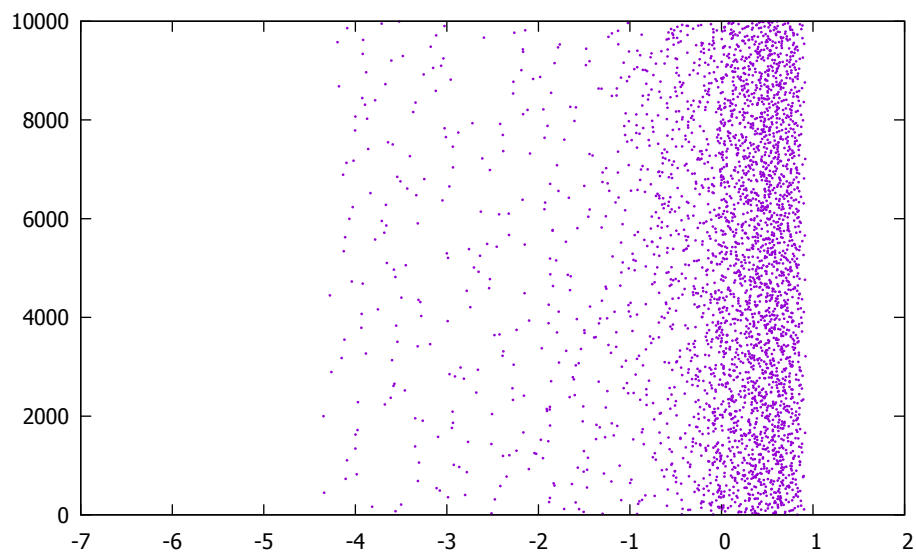


Figura 4.15: Nube de ceros de $\zeta_8(s)$ para $T = 10^4$

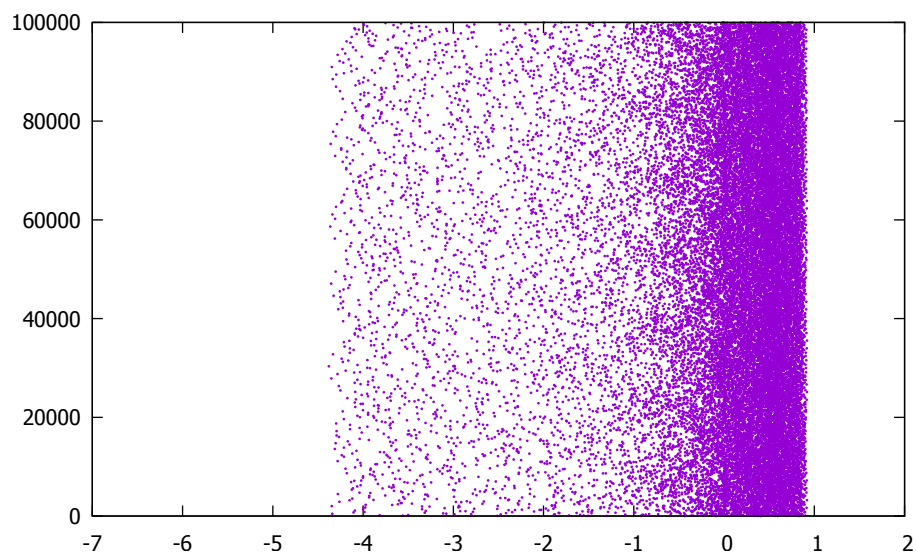


Figura 4.16: Nube de ceros de $\zeta_8(s)$ para $T = 10^5$

Nube de ceros de $\zeta_9(s)$

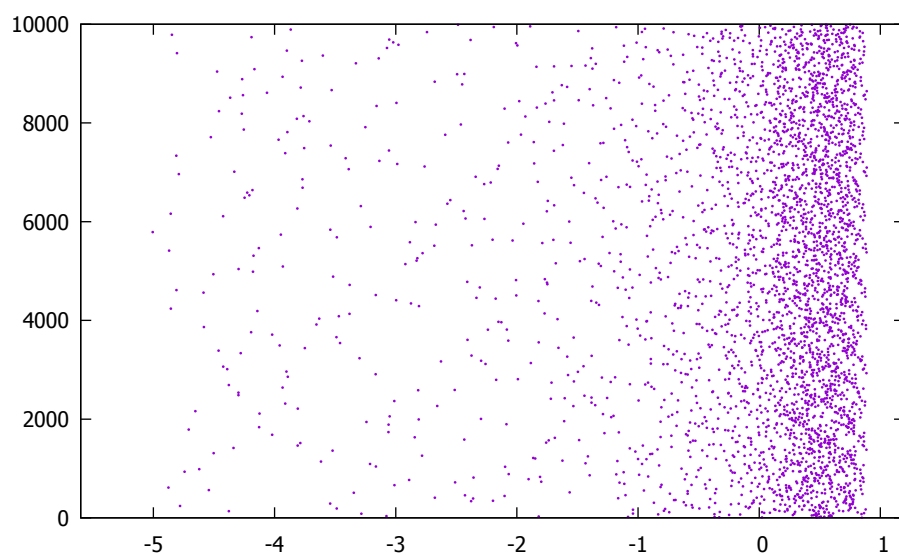


Figura 4.17: Nube de ceros de $\zeta_9(s)$ para $T = 10^4$

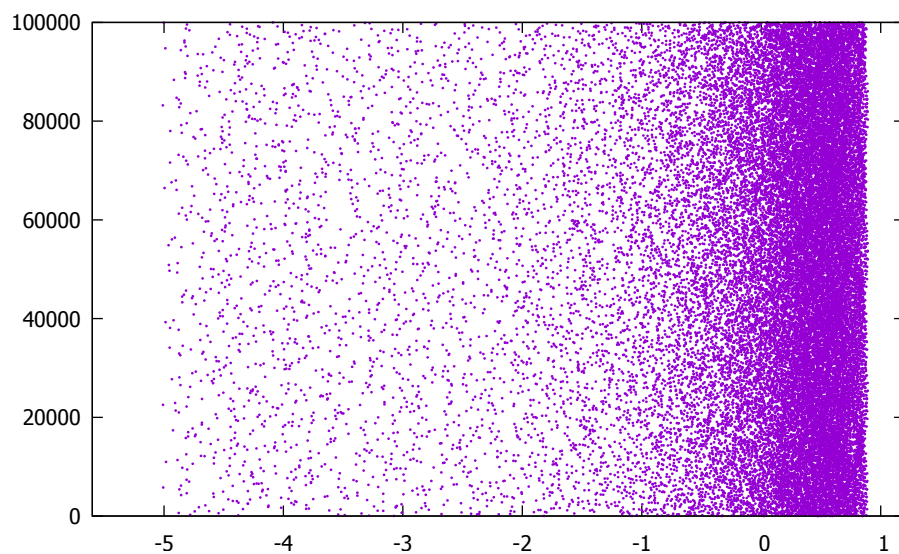


Figura 4.18: Nube de ceros de $\zeta_9(s)$ para $T = 10^5$

n	T	$N_n(T)$	$\frac{T}{2\pi} \log(n)$
3	1000000	174 850	174849,576
4	1000000	220 636	220635,600
5	1000000	256 150	256149,999
6	1000000	285 168	285167,376
7	100000	30 970	30970,122
8	100000	33 095	33095,340
9	100000	34 970	34969,915

Cuadro 4.5: Recopilación de los primeros datos procesados

En el cuadro (4.5) observamos por ejemplo que la función $\zeta_9(s)$ tiene 34 970 ceros, muy bien aproximado por $\frac{100000}{2\pi} \log(9)$, en el rectángulo de altura cien mil

$$\mathcal{R}_9(10^5) = [-5,009246722521457747270852963; 0,8933498471904374271792416626] \times [0; 10^5]$$

4.3. Límites de la banda de los ceros

El lema 8 implica que el conjunto

$$R_n = \{\Re(s) : \zeta_n(s) = 0\} \tag{4.8}$$

está contenido en un intervalo compacto. Así los números

$$\psi_n = \inf R_n, \quad \varphi_n = \sup R_n,$$

bien definidos, delimitan la banda, en el sentido de formar el menor intervalo compacto que contiene a R_n , $R_n \subset [\psi_n; \varphi_n]$. En particular $\psi_n \leq \psi_n(T) \leq \varphi_n(T) \leq \varphi_n$, donde $\psi_n(T)$ y $\varphi_n(T)$ están definidos por (4.6) y (4.7), respectivamente, y

$$\varphi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_n(T), \quad \psi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi_n(T).$$

Claramente $\varphi_2 = \psi_2 = 0$.

Los resultados de Montgomery y Vaughan (Montgomery and Vaughan, 2002) implican que, para $0 < c < \frac{4}{\pi} - 1$ existe $N(c)$ de tal forma que si $n > N(c)$

$$1 + c \frac{\log \log n}{\log n} < \varphi_n \leq 1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \frac{\log \log n}{\log n}.$$

En particular, $\varphi_n > 1$, lo que implica que $\zeta_n(s)$ posee ceros especiales para n suficientemente grande. De otro lado, (Balazard and Velásquez Castanón, 2009) demostraron que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{n} = -\log(2). \quad (4.9)$$

Por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 1.$$

Revisamos aquí los fundamentos del argumento en el resultado de (Balazard and Velásquez Castanón, 2009) para el cálculo del límite involucrado en (4.9). Esto requiere la introducción, para $n \geq 2$, de la cantidad

$$\beta_n^\pm = \min \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^n \chi(k)k^{-\sigma} = 0, \chi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm 1\} \text{ completamente multiplicativa} \right\}$$

el mínimo de los ceros reales de las sumas parciales “torcidas” por funciones reales completamente multiplicativas. Se dan varios motivos para la introducción de estas cantidades, entre las cuales:

- La finitud de los ceros involucrados, por lo que se calcula un cero y no solo un ínfimo.
- La simplicidad de trabajar con ceros reales.
- La sencilla implementación del cálculo.

En efecto, el conjunto arriba indicado es finito. Para el conjunto de funciones multiplicativas $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm 1\}$ indicadas, lo único importante son los valores de $\chi(k) \in \{\pm 1\}$ para $1 \leq k \leq n$, lo que nos da 2^n posibilidades, y considerando la multiplicatividad de χ , se reduce a $2^{\pi(n)}$ posibilidades concretas, al importar solo los valores de $\chi(2), \chi(3), \dots, \chi(p_{\pi(n)})$. Asimismo, para cada elección de χ , los ceros reales de $\zeta_{n,\chi}(s) = \sum_{k=1}^n \chi(k)k^{-s}$ están contenidos en un intervalo compacto $[\beta_n, \alpha_n]$, y constituyen un conjunto discreto, como conjunto de ceros de una función holomorfa, lo que implica su finitud.

Recordamos el resultado en (Velasquez Castanon, 2008, Proposition 3.7), que es la base del resultado en (Balazard and Velásquez Castanón, 2009, Proposition 1).

Proposición 16. *Para $n \geq 2$*

$$\beta_n \leq \psi_n \leq \beta_n^\pm,$$

con igualdad $\beta_p = \psi_p = \beta_p^\pm$ para p primo racional no negativo.

Demostración. La desigualdad $\beta_n \leq \psi_n$ ya es conocida para nosotros. Por definición, se tiene que $\zeta_{n,\chi}(\beta_n^\pm) = 0$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\zeta_{n,\chi}(s) : \beta_n^\pm - \varepsilon < \Re(s) < \beta_n^\pm + \varepsilon\}$$

contiene al 0. Por el teorema 12, este conjunto de valores es igual al conjunto de valores

$$\{\zeta_n(s) : \beta_n^\pm - \varepsilon < \Re(s) < \beta_n^\pm + \varepsilon\},$$

por lo que la función $\zeta_n(s)$ también se anula en la banda $\beta_n^\pm - \varepsilon < \Re(s) < \beta_n^\pm + \varepsilon$. En particular $\psi_n < \beta_n^\pm + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\psi_n \leq \beta_n^\pm$, por tanto $\beta_n \leq \psi_n \leq \beta_n^\pm$.

Ahora analicemos el caso en el que $n = p$ es primo. En este caso definimos una función completamente multiplicativa $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm 1\}$ por $\chi(p) = -1$ y $\chi(q) = 1$ para cualquier primo $q \neq p$. Entonces

$$\zeta_{p,\chi}(\sigma) = \sum_{k=1}^p \chi(k)k^{-\sigma} = -p^{-\sigma} + \sum_{k=1}^{p-1} k^{-\sigma},$$

función que tiene como (único) cero real a β_p . Esto implica que $\beta_p^\pm \leq \beta_p$, y por tanto la igualdad deseada $\beta_p = \psi_p = \beta_p^\pm$. \square

La última afirmación de la proposición 16, el caso $n = p$ primo, fue inicialmente demostrada en (Borwein et al., 2007, Theorem 4.10), y redemostrada con el anterior argumento en (Velasquez Castanon, 2008, Proposition 3.3). Los argumentos en la demostración de la proposición 16 dan ideas para diseñar un algoritmo para el cálculo de β_n^\pm y β_n , cuyos resultados se muestran en las tablas (4.6) y (4.7).

Cuando n no es un número primo, no podemos en general repetir el argumento de la última parte de la demostración de la proposición 16. Lo que hace que según nuestras observaciones β_n^\pm sea cercano a β_n , a pesar de no poder obtener $\chi(n)$ de signo opuesto a todos los $\chi(k)$ con $1 \leq k < n$, es que buena parte de estos valores, con índices cercanos a n , sean de signo opuesto de $\chi(n)$, de modo que, por ejemplo, escribamos

$$\zeta_{n,\chi}(s) = -n^{-s} + \sum_{j=n-k}^{n-1} j^{-s} + \sum_{j=1}^{n-k-1} \chi(j)j^{-s}$$

en ciertos casos, mientras que

$$\zeta_{n,\chi}(s) = n^{-s} - \sum_{j=n-k}^{n-1} j^{-s} + \sum_{j=1}^{n-k-1} \chi(j)j^{-s}$$

en otros, como el caso en que n sea un cuadrado (y forzosamente sea $\chi(n) = 1$). Esto se traduce en la desigualdad

$$\beta_n^\pm \leq \rho_{n,k}$$

donde $\rho_{n,k}$ es el menor cero de

$$\zeta_{n,k}(\sigma) = n^{-\sigma} - \sum_{j=n-k}^{n-1} j^{-\sigma} + \sum_{j=1}^{n-k-1} j^{-\sigma}. \quad (4.10)$$

Este constituye el argumento principal de (Balazard and Velásquez Castanón, 2009), donde se realiza un análisis exhaustivo de las posibilidades para las funciones χ , luego se prueba que $\frac{\rho_{n,k}}{n} \rightarrow -\log(2)$ cuando $n > k \rightarrow \infty$. Esto incluye $\rho_{n,n-1} = \beta_n$. Esto, junto con (16), demuestran (4.9).

Copiamos el argumento de (Borwein et al., 2007, p. 25). En efecto, de (4.10), haciendo el cambio de j por $n - j$ en la igualdad y teniendo que $n^{\rho_{n,k}} \zeta_{n,k}(\rho_{n,k}) = 0$, escribimos $\rho_{n,k} = n \cdot s_{n,k}$. Esto nos da

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{-n \cdot s_{n,k}} + \sum_{j=k+1}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{-n \cdot s_{n,k}}.$$

Haciendo $n > k \rightarrow \infty$ y considerando $b > 0$ tal que $\frac{\rho_{n,k}}{n} = s_{n,k} \rightarrow b$, obtenemos la ecuación

$$0 = 1 - \frac{e^{-b}}{1 - e^{-b}},$$

de donde $b = \log(2)$.

4.4. Irreducibilidad de los polinomios multivariados asociados

Un resultado de Bohr indica que el conjunto de valores de un polinomio de Dirichlet está conectado al conjunto de valores de un polinomio asociado en varias variables (Montgomery, 1977, p. 7-02). Resultado que enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema 21 (Bohr). *Si $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números positivos linealmente independientes sobre \mathbb{Q} y*

$$D(s) = P(e^{-\lambda_1 s}, \dots, e^{-\lambda_n s}),$$

entonces

$$\left\{ P(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1 \right\} = \bigcap_{\delta > 0} \{ D(s) : |\Re(s)| < \delta \}.$$

n	β_n^\pm	β_n	$(\chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \dots, \chi^{(p_{\pi(n)}})$
26	-16,982007075143598096647681987978242003	-16,981807077745300958622422245369090990	(1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)
27	-17,675157737654348198192854361936183717	-17,653321409417395362558442238029847374	(-1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)
28	-18,368308164066008978077754952604301903	-18,221885881988274239788789132900820708	(1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
29	-19,061458377516680419871579284507896938	-19,061458377516680419871579284507896938	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
30	-19,754608398228364568517256961957325011	-19,744611257273372727162550832925429208	(1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
31	-20,447758243950444517500420811560088650	-20,447758243950444517500420811560088650	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
32	-21,140907930324973842778421150613039239	-21,064968712699278167248867952952319154	(-1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)
33	-21,834057471189324808352630977098005323	-21,829348131480956387373781740813252681	(1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
34	-22,527206878828325752690871167327311546	-22,527201272785201222486227491158005539	(1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)
35	-23,220356164185418099009646669791191749	-23,200408387371096953798243362214943284	(-1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)
36	-23,913505337040370889209287496061723561	-23,869938720855513436072150757385243154	(-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)
37	-24,606654406159552796270017131149751287	-24,606654406159552796270017131149751287	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
38	-25,299803379423566399472665885026754766	-25,299802462191369497133216963946444033	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1)
39	-25,992952263936114654847201770972315165	-25,991922291062783041414107419935102856	(1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)
40	-26,686101066117233703998448472275275449	-26,681593307636350377379557161612427239	(1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)
41	-27,379249791783443603590994741918056459	-27,379249791783443603590994741918056459	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
42	-28,072398446216904692102109746488345298	-28,068845425235486861265634614495732520	(1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)
43	-28,765547034225295947937803839756754174	-28,765547034225295947937803839756754174	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
44	-29,458695560193832840767464656616333101	-29,449516298886842339706716774542053170	(1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
45	-30,151844028130600481094848859963934402	-30,150271715533094810841227682492986659	(-1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1)
46	-30,844992441706181469147995024659920055	-30,844992417915179741428569993020871389	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1)
47	-31,538140804288397516666374138369930557	-31,538140804288397516666374138369930557	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)
48	-32,231289118972852464376781496412591123	-32,229185551555370061210122568971578716	(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)
49	-32,924437388609856090139784553984055123	-32,922373569805135040844700763972062835	(1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)
50	-33,617585615828218635818948191451425233	-33,589557968466694340277636678282747033	(-1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1)

Cuadro 4.7: Valores β_n y β_n^\pm de la proposición 16, $26 \leq n \leq 50$

Demostración. Dado que $P(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^t a_k z_1^{\alpha_{k1}} z_2^{\alpha_{k2}} \dots z_n^{\alpha_{kn}}$ con $a_k \in \mathbb{C}, \alpha_{ki} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es linealmente independientes sobre \mathbb{Q}

$$D(s) = P(e^{\lambda_1 it}, e^{\lambda_2 it}, \dots, e^{\lambda_n it}) = \sum_{k=1}^t a_k e^{-(\lambda_1 \alpha_{k1} + \lambda_2 \alpha_{k2} + \dots + \lambda_n \alpha_{kn})}$$

Ahora

$$\bigcap_{\delta > 0} \{D(s) : |\Re(s)| < \delta\} = \bigcap_{\delta > 0} \{D(s) : 0 - \delta < \Re(s) < 0 + \delta\} = \bigcap_{\delta > 0} W_D(0, \delta) = W_D(0)$$

que por la ecuación (2.46) sobre el teorema de Bohr haciendo $\sigma_0 = 0$ y $f = D$, $W_D(0) = \overline{V_D(0)} = \overline{\{D(s) / \Re(s) = 0\}}$, de donde

$$\bigcap_{\delta > 0} \{D(s) : |\Re(s)| < \delta\} = \overline{\{P(e^{\lambda_1 it}, e^{\lambda_2 it}, \dots, e^{\lambda_n it}) / t \in \mathbb{R}\}} \quad (4.11)$$

De otro lado, sea $K = \{P(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1\} = P(K_0)$, donde $K_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1\}$; así K es compacto y

$$K = \{P(e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{-i\theta_n}) / \theta_i \in [0, 2\pi], 1 \leq j \leq n\}$$

Para $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ (arbitrario), por el teorema de Kronecker (Hardy and Wright, 1960, theorem 444) existen $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{\lambda_j t}{2\pi} - k_j - \frac{\theta_j}{2\pi} \right| < \varepsilon$ es decir,

$$|\lambda_j t - 2\pi k_j - \theta_j| < \varepsilon \quad (4.12)$$

Teniendo en cuenta que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $|e^{-ix} - e^{iy}| = 2 \left| \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \right|$,

$$|e^{-i\theta_j} - e^{-i\lambda_j t}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta_j - \lambda_j t}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta_j - \lambda_j t}{2} + k_j \pi\right) \right|$$

k

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{\theta_j - \lambda_j t + 2k_j \pi}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{\theta_j - \lambda_j t + 2k_j \pi}{2} \right| < \varepsilon$$

así, usando la continuidad uniforme de P en el compacto K_0 y la desigualdad anterior

$$|P(e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{-i\theta_n}) - P(e^{-\lambda_1 it}, e^{-\lambda_2 it}, \dots, e^{-\lambda_n it})| < \varepsilon_1, \quad \forall \varepsilon_1 > 0$$

esto implica que

$$K \subseteq \overline{\{P(e^{-\lambda_1 it}, e^{-\lambda_2 it}, \dots, e^{-\lambda_n it}) / t \in \mathbb{R}\}}$$

más aún,

$$K = \overline{\{P(e^{-\lambda_1 it}, e^{-\lambda_2 it}, \dots, e^{-\lambda_n it}) / t \in \mathbb{R}\}} \quad (4.13)$$

Por tanto de (4.11) y (4.13) la prueba concluye. \square

A partir de $\zeta_n(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 2^{-2s} + 5^{-s} + 2^{-s}3^{-s} + 7^{-s} + 2^{-3s} + \dots + n^{-s}$, o bien

$$\zeta_n(s) = 1 + \sum_{k=2}^n 2^{-s\alpha_{1k}} 3^{-s\alpha_{2k}} \dots p_{\pi(n)}^{-s\alpha_{\pi(n)k}}$$

escribiendo $x_j = p_j^{-s}$, donde p_j es el j -ésimo primo racional, motiva la siguiente definición.

Definición 22. Para cada $n \geq 2$, el polinomio

$$\begin{aligned} P_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\pi(n)}) = & 1 + x_1 + x_2 + x_1^2 + x_3 + x_1x_2 + x_4 + \\ & x_1^3 + x_2^2 + x_1x_3 + x_5 + x_1^2x_2 + x_6 + \dots \\ & \dots + x_{\pi(n)} \dots + x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{\pi(n)}^{a_n} \end{aligned} \quad (4.14)$$

es llamado n -ésimo *polinomio de Riemann*.

Algunos casos particulares son: $P_2(x_1) = 1 + x_1$, $P_3(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2$, $P_4(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1^2$, $P_5(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_1^2 + x_3$, $P_6(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_1^2 + x_3 + x_1x_2$. Si especializamos $x_1 = 2^{-s}$, $x_2 = 3^{-s}$, $x_3 = 5^{-s}$, \dots , $x_j = p_j^{-s}$, \dots , se tiene que

$$\zeta_n(s) = P_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\pi(n)}) \quad (4.15)$$

El lema 8 establece, como bien sabemos, que los ceros de un polinomio de Dirichlet se encuentran a lo largo de una banda vertical. Siendo así, el conjunto de ceros del producto de dos de estos polinomios se encuentra en una unión de bandas, y las proyecciones del conjunto de ceros correspondientes mostrará "orificios" si las bandas iniciales se encuentran lo suficientemente separadas. El análisis de la sección 4.5 muestra que, para las sumas parciales de la función zeta de Riemann, este no es el caso. Esto sugiere que el polinomio asociado, P_n , podría ser irreducible, y es lo que se demuestra ahora.

Teorema 22. *El polinomio $P_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\pi(n)})$ definido en (4.14) es irreducible en el anillo $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\pi(n)}]$*

Demostración. Demostraremos por contradicción que este polinomio es irreducible. En efecto, si el polinomio P_n no es irreducible en el anillo $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\pi(n)}]$, dado que P_n tiene término independiente 1, cualquier factor de P_n tendría término independiente no nulo, que podríamos asumir igual a 1. Sea Q_n un factor de P_n que contiene al término $bx_{\pi(n)}$, es decir $Q_n = 1 + t_1 + bx_{\pi(n)}$, donde t_1 solo puede contener las variables $x_1, x_2, \dots, x_{\pi(n)-1}$ y $b \neq 0$. Escribiendo la factorización no trivial de P_n

$$P_n = (1 + t_2)(1 + t_1 + bx_{\pi(n)}) \quad \text{con } t_2 \neq 0 \text{ y } b \in \mathbb{C}^*$$

de donde

$$P_n = 1 + t_1 + t_2 + t_1t_2 + bx_{\pi(n)} + bx_{\pi(n)}t_2$$

- Si $x_{\pi(n)}$ no divide a t_2 , observando el término $bx_{\pi(n)}t_2$ vemos que en P_n obtenemos un término no nulo, asociado a

$$x_{\pi(n)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_{\pi(n)-1}^{\alpha_{\pi(n)-1}}$$

que se corresponde con el entero $m := p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{\pi(n)-1}^{\alpha_{\pi(n)-1}}p_{\pi(n)}$ con $m \geq 2p_{\pi(n)}$. Pero entonces, por (Ferreira, 2014, Postulado de Bertrand, pp. 11–15) existe un primo q tal que

$$p_{\pi(n)} < q \leq 2p_{\pi(n)} \leq m \leq n$$

lo que es una contradicción.

- Si $x_{\pi(n)}$ divide a t_2 , entonces de t_1t_2 obtenemos un término no trivial y un primo q como en el caso anterior, a menos que $t_1 = 0$, pero entonces conseguiremos un término similar de $bx_{\pi(n)}t_2$.

Esto finaliza nuestra demostración. □

4.5. Densidad sobre la recta de la parte real de los ceros

En esta sección nos interesamos en la observación del conjunto R_n definido por (4.8). Los gráficos de los ceros de $\zeta_n(s)$ obtenidos muestran una cierta concentración en determinadas bandas verticales. Por ejemplo:

- para $n = 4$, se nota una menor concentración de ceros en el intervalo de abscisas entre -1 y 0 con respecto a otros intervalos;
- para $n = 5$, se nota una mayor concentración alrededor de la abscisa $-1,5$ y para abscisas positivas.

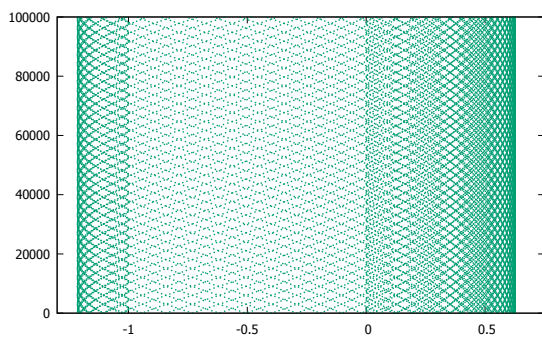


Figura 4.19: Ceros de $\zeta_4(s)$

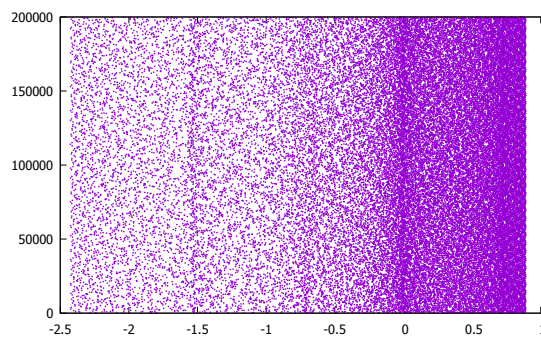


Figura 4.20: Ceros de $\zeta_5(s)$

Requerimos de una herramienta para el análisis de dichos fenómenos. Por otro lado, la evidencia inicial, al menos para valores pequeños de n , indica que R_n sería denso en el intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$. Esto es particularmente cierto en el caso $n = 3$, donde la clausura de R_3 es

$$\overline{R_3} = [\psi_3, \varphi_3],$$

(Mora, 2013a, Corollary 11), siendo de hecho los delimitadores los correspondientes al lema 8, esto es, ψ_3 es la única raíz real de $1 - 2^{-s} - 3^{-s} = 0$, mientras que φ_3 es la única raíz real de $3^{-s} - 2^{-s} - 1 = 0$. El resultado es similar en el caso $n = 4$ (Mora, 2013a, Theorem 14), obteniendo $\overline{R_4} = [\psi_4, \varphi_4]$. Sin embargo, en el caso general, solo se asegura la existencia de $\delta_n > 0$ tal que $[-\delta_n, \varphi_n] \subset \overline{R_n}$ (Mora, 2013a, Theorem 17). Un resultado similar es el principal resultado de (Mora, 2018) para las funciones $\eta_n(s) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^{-s}$.

4.5.1. Gráficos de distribución numérica de la densidad de las partes reales de los ceros

Para el estudio de R_n y dada la densidad esperada (o verificada en ciertos casos) en el intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, la función que estudie la densidad de ceros no puede ser puntual (para estudiar una determinada abscisa), dado que su densidad puntual sería igual a cero. Para tratar una variable continua como tal, utilizaremos entonces una función de distribución. Fijados $n \geq 2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ y $T > 0$, sea

$$N_n(\sigma, T) = \left| \left\{ s \in \mathbb{C} : \zeta_n(s) = 0, \Re(s) \leq \sigma, 0 < \Im(s) < T \right\} \right|.$$

Luego, definimos

$$\mu_n(\sigma, T) = \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}.$$

Fijados $T > 0$ y $n \geq 2$:

1. $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ es una función creciente en la variable $\sigma \in \mathbb{R}$,
2. $0 \leq \mu_n(\sigma, T) \leq 1$,
3. $\mu_n(\sigma, T) = 0$ para $\sigma < \psi_n$,
4. $\mu_n(\sigma, T) = 1$ para $\sigma \geq \varphi_n$.

La restricción de $\sigma \mapsto \mu_n(\sigma, T)$ al intervalo $[\psi_n, \varphi_n]$, denotada $\mu_n^*(\sigma)$, se calcula y grafica para $3 \leq n \leq 22$:

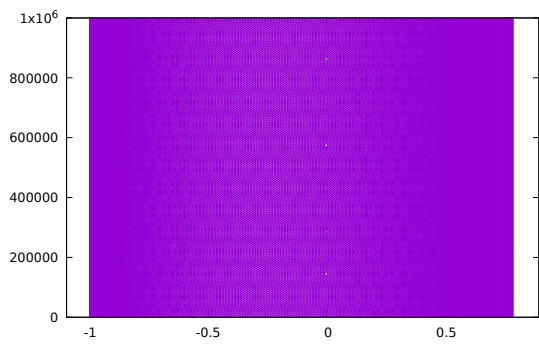


Figura 4.21: Los ceros de $\zeta_3(s)$

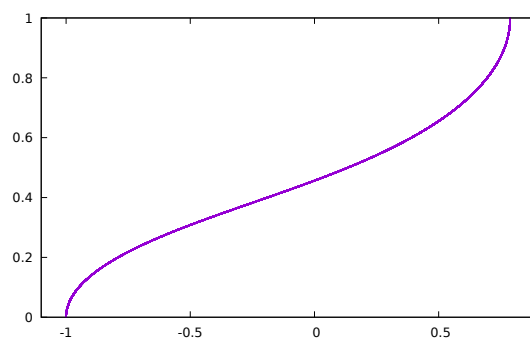


Figura 4.22: $\mu_3^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_3; \varphi_3]$

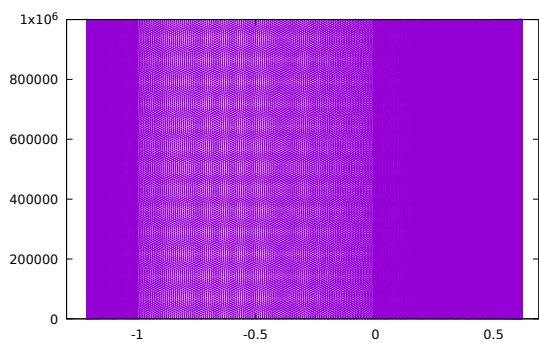


Figura 4.23: Los ceros de $\zeta_4(s)$

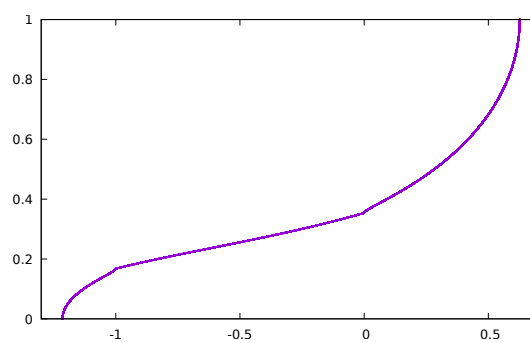


Figura 4.24: $\mu_4^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_4; \varphi_4]$

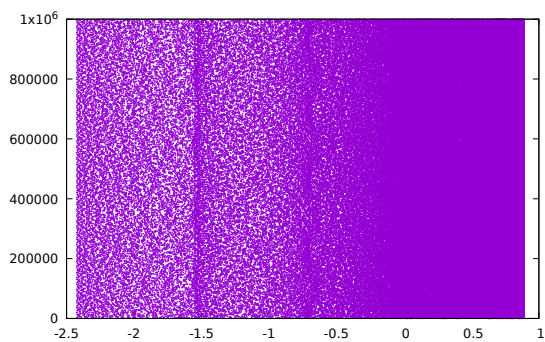


Figura 4.25: Los ceros de $\zeta_5(s)$

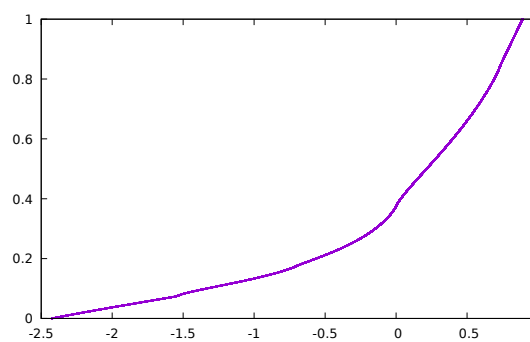


Figura 4.26: $\mu_5^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_5; \varphi_5]$

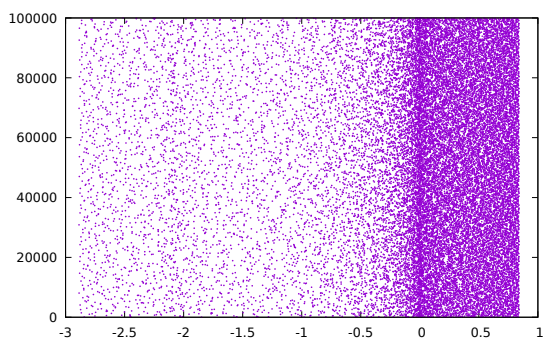


Figura 4.27: Los ceros de $\zeta_6(s)$

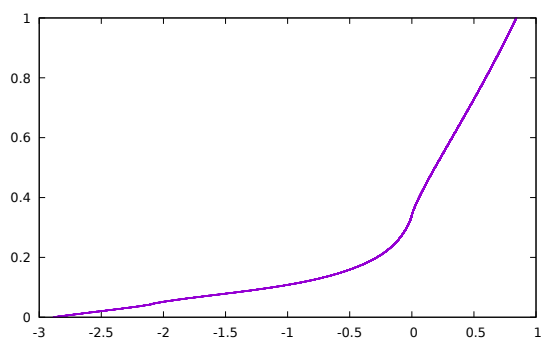


Figura 4.28: $\mu_6^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_6; \varphi_6]$

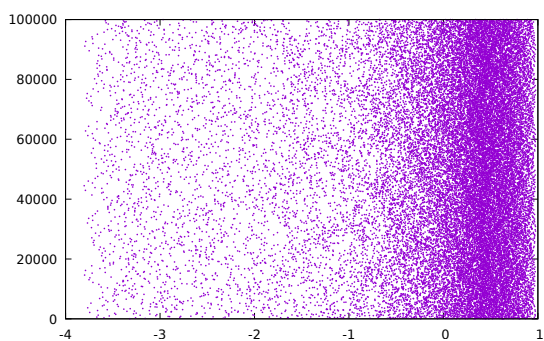


Figura 4.29: Los ceros de $\zeta_7(s)$

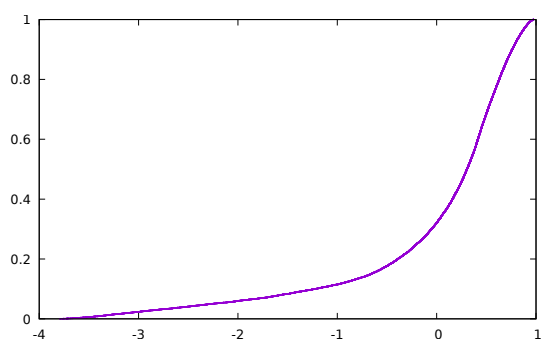


Figura 4.30: $\mu_7^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_7; \varphi_7]$

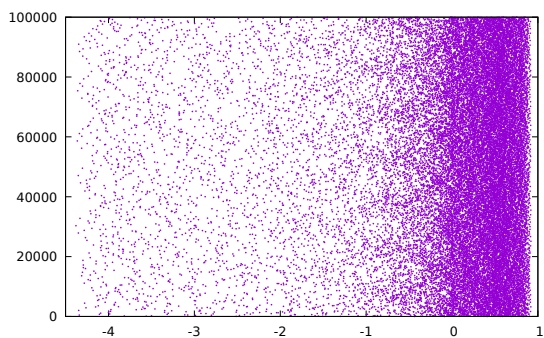


Figura 4.31: Los ceros de $\zeta_8(s)$

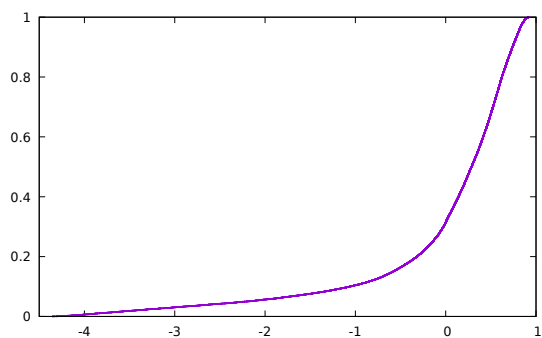


Figura 4.32: $\mu_8^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_8; \varphi_8]$

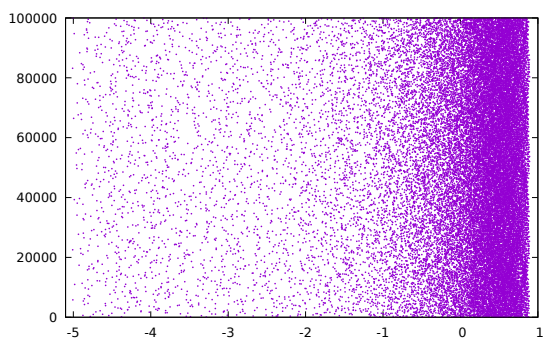


Figura 4.33: Los ceros de $\zeta_9(s)$

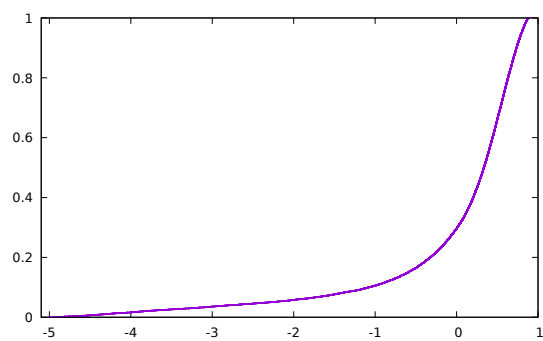


Figura 4.34: $\mu_9^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_9; \varphi_9]$

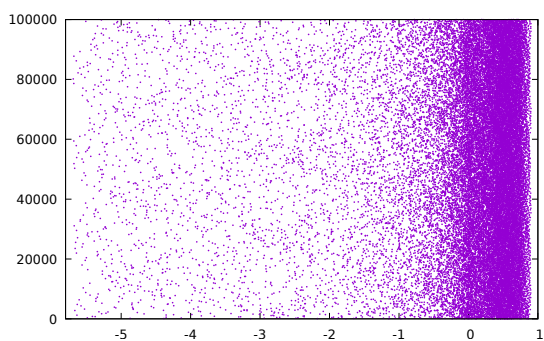


Figura 4.35: Los ceros de $\zeta_{10}(s)$

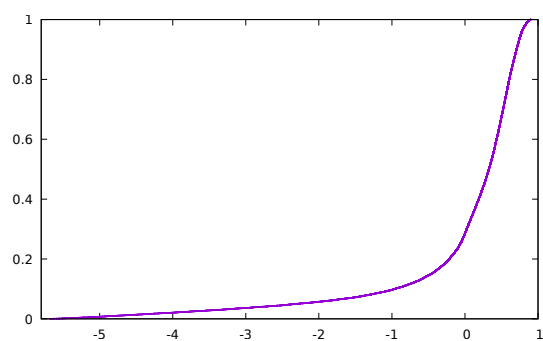


Figura 4.36: $\mu_{10}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{10}; \varphi_{10}]$

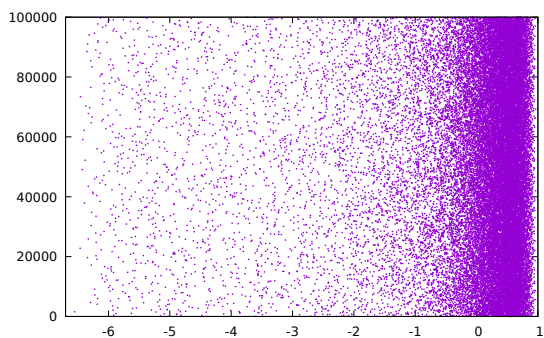


Figura 4.37: Los ceros de $\zeta_{11}(s)$

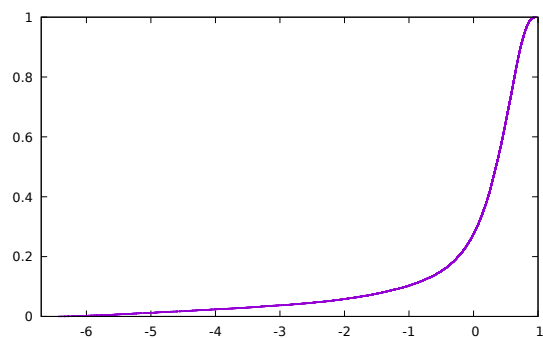


Figura 4.38: $\mu_{11}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{11}; \varphi_{11}]$

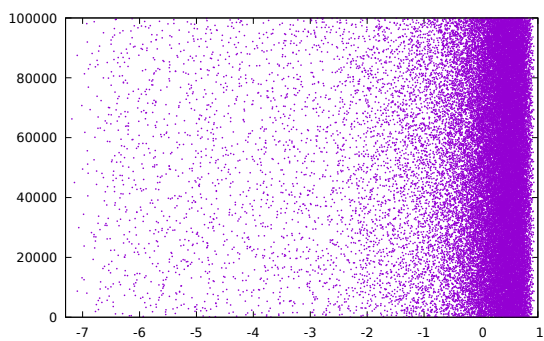


Figura 4.39: Los ceros de $\zeta_{12}(s)$

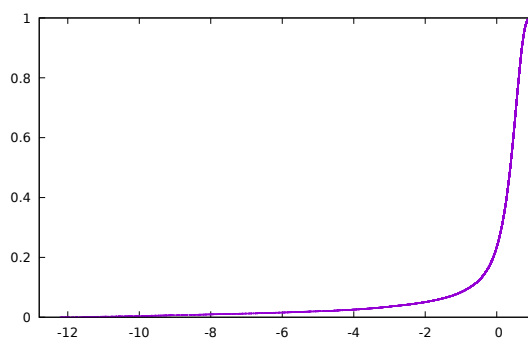


Figura 4.40: $\mu_{12}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{12}; \varphi_{12}]$

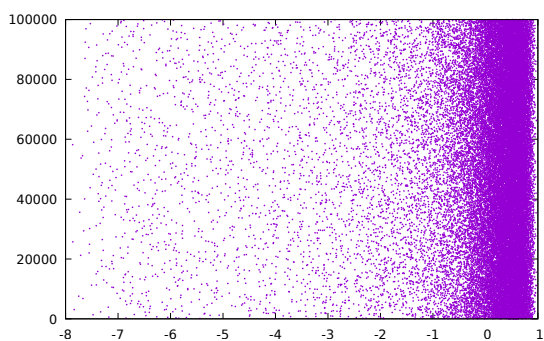


Figura 4.41: Los ceros de $\zeta_{13}(s)$

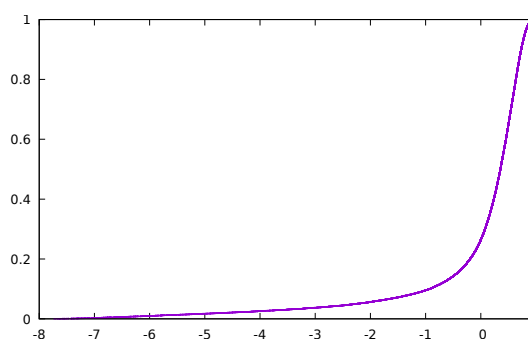


Figura 4.42: $\mu_{13}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{13}; \varphi_{13}]$

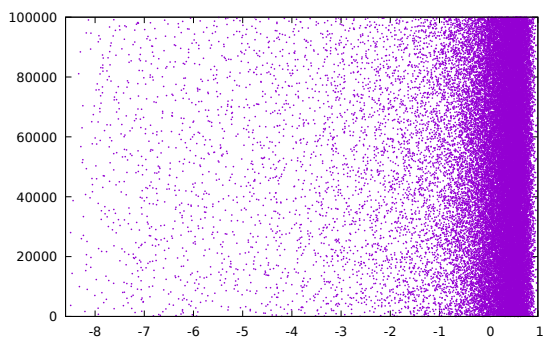


Figura 4.43: Los ceros de $\zeta_{14}(s)$

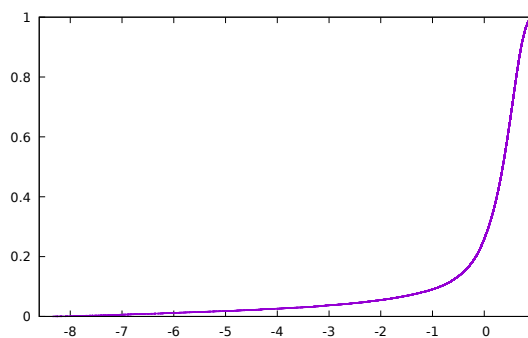


Figura 4.44: $\mu_{14}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{14}; \varphi_{14}]$

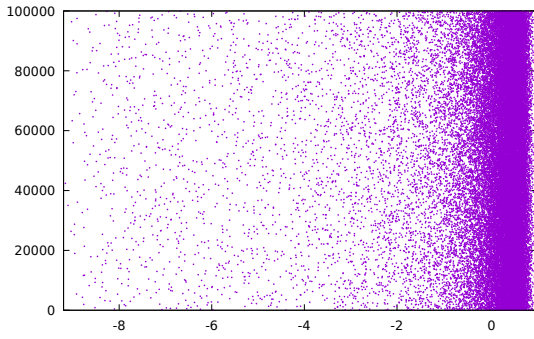


Figura 4.45: Los ceros de $\zeta_{15}(s)$

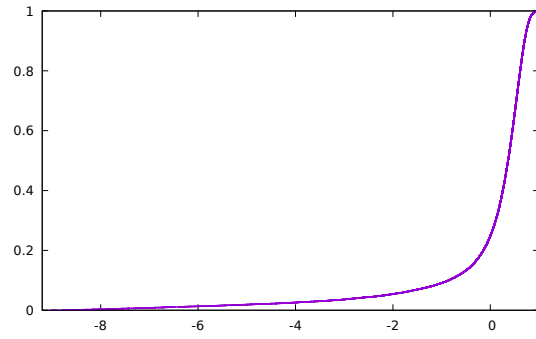


Figura 4.46: $\mu_{15}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{15}; \varphi_{15}]$

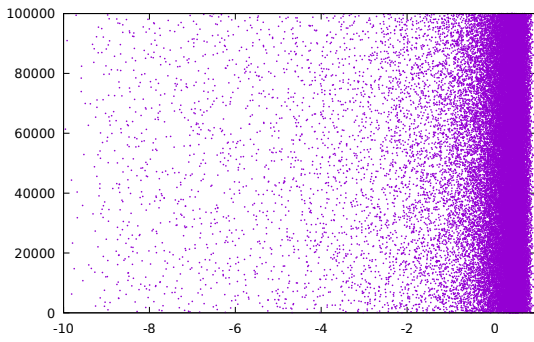


Figura 4.47: Los ceros de $\zeta_{16}(s)$

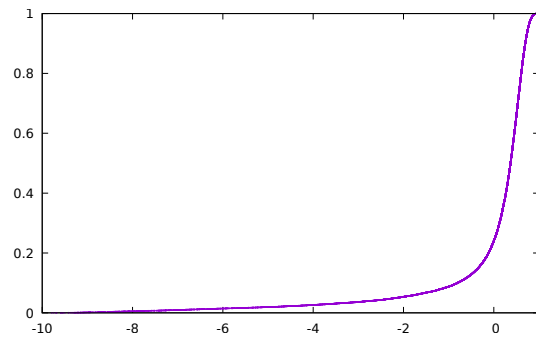


Figura 4.48: $\mu_{16}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{16}; \varphi_{16}]$

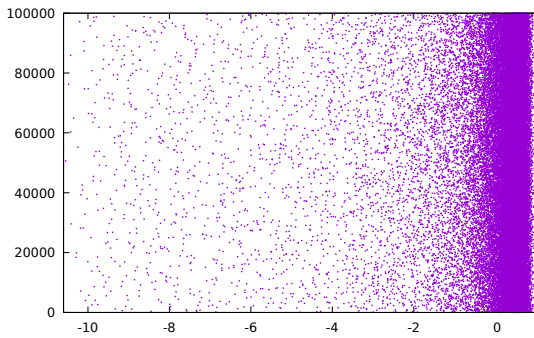


Figura 4.49: Los ceros de $\zeta_{17}(s)$

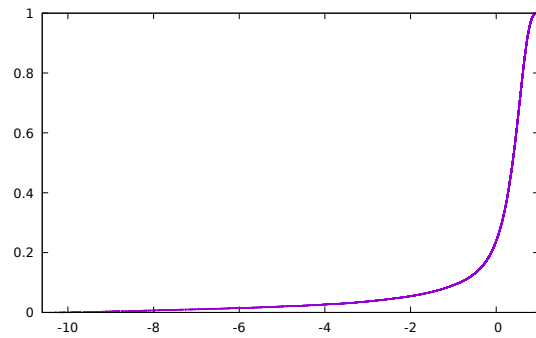


Figura 4.50: $\mu_{17}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{17}; \varphi_{17}]$

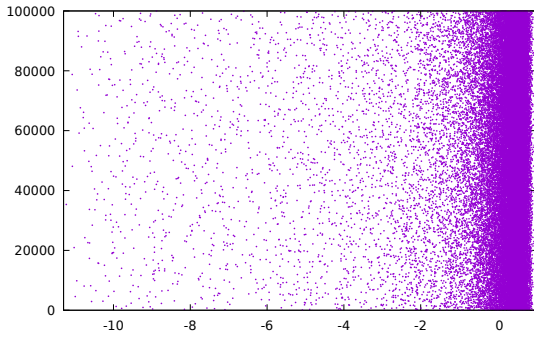


Figura 4.51: Los ceros de $\zeta_{18}(s)$

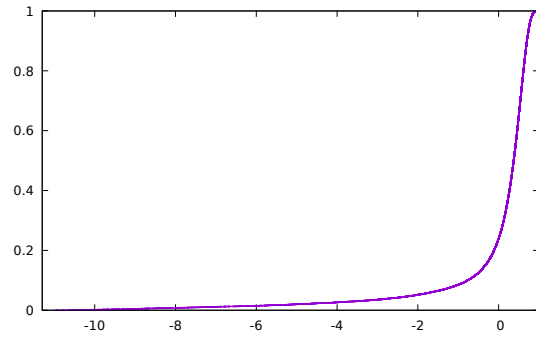


Figura 4.52: $\mu_{18}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{18}; \varphi_{18}]$

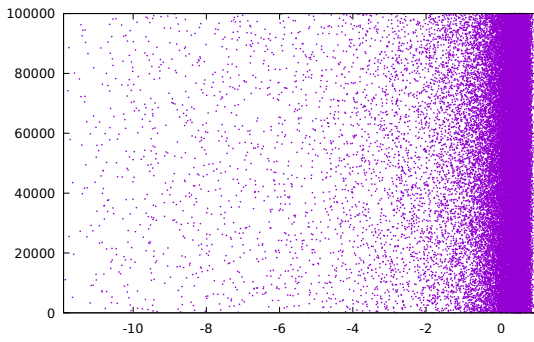


Figura 4.53: Los ceros de $\zeta_{19}(s)$

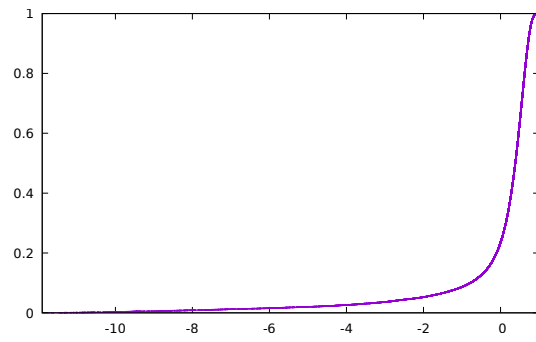


Figura 4.54: $\mu_{19}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{19}; \varphi_{19}]$

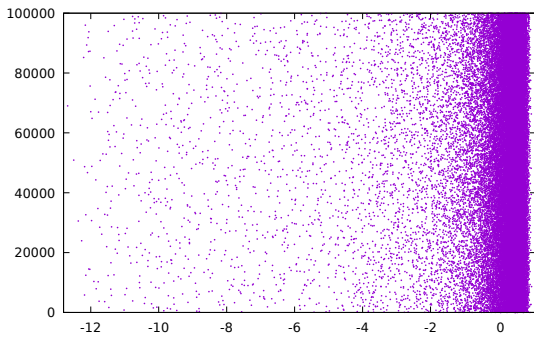


Figura 4.55: Los ceros de $\zeta_{20}(s)$

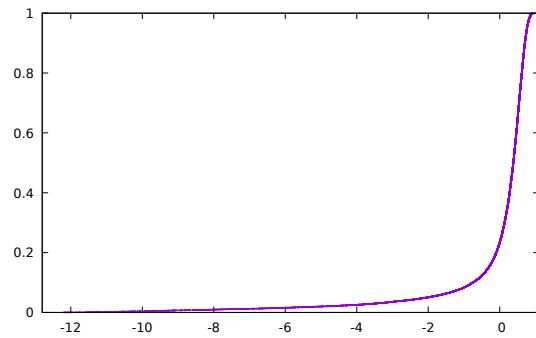


Figura 4.56: $\mu_{20}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{20}; \varphi_{20}]$

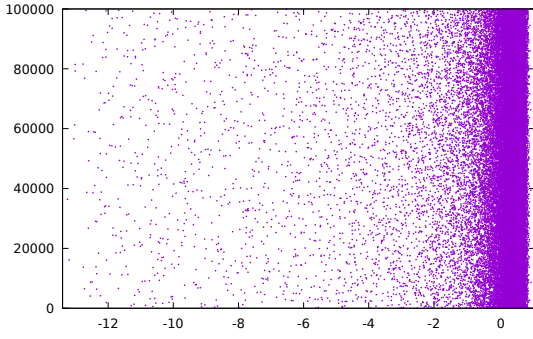


Figura 4.57: Los ceros de $\zeta_{21}(s)$

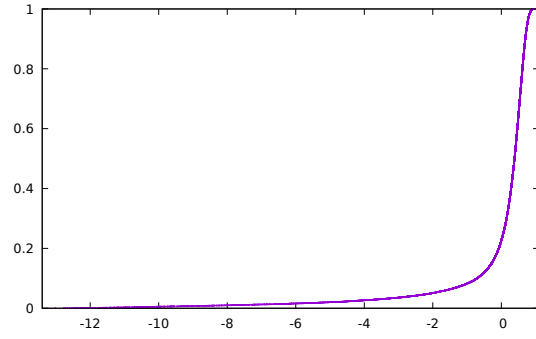


Figura 4.58: $\mu_{21}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{21}; \varphi_{21}]$

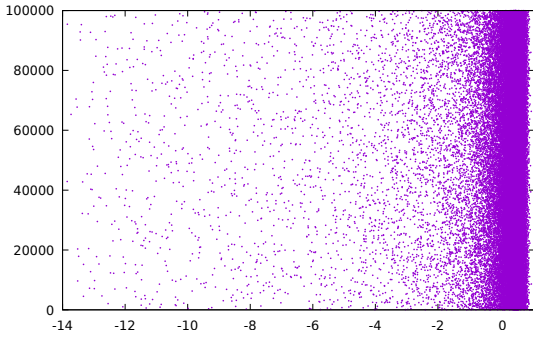


Figura 4.59: Los ceros de $\zeta_{22}(s)$

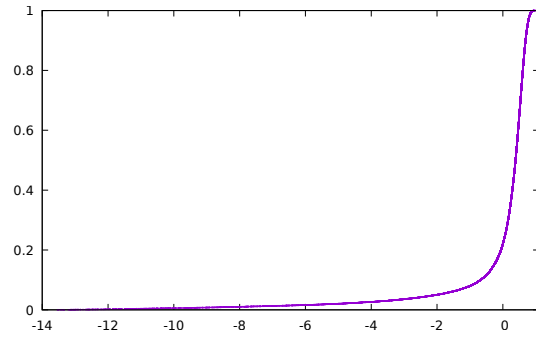


Figura 4.60: $\mu_{22}^*(\sigma)$, $\sigma \in [\psi_{22}; \varphi_{22}]$

Los gráficos presentados sugieren la existencia del límite de $\mu_n(\sigma, T)$ cuando $T \rightarrow \infty$. Sin embargo, al no poder asegurar la existencia de este límite en general, consideramos los límites

$$\underline{\mu}_n(\sigma) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}, \quad \overline{\mu}_n(\sigma) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}.$$

La función $\underline{\mu}_n$ (respectivamente $\overline{\mu}_n$) se denomina *función de distribución acumulada asintótica inferior* (respectivamente *superior*) de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$. Como para las funciones que originan los límites:

1. $\underline{\mu}_n$ es una función creciente,
2. $0 \leq \underline{\mu}_n(\sigma) \leq 1$,
3. $\underline{\mu}_n(\sigma) = 0$ para $\sigma < \psi_n$,
4. $\underline{\mu}_n(\sigma) = 1$ para $\sigma \geq \varphi_n$.

Similarmente para $\overline{\mu_n}$. Si además $\underline{\mu_n}(\sigma) = \overline{\mu_n}(\sigma)$, escribimos este límite común

$$\mu_n(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(\sigma, T)}{N_n(T)}$$

y la llamaremos simplemente función de distribución acumulada asintótica de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$ en σ .

4.5.2. Análisis de la función de distribución acumulada asintótica

Para no perder la generalidad de la discusión, en esta sección estudiaremos los polinomios de Dirichlet dado por (2.56)

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\lambda_k s}, \quad \text{donde } 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n,$$

y las a_k son constantes complejas no nulas $0 \leq k \leq n$. El lema 8 implica que el conjunto $\{\Re(s) : f(s) = 0\}$ está contenido en un intervalo compacto. Esto justifica la definición de

$$\psi_f = \inf \{\Re(s) : f(s) = 0\}, \quad \varphi_f = \sup \{\Re(s) : f(s) = 0\}.$$

De otro lado, para $T_1 < T_2$ y $\sigma \in \mathbb{R}$, sea

$$N(T_1, T_2) = |\{s \in \mathbb{C} : T_1 < \Im(s) < T_2\}|,$$

y

$$N(\sigma; T_1, T_2) = |\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \leq \sigma, T_1 < \Im(s) < T_2\}|.$$

Luego, definimos

$$\mu(\sigma; T_1, T_2) = \frac{N(\sigma; T_1, T_2)}{N(T_1, T_2)}.$$

Y para $T_1 < T_2$ fijados,

1. $\sigma \mapsto \mu(\sigma; T_1, T_2)$ es una función creciente en la variable $\sigma \in \mathbb{R}$,
2. $0 \leq \mu(\sigma; T_1, T_2) \leq 1$,
3. $\mu(\sigma; T_1, T_2) = 0$ para $\sigma < \psi_f$,
4. $\mu(\sigma; T_1, T_2) = 1$ para $\sigma \geq \varphi_f$.

De acuerdo a la proposición 11

$$\left| N(T_1, T_2) - \frac{T_2 - T_1}{2\pi} \lambda_n \right| \leq n,$$

de modo que

$$N(T_1, T_2) \sim \frac{T_2 - T_1}{2\pi} \lambda_n \quad \text{cuando } T_2 - T_1 \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

En particular, el número de ceros tiende al infinito cuando $T_2 - T_1$ tiende al infinito.

Lo anterior sugiere la existencia del límite de $\mu(\sigma; T_2, T_1)$ cuando $T_2 - T_1 \rightarrow \infty$. Como antes, consideramos los límites

$$\underline{\mu}(\sigma) = \liminf_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma; T_1, T_2)}{N(T_1, T_2)}, \quad \bar{\mu}(\sigma) = \limsup_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma; T_1, T_2)}{N(T_1, T_2)}.$$

La función $\underline{\mu}$ (respectivamente $\bar{\mu}$) se denomina *función de distribución acumulada asintótica inferior* (respectivamente *superior*) de las partes reales de los ceros de $f(s)$. Si los límites de arriba existen y coinciden, denominaremos al límite común

$$\mu(\sigma) = \lim_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma; T_1, T_2)}{N(T_1, T_2)}$$

la distribución acumulada asintótica de las partes reales de los ceros de $f(s)$ en $s = \sigma$.

Igual que para las funciones que originan los límites, se tiene para $\bar{\mu}$ (respectivamente para $\underline{\mu}$) las siguientes propiedades:

1. $\bar{\mu}$ es una función creciente,
2. $0 \leq \bar{\mu}(\sigma) \leq 1$,
3. $\bar{\mu}(\sigma) = 0$ para $\sigma < \psi$,
4. $\bar{\mu}(\sigma) = 1$ para $\sigma \geq \varphi$.

Las propiedades sugieren que $\underline{\mu}$ y $\bar{\mu}$ son funciones de distribución de probabilidad.

La idea detrás de la definición puede compararse con los resultados encontrados en (Jessen and Tornehave, 1945, §77).

Para estudiar la densidad de ceros de $f(s)$ en un intervalo $[a, b] \subset [\varphi_f, \psi_f]$, tenemos en cuenta que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que, para $T \geq T_0$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(b) - \bar{\mu}(a) - \varepsilon &< \frac{\left| \{s \in \mathbb{C} : f(s) = 0, a < \Re(s) < b, -T < \Im(s) < T\} \right|}{N(T)} \\ &< \bar{\mu}(b) - \underline{\mu}(a) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Lema 15. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto casiperiódico y $a < b$ tales que $\{\Re(s) : s \in A\} \cap (a, b) \neq \emptyset$. Entonces, existen $c > 0$ y $T_0 > 0$ tales que, para T_1 y T_2 con $T_2 - T_1 \geq T_0$

$$\left| \{s \in \mathbb{C} : a < \Re(s) < b, T_1 < \Im(s) < T_2\} \right| \geq c(T_2 - T_1).$$

Demostración. Sea $s_0 \in A$ con $a < \Re(s_0) < b$ y $\varepsilon > 0$ tal que $a < \Re(s_0) - \varepsilon < \Re(s_0) + \varepsilon < b$. Siendo $A = \{s_j\}_{j \in I}$ casi-periódico, el conjunto de las ε -traslaciones de A es relativamente denso, esto es, existe $l > 0$ tal que, para todo $d \in \mathbb{R}$, existe $T \in [d, d + l]$ y una biyección $f : I \rightarrow I$ tal que, para todo $j \in I$, $|s_j + iT - s_{f(j)}| < \varepsilon$.

Definimos $w_k = \Im(s_0) + k(l + 2\varepsilon)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Siendo $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [w_{k-1}, w_k)$, elegimos la mayor unión de intervalos contenida en $[T_1, T_2]$

$$\bigcup_{k=k_1}^{k_2} [w_{k-1}, w_k) \subset [T_1, T_2]; \quad w_{k_1-2} < T_1 \leq w_{k_1-1}, \quad w_{k_2} \leq T_2 < w_{k_2+1}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, dado $k \in \mathbb{Z}$, por definición de casiperiodicidad de A , existe

$$T_k \in [(k-1)(l+2\varepsilon) + \varepsilon, k(l+2\varepsilon) - \varepsilon],$$

intervalo de longitud l , con T_k siendo ε -casiperiodo de A , de donde existe $s_k \in A$ con $|s_0 + iT_k - s_k| < \varepsilon$. En particular $a < \Re(s_0) - \varepsilon < \Re(s_k) < \Re(s_0) + \varepsilon < b$ y

$$w_{k-1} \leq \Im(s_0) + T_k - \varepsilon < \Im(s_k) < \Im(s_0) + T_k \varepsilon \leq w_k.$$

Esto junto con (4.18) implica, aplicando esto a $k_1 \leq k \leq k_2$, que

$$\left| \{s \in \mathbb{C} : a < \Re(s) < b, T_1 < \Im(s) < T_2\} \right| \geq k_2 - k_1 + 1;$$

mientras que

$$T_2 - T_1 < w_{k_2+1} - w_{k_1-2} = (k_2 - k_1 + 3)(l + 2\varepsilon).$$

Además

$$k_2 - k_1 + 1 > \frac{1}{l + 2\varepsilon}(T_2 - T_1) - 2 > \frac{1}{2(l + 2\varepsilon)}(T_2 - T_1)$$

si $T_2 - T_1 > 4(l + 2\varepsilon) = T_0$. □

Ahora vamos a estudiar algunas propiedades de crecimiento de las funciones $\bar{\mu}$, $\underline{\mu}$. La siguiente propiedad fue estudiada de un modo distinto en (Jessen and Tornehave, 1945, §27); usaremos la casi periodicidad del conjunto de ceros de la función f .

Proposición 17. Si $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de distribución acumulada asintótica inferior o superior de las partes reales de los ceros de un polinomio de Dirichlet $f(s)$ y $a < b$ son tales que

$$\{\Re(s) : f(s) = 0\} \cap (a, b) \neq \emptyset,$$

entonces $\mu(a) < \mu(b)$.

Demostración. Desde que el conjunto de ceros del polinomio de Dirichlet es un conjunto casi-periódico, aplica el lema anterior. Por lo tanto, existen $c > 0$ y $T_0 > 0$ tales que, para $T_2 - T_1 \geq T_0$

$$|\{s \in \mathbb{C} : a < \Re(s) < b, T_1 < \Im(s) < T_2\}| \geq c(T_2 - T_1).$$

Luego

$$\begin{aligned} & |\{s \in \mathbb{C} : b < \Re(s), T_1 < \Im(s) < T_2\}| \\ & \geq |\{s \in \mathbb{C} : a < \Re(s), T_1 < \Im(s) < T_2\}| + c(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Dividiendo entre $N(T_1, T_2)$, haciendo $T_2 - T_1 \rightarrow +\infty$ y considerando el límite superior o inferior y el límite (4.16), se obtiene $\mu(b) \geq \mu(a) + \frac{2\pi c}{\lambda_n} > \mu(a)$. \square

Seguimos el desarrollo en (Jessen and Tornehave, 1945) en el marco de nuestro problema. Dada una recta $\Re(s) = \sigma$, definimos la determinación continua del argumento de f a lo largo de la recta, la función $t \mapsto \arg f(\sigma + it)$, en el caso en que f no tenga ceros sobre la recta. Del mismo modo, podemos definir (cf. (Jessen and Tornehave, 1945, §37))

- el argumento izquierdo $\arg^- f(s)$ de $f(s)$ como el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ de la variación continua de argumento de $f(s)$ a lo largo de la curva L_ε^- de la figura 4.5.2;
- el argumento derecho $\arg^+ f(s)$ de $f(s)$ como el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ de la variación continua de argumento de $f(s)$ a lo largo de la curva L_ε^+ de la figura 4.5.2.

De las definiciones, es claro que si $f(s)$ no posee ceros sobre la recta $\Re(s) = \sigma$, entonces $\arg^- f(\sigma + it) = \arg^+ f(\sigma + it)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si $f(s)$ posee un cero $s = \sigma + it$ de multiplicidad p , entonces \arg^- y \arg^+ poseen saltos de discontinuidad

$$\begin{aligned} \arg^- f(\sigma + it^+) - \arg^- f(\sigma + it^-) &= -p\pi \\ \arg^+ f(\sigma + it^+) - \arg^+ f(\sigma + it^-) &= p\pi. \end{aligned}$$

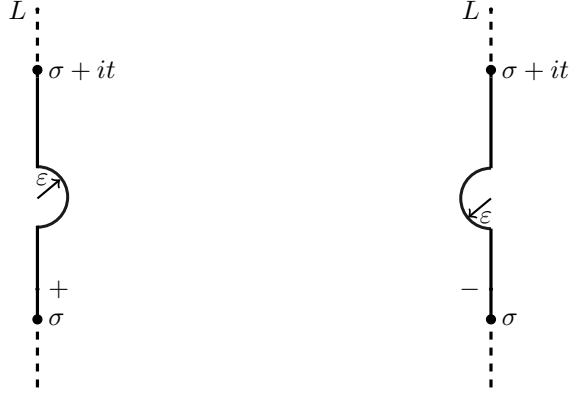


Figura 4.61: Origen de las variaciones izquierda y derecha del argumento de $f(s)$ a lo largo de $L : \Re(s) = \sigma$.

En particular, para $t_1 < t_2$

$$\arg^- f(\sigma + it_2) - \arg^- f(\sigma + it_1) \leq \arg^+ f(\sigma + it_2) - \arg^+ f(\sigma + it_1). \quad (4.19)$$

Ahora recordamos ciertas definiciones de (Jessen and Tornehave, 1945, §40). Fijados $T_1 < T_2$, consideramos funciones $h^+(\sigma)$, $h^-(\sigma)$ definidas por

$$h^\pm(\sigma) = \arg^\pm(\sigma + iT_2) - \arg^\pm(\sigma + iT_1).$$

Se cumple que

- h^- es continua por la izquierda, y
- h^+ es continua por la derecha.

A partir de estas funciones, definimos los movimientos medios de nuestra función.

Definición 23 (Movimientos medios). Siendo $f(s)$ una función casiperiódica definimos, en cada caso, el *movimiento medio*

1. *inferior izquierdo*, como

$$\underline{c}^-(\sigma) = \liminf_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^- f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}$$

2. *superior izquierdo*, como

$$\bar{c}^-(\sigma) = \limsup_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^- f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}$$

3. *inferior derecho*, como

$$\underline{c}^+(\sigma) = \liminf_{T_2-T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^+ f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}$$

4. *superior derecho*, como

$$\bar{c}^+(\sigma) = \limsup_{T_2-T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^+ f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}$$

Considerando que simplemente tendremos la acotación de la función arriba involucrada, estos cuatro límites son la respuesta más simple a la pregunta de si existe un límite, y es similar a las definiciones de las derivadas de Dini.

De las definiciones de límites inferior y superior

$$\underline{c}^-(\sigma) \leq \bar{c}^-(\sigma), \quad \underline{c}^+(\sigma) \leq \bar{c}^+(\sigma),$$

y de (4.19)

$$\underline{c}^-(\sigma) \leq \underline{c}^+(\sigma), \quad \bar{c}^-(\sigma) \leq \bar{c}^+(\sigma).$$

Si los límites inferior y superior correspondientes existen, en cada caso, tenemos además el *movimiento medio*

1. *izquierdo* (cuando $\underline{c}^-(\sigma) = \bar{c}^-(\sigma)$)

$$c^-(\sigma) = \lim_{T_2-T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^- f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1},$$

2. *derecho* (cuando $\underline{c}^+(\sigma) = \bar{c}^+(\sigma)$)

$$c^+(\sigma) = \lim_{T_2-T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg^+ f(\sigma + iT_2) - \arg^- f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}.$$

Y por último, si $\arg^+ f(s) = \arg^- f(s)$, consecuencia de la no existencia de ceros sobre una recta, tendremos simplemente el *movimiento medio*

$$c(\sigma) = \lim_{T_2-T_1 \rightarrow \infty} \frac{\arg f(\sigma + iT_2) - \arg f(\sigma + iT_1)}{T_2 - T_1}.$$

De hecho, si hubieran ceros con $\Re(s) = \sigma$, podemos considerar igual

$$\arg f(\sigma + it) = \frac{1}{2}(\arg^- f(\sigma + it) + \arg^+ f(\sigma + it)).$$

Para esto, debemos traer a discusión el hecho que si una función meromorfa posee ceros sobre una curva, resultados como el principio del argumento siguen siendo válidos si consideramos

un “medio” conteo de los ceros o polos considerados sobre la curva misma. La analogía más familiar es la de la fórmula de Perron.

Por consiguiente si existe $c^-(\sigma)$ y $c^+(\sigma)$, entonces también existe

$$c(\sigma) = \frac{1}{2}(c^-(\sigma) + c^+(\sigma)).$$

Ahora, siguiendo (Jessen and Tornehave, 1945, p. 181), definimos objetos para el estudio de proporciones de ceros en bandas. Definimos

$$N(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2) = \left| \{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2, T_1 < \Im(s) < T_2\} \right|.$$

Definimos la *frecuencia relativa* de ceros de $f(s)$ en la banda $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$

▪ *inferior*

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \liminf_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2)}{T_2 - T_1},$$

▪ *superior*

$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \limsup_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2)}{T_2 - T_1}.$$

Lo encontrado en (Jessen and Tornehave, 1945, Theorem 4) es el análogo a nuestra desigualdad (4.17). Aquí es donde debemos relacionar los argumentos calculados y las frecuencias relativas. Considerando $f(s)$ sin ceros de partes reales σ_1, σ_2 y el argumento en segmentos horizontales de la prueba de la proposición 11

$$\begin{aligned} N(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2) &= \frac{1}{2\pi} (\arg f(\sigma_2 + iT_2) - \arg f(\sigma_2 + iT_1) \\ &\quad - \arg f(\sigma_1 + iT_2) - \arg f(\sigma_1 + iT_1)) + R(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2), \end{aligned}$$

donde $|R(\sigma_1, \sigma_2; T_1, T_2)| \leq n - 1$. Dividiendo entre $T_2 - T_1 \rightarrow \infty$, tenemos

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi} (\underline{c}(\sigma_1) - \bar{c}(\sigma_2)). \quad (4.20)$$

Una fórmula análoga se obtiene para $\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2)$ y, suponiendo que los momentos inferior y superior coinciden para σ_1 y σ_2 , obtenemos el límite común $\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2)$, igual a

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi} (c(\sigma_1) - c(\sigma_2)).$$

Probablemente el objeto más interesante descrito en (Jessen and Tornehave, 1945, §43) es la función de Jensen, definida como el promedio del logaritmo del módulo de una función f , esto es

$$\varphi(\sigma) = \lim_{T_2 - T_1 \rightarrow \infty} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T_2 - T_1} \log |f(\sigma + it)| dt.$$

Jessen y Tornehave demuestran que este límite existe, un límite análogo al promedio definido para funciones casi periódicas en general.

Entre otros resultados, podemos destacar (Jessen and Tornehave, 1945, §45, §46, §47, §49):

- La desigualdad involucrando los movimientos medios (Jessen and Tornehave, 1945, Theorem 7)

$$\varphi'_-(\sigma) \leq \underline{c}^-(\sigma) \leq \left\{ \begin{array}{c} \underline{c}^+(\sigma) \\ \bar{c}^-(\sigma) \end{array} \right\} \leq \bar{c}^+(\sigma) \leq \varphi'_+(\sigma), \quad (4.21)$$

donde $\varphi'_-(\sigma)$ y $\varphi'_+(\sigma)$ se refieren, respectivamente, a las derivadas izquierda y derecha de φ en el punto σ .

- En particular, si φ es diferenciable en σ , se da la arriba una secuencia de igualdades, que implican que la frecuencia relativa de ceros de $f(s)$ en $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$ es

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi} (\varphi'(\sigma_2) - \varphi'(\sigma_1)).$$

Esta última es conocida como la *fórmula de Jensen para funciones casi periódicas*.

La función de Jensen φ , salvo por una constante multiplicativa λ_n , corresponde a una primitiva de nuestra función de distribución acumulativa asintótica μ . A través del análisis del movimiento medio de un polinomio de Dirichlet, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 18. *Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet dado por (2.56). Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *existe el límite que define el movimiento medio $c(\sigma)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$, salvo a lo más en un número finito de valores de σ .*
2. *existe a lo más un número finito de intervalos (maximales) en los que la función $c(\sigma)$ mantiene valor constante.*

Demostración. Según (Jessen and Tornehave, 1945, §122) para un polinomio de Dirichlet dado por (2.56), para ciertos valores de $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma) = \lambda_0\sigma + \log|a_0|$ para $\sigma < \alpha_0$, mientras que $\varphi(\sigma) = \lambda_n\sigma + \log|a_n|$ para $\sigma > \beta_0$. Por (Jessen and Tornehave, 1945, Theorem 21, Theorem 26), existen a lo más un número finito de intervalos de linealidad y un número finito de puntos de no diferenciabilidad de φ . Los intervalos de linealidad de $\varphi(\sigma)$ corresponden a intervalos de constancia de la función $c(\sigma)$. Por otro lado, en los puntos de diferenciabilidad, se cumple por (4.21) que $\varphi'(\sigma) = c(\sigma)$, con lo que se garantiza la existencia del valor medio. □

Retomando el argumento de la proposición 11, se calculan rápidamente los momentos

- $c(\sigma) = 0$ para $\sigma > \psi_f$;
- $c(\sigma) = -\lambda_n$ para $\sigma < \varphi_f$.

Teniendo en cuenta esto, en una fórmula como (4.20) tenemos que

$$\underline{\mu}(\sigma) = \underline{H}(\varphi_f - 1, \sigma) = \underline{c}(\sigma) + \lambda_n \quad \text{y} \quad \overline{\mu}(\sigma) = \overline{H}(\varphi_f - 1, \sigma) = \overline{c}(\sigma) + \lambda_n,$$

de modo que la convergencia de nuestras funciones $\overline{\mu}$, $\underline{\mu}$ corresponde a la existencia de los valores medios \overline{c} , \underline{c} . Sin embargo, todo esto es válido bajo la hipótesis de que $f(s)$ no tiene ceros sobre la recta $\Re(s) = \sigma$. Para aprovechar el resultado de la proposición 18 requerimos redefinir nuestras funciones de densidad inferior y superior $\overline{\mu}(\sigma)$ y $\underline{\mu}(\sigma)$ a partir de una redefinición de la función de conteo de ceros:

$$N(\sigma; T_1, T_2) = \left| \{s \in \mathbb{C} : f(s) = 0, \Re(s) < \sigma, T_1 < \Im(s) < T_2\} \right| + \frac{1}{2} \left| \{s \in \mathbb{C} : f(s) = 0, \Re(s) = \sigma, T_1 < \Im(s) < T_2\} \right|. \quad (4.22)$$

De este modo, el resultado de la proposición 18 se traduce a lo siguiente:

Proposición 19. *Sea $f(s)$ un polinomio de Dirichlet dado por (2.56). Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *existe la distribución acumulada asintótica de las partes reales de los ceros de un polinomio de Dirichlet, $\mu(\sigma)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$, salvo a lo más para un número finito de valores de σ .*
2. *existe a lo más un número finito de intervalos (maximales) en los que la función $\mu(\sigma)$ mantiene valor constante.*

4.6. Simetrías y distribución de los ceros

Siguiendo (Borwein et al., 2007, Theorem 4.5) escribimos el siguiente enunciado similar

Teorema 23 (Borwein et al). *Sean p, q números primos distintos y $f(s) = \sum_{finita} c_k k^{-s}$ una suma exponencial con $c_k \neq 0$ y $k = p^a q^b$ para ciertos enteros no negativos a y b . Si $(m_1, m_2) \in \{(0; 1), (1; 0)\}$ o m_1, m_2 son enteros coprimos, entonces, los ceros de $f(s)$ reducidos módulo*

$$\frac{2\pi}{|\log(p^{m_1} q^{m_2})|}$$

se encuentran sobre el periodo de una curva de la forma

$$F\left(p^{-\Re(s)}, q^{-\Re(s)}, \cos(a\Im(s)), \sin(a\Im(s))\right) = 0, \quad (4.23)$$

donde F es un polinomio y $a = \log(p^{m_1}q^{m_2})$.

De la demostración del teorema resulta el procedimiento a seguir para determinar la curva correspondiente. En primer lugar, se determinan los enteros l_1, l_2 tales que $l_1m_2 - l_2m_1 = 1$. A continuación, resolviendo el sistema lineal en las variables A y B

$$l_1A + m_1B = \log(q)\Im(s), \quad -l_2A - m_2B = \log(p)\Im(s). \quad (4.24)$$

se obtiene que

$$A = (m_1 \log(p) + m_2 \log(q))\Im(s) \quad \text{y} \quad B = -(l_1 \log(p) + l_2 \log(q))\Im(s).$$

Las ecuaciones $\Im(f(s)) = 0$ y $\Re(f(s)) = 0$, se escriben, a partir de su escritura como polinomios en: $p^{-\Re(s)}, q^{-\Re(s)}, \sin(\log(p)\Im(s)), \cos(\log(p)\Im(s)), \sin(\log(q)\Im(s))$ y $\cos(\log(q)\Im(s))$, y de (4.24) como polinomios en:

$$p^{-\Re(s)}, q^{-\Re(s)}, \cos(A), \sin(A), \cos(B) \text{ y } \sin(B).$$

De estas dos ecuaciones, junto con $\cos^2(B) + \sin^2(B) = 1$, y el proceso de eliminación llevado a cabo por el método de las bases de Gröbner, nos permite obtener una ecuación de la forma $F(p^{-\Re(s)}, q^{-\Re(s)}, \cos(a\Im(s)), \sin(a\Im(s))) = 0$, con periodo $\frac{2\pi}{|\log(p^{m_1}q^{m_2})|}$.

Ejemplo 6. Los ceros de $\zeta_3(s)$ reducidos módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$ y módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$, con la respectiva ecuación, de la curva que contiene a todos sus ceros (aquí $p = 2$ y $q = 3$, en el primer caso $m_1 = -5, m_2 = 6$, y en segundo caso $m_1 = -4$ y $m_2 = 7$).

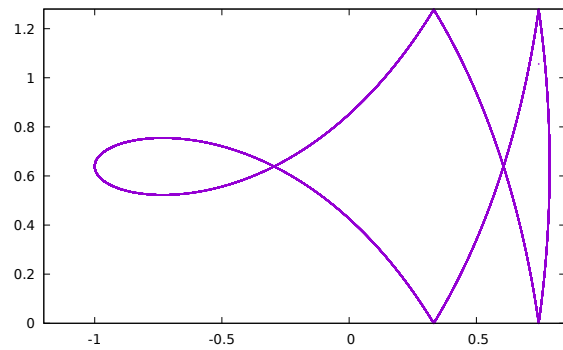
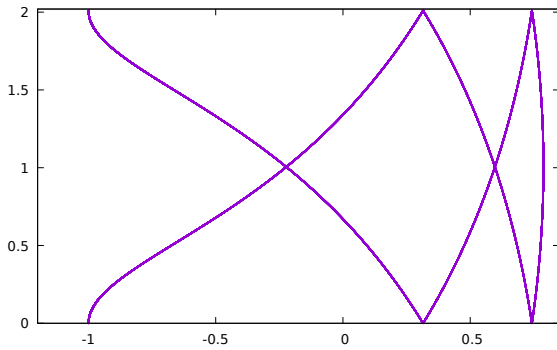


Figura 4.62: Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$

Figura 4.63: Ceros de $\zeta_3(s)$ módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$

Si $x = \Re(s)$ e $y = \Im(s)$ de acuerdo al algoritmo de Gröbner, la ecuación de la curva con módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^6/2^5)|}$ es,

$$\begin{aligned} & -3^{4x}2^{7x+1} \cos\left(y \log\left(\frac{729}{32}\right)\right) + 3^{2x}(5 \cdot 2^{12x} - 2^{10x}) \\ & - 3^{8x}(5 \cdot 2^{12x} - 19 \cdot 2^{10x} + 2^{4x} + 2^{2x} + 13 \cdot 2^{8x+1} - 7 \cdot 2^{6x+1}) \\ & + 3^{10x}(2^{12x} + 15 \cdot 2^{8x} + 15 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{10x+1} - 5 \cdot 2^{6x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 1) \\ & - 3^{6x}(21 \cdot 2^{10x} + 2^{6x} - 5 \cdot 2^{12x+1} - 3 \cdot 2^{8x+2}) \\ & + 3^{4x}(9 \cdot 2^{10x} - 2^{8x} - 5 \cdot 2^{12x+1}) - 2^{12x} = 0. \end{aligned}$$

y la ecuación de la curva con módulo $\frac{2\pi}{|\log(3^7/2^4)|}$ es,

$$\begin{aligned} & 3^x2^{10x+1} \cos\left(y \log\left(\frac{2187}{16}\right)\right) \\ & + 3^{8x}(2^{14x} - 7 \cdot 2^{12x} + 21 \cdot 2^{10x} - 35 \cdot 2^{8x} + 35 \cdot 2^{6x} - 21 \cdot 2^{4x} + 7 \cdot 2^{2x} - 1) \\ & + 3^{6x}(17 \cdot 2^{12x} - 25 \cdot 2^{10x} - 11 \cdot 2^{4x} + 3 \cdot 2^{2x} - 2^{14x+2} + 5 \cdot 2^{8x+1} + 5 \cdot 2^{6x+1}) \\ & - 3^{4x}(13 \cdot 2^{12x} + 3 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{14x+1} - 3 \cdot 2^{10x+1} - 2^{6x+2}) \\ & + 3^{2x}(3 \cdot 2^{12x} + 2^{6x} - 2^{14x+2}) + 2^{14x} = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Las curvas que contienen todos los ceros de $\zeta_4(s)$ reducidos módulo $\frac{2\pi i}{\log(2)}$, y módulo $\frac{4\pi i}{\log(6)}$ respectivamente son:

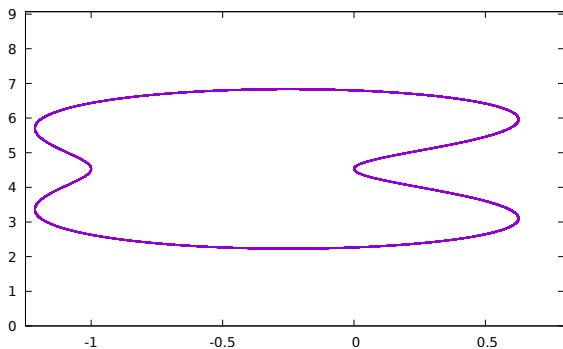


Figura 4.64: Ceros de $\zeta_4(s)$ módulo $\frac{2\pi i}{\log(2)}$

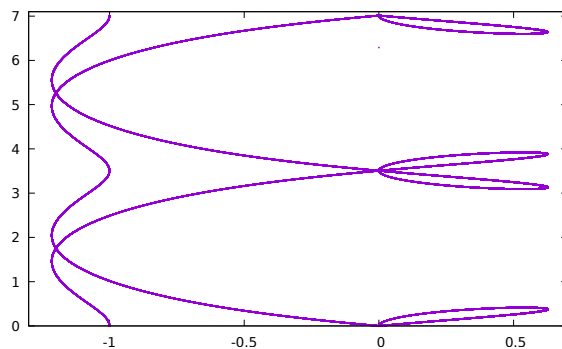


Figura 4.65: Ceros de $\zeta_4(s)$ módulo $\frac{4\pi i}{\log(6)}$

4.7. Los ceros especiales

4.7.1. Cálculo de ceros especiales

El siguiente teorema, es una consecuencia del algoritmo LLL sobre un retículo particular.

Teorema 24 (Lenstra et al, , Proposition 1.39,1982). *Dado $0 < \varepsilon < 1$ y n números racionales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, existe un algoritmo de complejidad polinomial que encuentra los enteros p_1, p_2, \dots, p_n y $q \in \mathbb{N}$ tales que*

$$|p_i - q\alpha_i| \leq \varepsilon \quad y \quad 1 \leq q \leq 2^{\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{-n} \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \quad (4.25)$$

Demostración. Considerando el retículo $L = \langle b_1, b_2, \dots, b_n, b'_{n+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ en \mathbb{R}^{n+1} , donde

$$b_i = e_i \quad 1 \leq i \leq n$$

y

$$b'_{n+1} = \left(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n, 2^{-\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{n+1} \right)^T$$

Determinar una base LLL-reducida implica determinar un vector $b_1 \in L$ de la forma

$$b_1 = \left(p_1 - q\alpha_1, p_2 - q\alpha_2, \dots, p_n - q\alpha_n, q \cdot 2^{-\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{n+1} \right)^T$$

Aprovechando la ecuación (2.70)

$$\|b_1\| \leq 2^{\frac{n}{4}} \det(L)^{\frac{1}{n+1}} = \varepsilon$$

puesto que $\det(L) = |\det(e_1, e_2, \dots, e_n, b_{n+1})| = 2^{-\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{n+1}$, así

$$|p_i - q\alpha_i| \leq \|b_1\| \leq \varepsilon \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

y

$$|q| \cdot 2^{-\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{n+1} \leq \varepsilon$$

de donde

$$|q| \leq 2^{\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{-n}$$

Si $q < 0$, trabajamos con $-b_1$ que cumple las condiciones y nos permite decir que $q > 0$, por tanto

$$\begin{aligned} |p_i - q\alpha_i| &\leq \varepsilon \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq q &\leq 2^{\frac{n(n+1)}{4}} \varepsilon^{-n} \end{aligned}$$

como se buscaba. □

La pregunta natural es, ¿cómo aprovechar esto para hallar los ceros especiales?. La respuesta es simple considerando que se desea una respuesta aproximada, se puede plantear la existencia de un valor T tal que $\zeta_n(s) \approx \zeta_n(s + iT)$ y analizar las características que debe cumplir T . El objetivo principal es que la diferencia $\zeta_n(s + iT) - \zeta_n(s)$ sea mínima, entonces

$$\zeta_n(s + iT) - \zeta_n(s) = \sum_{j=1}^n e^{-(s+iT)\log(j)} - \sum_{j=1}^n e^{-s\log(j)} = \sum_{j=1}^n e^{-s\log(j)} (e^{-iT\log(j)} - 1)$$

Dado que las condiciones sobre T aún no están definidas, podemos imponer que

$$e^{-iT\log(j)} \approx 1$$

de donde

$$T\log(j) \approx 2\pi k_j \quad \text{para algún } k_j \in \mathbb{Z}.$$

Formalmente, elegimos $\varepsilon > 0$ tal que

$$|T\log(j) - 2\pi k_j| < \varepsilon, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Que, por las propiedades del logaritmo, la condición sobre T será

$$|T\log(p_j) - 2\pi k_j| < \varepsilon \quad \forall p_j \leq n \text{ primo}$$

o bien

$$\left| k_j - T \left(\frac{\log(p_j)}{2\pi} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon' \quad (4.26)$$

que se puede resolver aplicando el teorema 24 con

$$\alpha_j = \frac{\log(p_j)}{2\pi}$$

Es decir, existen $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ y existe $T \in \mathbb{N}$ que satisfacen la ecuación (4.26).

Ahora, para el cálculo de los ceros especiales, con el valor de T ya determinado, usaremos el algoritmo que calcula los ceros de la suma parcial en un rectángulo, para lo cual será necesario extenderla a un rectángulo lo suficientemente pequeño (para evitar cálculos innecesarios) pero al mismo tiempo lo suficientemente grande (para garantizar el obtener el cero que está en esa región). Entonces, se usará un bucle partiendo desde un cero s_0 con $\Im(s_0)$ pequeño y se buscará el cero con el algoritmo para rectángulos ya conocido. En otras palabras, el algoritmo aumenta iT al cero actual (inicializado en un cero hallado previamente) hasta que ya no se pueda encontrar algún cero en la región:

$$\text{máx} \{1 + 10^{-16}, \Re(s_0) - 0,1\} \leq \Re(s) \leq \text{mín} \{2, \Re(s_0) + 0,1\},$$

$$\Im(s_0) + T - 5 \leq \Im(s) \leq \Im(s_0) + T + 5$$

Donde s_0 es una referencia al último cero encontrado durante la ejecución del algoritmo.

n	T
19 y 22	1974855150124248772046477247972475901893986961887769022939008641898 T_{19}
23 – 27	8269926651532724417685902415943094142677984834589016282637537164354274577950 T_{23}
29 y 30	70145010695054256381086744148281748573495955715179938080487663472671100973151293566,9 T_{29}
31 – 36	4551694981106004863582510815155897059289591538330692590425836713090050972765821776822707301790,9 T_{31}
37 – 40	3,37240829043053544909278082806926466703611677212924226722791095631390880967908754530611190161217373e + 103 T_{37}
41 y 42	1,25845674493529901293015373440765970771126127311364130128323795335875829531580523071295708831298138e + 113 T_{41}
43 – 46	7,519947886804984096651004309739599925077878608931378204479986460127991090338041991458773901543215558e + 120 T_{43}
47 – 50	6,060578462915181958479746061941360569718291589286718186763684257444911094120647338042842935279507653e + 132 T_{47}

Cuadro 4.8: Recopilación de los T obtenidos para $\varepsilon = 10^{-7}$

n	σ_0	τ_0	T	$\sigma_0^* \approx \sigma_0$	$\tau_0^* \approx \tau_0 + T$
19	1,00109551153647629042	600884,20342777571274233235	T_{19}	1,00109551183366612872	19748551501242487720464772479724759018939869618877690229390009242782,2034277
22	1,00289095288447098811	558159406,14828557113984871054	T_{22}	1,00289095281018320818	1974855150124248772046477247972475901893986961887769022939566801304,14828557
23	1,01044334922698341898	8502832,39912065772578142170	T_{23}	1,01044334907253150153	8269926651532724417685902415943094142677984834589016282637537164354283080782,3991
24	1,00404186833602031723	32520751,78599510357179634043	T_{23}	1,00404186831516503882	8269926651532724417685902415943094142677984834589016282637537164354307098701,7859
25	1,00044920152434295543	32520751,80223907180402332765	T_{23}	1,00044920151113704838	8269926651532724417685902415943094142677984834589016282637537164354307098701,8022
26	1,00635284737135701011	36323746,32695248213955443469	T_{23}	1,00635284722589490174	8269926651532724417685902415943094142677984834589016282637537164354310901696,3269
31	1,00710368676439502484	52331955,65876127657415336860	T_{31}	1,00710368907192511022	4551694981106004863582510815155897059289591538330692590425836713090050972765821776822759633746,6587

Cuadro 4.9: Recopilación de los ceros especiales iniciales s_0 y ceros $s_0^* = \sigma_0^* + i\tau_0^*$ cercano a $s_0 + iT$

Proposición 20. Sea $n \geq 2$, $s_0 \in \mathbb{C}$ un cero de $\zeta_n(s)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\zeta_n(s) \neq 0$ para todo $s \in \partial R_{s_0, \varepsilon}$ con

$$R_{s_0, \varepsilon} = [\Re(s_0) - \varepsilon, \Re(s_0) + \varepsilon] \times [\Im(s_0) - \varepsilon, \Im(s_0) + \varepsilon]$$

entonces, podemos calcular efectivamente $T > 0$ tal que $\zeta_n(s)$ posee un cero en $R_{s_0 + iT, \varepsilon}$

Demostración. Sea γ un rectángulo que contiene a un cero s_0 de la función $f(s)$ (por ejemplo $f(s) = \zeta_n(s)$ con n fijo) y supongamos que existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < \eta \leq |f(s)|, \quad \forall s \in \gamma^*$$

Sea $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall s \in \gamma^*, \quad |f(s + iT) - f(s)| < \eta \quad (4.27)$$

entonces $\forall s \in \gamma^*$, $|g(s) - f(s)| < |f(s)|$ con $g(s) = f(s + iT)$. Así por el teorema de Rouché, el número de ceros de f en el interior de γ es igual el número de ceros de g en el interior de γ . Esto es, $|Z(f)|_\gamma = |Z(g)|_\gamma$, y como $|Z(f)|_\gamma = 1$, concluimos que

$$\exists s_0^* \in \text{int}(\gamma); \quad f(s_0^* + iT) = 0$$

Considerando $p_i \leq n$ primo ($i = 1, 2, \dots, \pi(n)$), por el teorema 24, existe $T \in \mathbb{N}$ y existen enteros $l_{p_1}, l_{p_2}, \dots, l_{p_{\pi(n)}}$ tales que $\left| T \left(\frac{\log(p_i)}{2\pi} \right) - l_{p_i} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, es decir

$$\left| T \log(p_i) - 2l_{p_i} \pi \right| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, \pi(n) \quad (4.28)$$

Ahora para cada $k \leq n$ no primo, digamos $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$

$$\log(n) \geq \log(k) = \sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i \log(p_i) \geq \left(\sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i \right) \log(2)$$

de donde

$$\left(\sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i \right) \leq \frac{\log(n)}{\log(2)} \quad (4.29)$$

y considerando $l_k = \sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i l_{p_i}$, $l_k \in \mathbb{Z}$. Entonces de las ecuaciones (4.28) y (4.29)

$$\left| T \log(k) - 2l_k \pi \right| = \left| T \sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i \log(p_i) - \sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i 2\pi l_{p_i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{r_k} \alpha_i \right) \left| T \log(p_i) - 2\pi l_{p_i} \right| < \frac{\log(n)}{\log(2)} \varepsilon \quad (4.30)$$

Ahora,

$$|\zeta_n(s + iT) - \zeta_n(s)| \leq \sum_{k=2}^n k^{-\sigma} |k^{-iT} - 1|, \quad s = \Re(s)$$

pero

$$|k^{-iT} - 1| = \left| e^{-iT \log(k)} - 1 \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{T \log(k)}{2} \right) \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{T \log(k)}{2} - l_k \pi \right) \right| \leq |T \log(k) - 2\pi l_k|$$

luego

$$|\zeta_n(s + iT) - \zeta_n(s)| \leq \sum_{k=2}^n k^{-\sigma} |k^{-iT} - 1| \leq \sum_{k=2}^n k^{-\sigma} \frac{\log(n)}{\log(2)} \varepsilon \leq \sum_{k=2}^n 2^{-\sigma} \frac{\log(n)}{\log(2)} \varepsilon$$

y como $\sigma = \Re(s) \geq 1$, concluimos que

$$\left| \zeta_n(s + iT) - \zeta_n(s) \right| \leq (n-1) 2^{-1} \frac{\log(n)}{\log(2)} \varepsilon \quad (4.31)$$

Finalmente, considerando $\gamma = \partial R_{s_0, \varepsilon}$ la frontera del rectángulo, y dado que por la ecuación (4.31) se cumple la condición (4.27) para la función $f(s) = \zeta_n(s)$, concluimos que

$$\exists s_0^* \in \operatorname{int}(\gamma); \zeta_n(s_0^* + iT) = 0$$

donde $s_0^* + iT \in R_{s_0 + iT, \varepsilon}$ □

4.7.2. Discusión de polinomios multivariados y el algoritmo de Trudgian

Con las condiciones y notaciones del teorema 21, fijados $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, y luego de una traslación por σ_0

$$\left\{ P(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = e^{-\lambda_1 \sigma_0}, \dots, |z_n| = e^{-\lambda_n \sigma_0} \right\} = \bigcap_{\delta > 0} \{ D(s) : |\Re(s)| < \delta \}.$$

luego, para $a < b$

$$\left\{ P(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = e^{-\lambda_1 \sigma}, \dots, |z_n| = e^{-\lambda_n \sigma}, a < \sigma < b \right\} = \{ D(s) : a < \sigma < b \}.$$

Dado que cada z_k se escribe como $z_k = e^{-\lambda_k \sigma + i\theta_k}$ con $\theta_k \in [0, 2\pi]$, el conjunto de valores de $D(s)$ en la banda $a < \sigma < b$ es

$$\{ D(s) : a < \sigma < b \} = \left\{ P(e^{-\lambda_1 \sigma + i\theta_1}, \dots, e^{-\lambda_n \sigma + i\theta_n}) : a < \sigma < b, 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \right\}. \quad (4.32)$$

Este es un resultado no trivial, toda vez que el conjunto de la derecha de esta ecuación parece contener más elementos. Aplicado este resultado a las sumas parciales de la función zeta de Riemann, para $n \geq 2$

$$\{ \zeta_n(s) : a < \sigma < b \} = \left\{ P_n(e^{-\lambda_1 \sigma + i\theta_1}, \dots, e^{-\lambda_n \sigma + i\theta_n}) : a < \sigma < b, 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \right\}, \quad (4.33)$$

donde los P_n están definidos por (4.14).

Tomando $a = 1$ y $b = 2$, la búsqueda de los ceros especiales corresponde a la búsqueda de ceros de $P_n(e^{-\lambda_1\sigma+i\theta_1}, \dots, e^{-\lambda_n\sigma+i\theta_n})$ con

$$(\sigma, \theta_1, \dots, \theta_n) \in (1, 2) \times [0, 2\pi]^n.$$

La discretización del compacto $[1, 2] \times [0, 2\pi]^n$ a través del particionado de este, en un número finito de pequeños cubos mediante un conjunto finito de puntos, y la llamada aritmética de intervalos, es el argumento principal del trabajo de (Platt and Trudgian, 2016). Con esta técnica ellos logran demostrar que $\zeta_n(s)$ no tiene ceros especiales (de parte real $\sigma > 1$) para $1 \leq n \leq 18$ y $n = 20, 21, 28$.

4.8. Nivel de aproximación de los ceros

Para n suficientemente grande los ceros de $\zeta_n(s)$ aproximan en cierto sentido a los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica, a pesar de que no convergen en toda la banda, apelando a la fórmula de H. Von Mangoldt

$$\left| \{s / \zeta(s) = 0, 0 < \Im(s) < T\} \right| \sim \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) \quad (4.34)$$

y, por la ecuación (11)

$$\left| \{s / \zeta_n(s) = 0, 0 < \Im(s) < T\} \right| \sim \frac{T}{2\pi} \log(n) \quad (4.35)$$

- Para T fijo, por ejemplo $T = 3000$, y n suficientemente grande (o mejor $n \rightarrow \infty$) la cantidad de ceros de $\zeta_n(s)$ es mayor que la cantidad de ceros de $\zeta(s)$, figura (4.66)
- Para n fijo, por ejemplo $n = 508$, y T suficientemente grande (o mejor $T \rightarrow \infty$) la cantidad de ceros de $\zeta(s)$ es mayor que la cantidad de ceros de $\zeta_n(s)$, lo que ocurre cuando $T > 2\pi n$, figura (4.67)

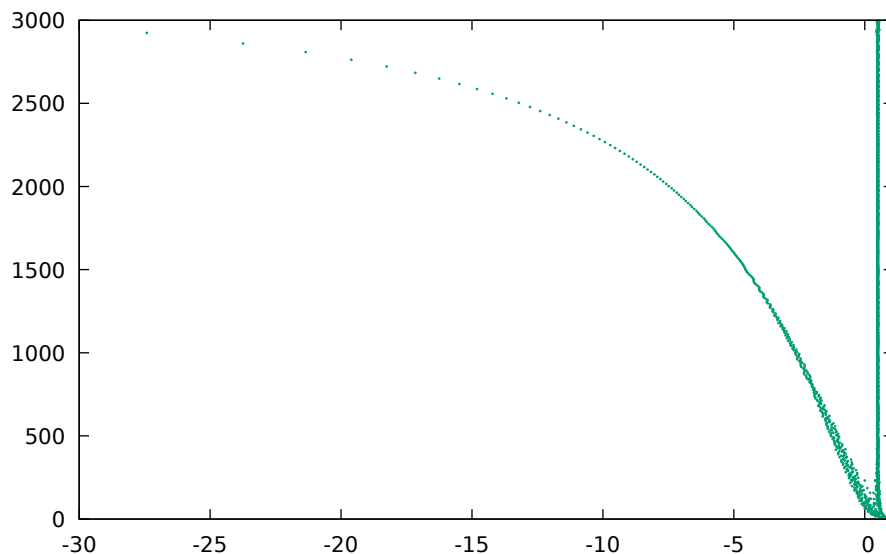


Figura 4.66: Ceros de $\zeta_{508}(s)$, $-30 < \Re(s)$, $0 < \Im(s) < 3000$

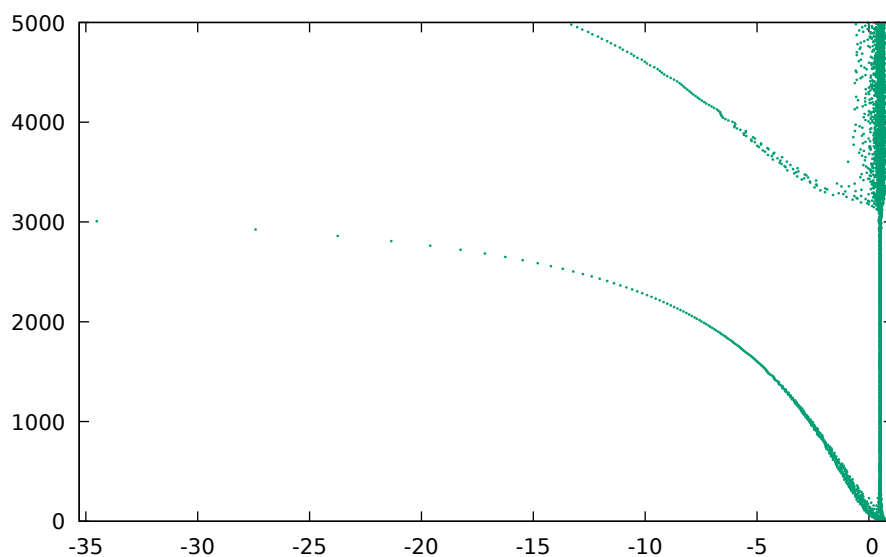


Figura 4.67: Ceros de $\zeta_{508}(s)$, $-35 < \Re(s)$, $0 < \Im(s) < 5000$

Es decir, a una altura mayor que $2\pi n$ la cantidad de ceros de $\zeta(s)$ es mayor que la cantidad de ceros de $\zeta_n(s)$, en este caso ambas cantidades varían en función de la altura elegida. Esto significa, que para T suficientemente grande, los ceros de $\zeta_n(s)$ se acumulan alrededor de la recta crítica. En particular, para $\zeta_{508}(s) = \sum_{k=1}^{508} n^{-s}$ y altura $T = 5000$ vemos que hay

4958 ceros, cuyas partes reales e imaginarias estan acotadas, respectivamente, por

$$-34,512372963948591905314250313067821161 \leq \Re(s) \leq 0,98853675895220587034584573736376134872$$

y

$$0,92446002894207351637374738934393937529 \leq \Im(s) \leq 4999,6643934994915103138296475340564954$$

Esto dista mucho de la estructura general de los ceros, dado que

$$\beta_{508} \leq \varphi_{508} \leq \beta_{508}^{\pm}$$

donde

$$\beta_{508} = -351,07904165594968420658598012722261510147125856844550 \dots$$

$$\beta_{508}^{\pm} \leq -351,079041655949684206585980127222615101471251611885106 \dots$$

obtenido cuando $\chi(127) = -1$ y $\chi(q) = 1$ para $q \neq 127$ primo.

Para ver la precisión en la aproximación entre los ceros de $\zeta_n(S)$ y los ceros de $\zeta(S)$, partimos de la fórmula (Titchmarsh, 1986, 3.5.3)

$$\zeta(s) = \zeta_n(s) - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}n^{-s} + s \int_n^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (4.36)$$

para $\sigma > -1$, donde $\{x\} = x - [x]$ es la función parte fraccionaria.

Luego, recurrimos a la fórmula de Euler-Maclaurin, que indica que para $\nu \geq 1$ entero y $\sigma > -2\nu$ (Edwards, 2001, §6.4, p. 114)

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + 2^{-s} + \dots + n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}n^{-s} \\ &+ \sum_{k=1}^{\nu} \frac{B_{2k}}{(2k)!} s(s+1) \dots (s+2k-2) n^{-s-2k+1} + R_{2\nu}(s), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{2\nu}(s) &= -\frac{s(s+1) \dots (s+2\nu-1)}{(2\nu)!} \int_{\nu}^{\infty} \overline{B}_{2\nu}(x) x^{-s-2\nu} dx \\ &= -\frac{s(s+1) \dots (s+2\nu)}{(2\nu+1)!} \int_{\nu}^{\infty} \overline{B}_{2\nu+1}(x) x^{-s-2\nu-1} dx. \end{aligned}$$

Aquí, las funciones $\overline{B}_k(x)$ son funciones periódicas $\overline{B}_k(x) = B_k(x - [x])$ definidas a partir de los polinomios de Berboulli $B_k(x)$, obtenidos a su vez de la identidad

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!},$$

y los B_k son los números de Bernoulli $B_k = B_k(0) = B_k(1)$.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

1. Se ha fundamentado en base al trabajo de (Ying and Katz, 1988), la construcción de un algoritmo simple y confiable para calcular los ceros de las funciones analíticas dentro de un rectángulo. El algoritmo presentado utiliza un método adaptativo para calcular la variación del argumento (Balazard and Velásquez Castanón, 2009), un método de bisección bidimensional y el método de Newton para acelerar los cálculos. Proponemos aquí, un criterio de exclusión y logramos implementarlo en forma paralela con C++ y las bibliotecas Boost.
2. Se ha realizado un cálculo intensivo de los ceros de $\zeta_n(s)$ con extrema precisión, dentro de rectángulos $[\psi_n(T); \varphi_n(T)] \times [0; T]$ para distintos valores de n y $T > 0$ significativo, logrando graficar la nube de sus ceros.
3. Se ha corroborado que la nube de ceros de $\zeta_n(s)$ es un conjunto casi-periódico de acuerdo a la teoría de (Bohr, 1947) y el trabajo de (Borwein et al., 2007), y en algunos casos sus ceros reducidos módulo $\left| \frac{2\pi i}{a} \right|$ para algún a real, se encuentran sobre el periodo de una curva que involucra a un polinomio.
4. Dado que la nube de ceros de $\zeta_n(s)$ muestra cierta concentración en determinadas líneas y/o sub-bandas verticales, se ha construido la función de distribución acumulada $\mu_n(\sigma, T)$, que nos permite hacer un análisis mas preciso sobre la distribución de sus

ceros en la franja vertical que los contiene $\psi_n \leq \sigma \leq \varphi_n$, a partir de la propuesta de (Jentzsch, 1916).

5. Se ha revisado la aplicación del teorema de equivalencia de Bohr en el trabajo de (Balazard and Velásquez Castanón, 2009) para pequeños valores de n , evidenciando que las sumas parciales torcidas presentan ceros reales, cercanos al ínfimo de las partes reales de los ceros de $\zeta_n(s)$.
6. Se ha revisado la construcción de los ceros especiales de gran tamaño en (van de Lune and te Riele, 1982), y se ha implementado su cálculo a partir del algoritmo LLL (Lenstra et al., 1982) no disponible aquel entonces.
7. Se ha revisado que el conjunto de valores de un polinomio en n variables complejas, está relacionado, al conjunto de valores de un polinomio de Dirichlet $f(s)$ (Montgomery, 1977), en particular se ha demostrado que $\zeta_n(s) = P_n(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\pi(n)})$ para cierto polinomio P_n irreducible en el anillo de polinomios sobre \mathbb{C} con $\pi(n)$ variables $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\pi(n)}]$.
8. Se ha corroborado analíticamente que para $T > 2\pi n$, la cantidad de ceros de $\zeta(s)$ es mayor que el número de ceros de $\zeta_n(s)$. Lo que significa que para T suficientemente grande, los ceros de $\zeta_n(s)$ a pesar de dispersarse hacia la izquierda, ellos se acumulan alrededor de la recta $\Re(s) = 1/2$.

5.2. Recomendaciones

- Un enfoque que no se ha explorado es, la relación entre la teoría de puntos fijos y los ceros de las sumas parciales $\zeta_n(s)$ de la función zeta de Riemann. Después de un ligera lectura del artículo de (Mora, 2019), considero pertinente recomendar vuestra investigación por este rumbo.
- Se recomienda investigar la distribución de los ceros de las sumas exponenciales de la forma $f(s) = \sum_{\text{finita}} c_k k^{-s}$ con $c_k \neq 0$ y k divisible por a lo más dos primos racionales positivos, para estudiar las curvas que allí aparecen al reducirlos módulo ciertos casi-periodos.
- Sobre el cero especial de altura pequeña, no se ha abordado el cálculo sistemático. Se recomienda el trabajo de (van de Lune and te Riele, 1982)

- Al principio implementamos el cálculo de los ceros de $\zeta_n(s)$ en Python que funcionó bien solo para pequeños valores de n , luego migramos nuestro programa a C++ por la bondad de poder paralelizar nuestro proceso. Razón por la que sugerimos implementar librerías en Python que nos permitan la programación en paralelo con este lenguaje tan amigable. A pesar de ello, en este trabajo, si tenemos algunas implementaciones hechas en Python.

Bibliografía

- Adams, W. W., Adams, W. W., Loustaunau, P., and Adams, W. W. (1994). *An introduction to Grobner bases*. Number 3. American Mathematical Soc.
- Amar, E. and Matheron, É. (2004). *Analyse complexe*. Enseignement des mathématiques. Cassini.
- Apostol, T. M. (2012). *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41. Springer Science & Business Media.
- Apostol, T. M. (2020). *Introducción a la teoría analítica de los números*. Reverté.
- Balazard, M. and Velásquez Castanón, O. (2009). Sur l'infimum des parties réelles des zéros des sommes partielles de la fonction zêta de riemann. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(7-8):343–346.
- Beliakov, G. and Matiyasevich, Y. (2015). Approximation of Riemann's zeta function by finite Dirichlet series: a multiprecision numerical approach. *Exp. Math.*, 24(2):150–161.
- Bellman, R. and Cooke, K. L. (1963). *Differential-difference equations*. Academic Press, New York.
- Bohr, H. (1947). *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y.
- Borwein, P., Fee, G., Ferguson, R., and van der Waall, A. (2007). Zeros of partial sums of the Riemann zeta function. *Experiment. Math.*, 16(1):21–39.
- Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media.
- Brezis, H. and Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer.

- Conway, J. B. (2012). *Functions of one complex variable II*, volume 159. Springer Science & Business Media.
- Cooke, K. L. (1963). Differential—difference equations. In *International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics*, pages 155–171. Elsevier.
- Dellnitz, M., Schütze, O., and Zheng, Q. (2002). Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable. *J. Comput. Appl. Math.*, 138(2):325–333.
- Delves, L. M. and Lyness, J. N. (1967). A numerical method for locating the zeros of an analytic function. *Math. Comp.*, 21:543–560.
- Dubon, E. (2015). Sobre los ceros de polinomios de dirichlet, en general, y los de las sumas parciales de la función zeta de riemann, en particular. *Proyecto de investigación*.
- Dubon, E., Mora, G., Sepulcre, J. M., Ubeda, J. I., and Vidal, T. (2014). A note on the real projection of the zeros of partial sums of Riemann zeta function. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM*, 108(2):317–333.
- Edwards, H. M. (2001). *Riemann’s zeta function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York].
- Ferreira, A. E. (2014). Números primos e o postulado de bertrand. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.
- Fulton, W. (2008). *Curvas algebraicas*. Reverté.
- Gamelin, T. (2003). *Complex analysis*. Springer Science & Business Media.
- García-Zapata, J. L., Díaz Martín, J. C., and Cortés Fácil, A. (2019). An adaptive subdivision method for root finding of univariate polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 352:146–164.
- Gonek, S. M. and Ledoan, A. H. (2008). Zeros of partial sums of the riemann zeta-function. *arXiv.org*, arXiv:abs/0807.0019v2 [math.NT].
- Gottschalk, W. (1946). Almost periodicity, equi-continuity and total boundedness. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(8):633–636.
- Hardy, G. H. and Wright, E. M. (1960). *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, fourth edition.

- Hernández, J. C. (2009). Funciones cuasi-periódicas de bohr. *Boletín de matemáticas*, 16(2):149–165.
- Jentzsch, R. (1916). Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen. *Acta Math.*, 41(1):219–251.
- Jessen, B. and Tornehave, H. (1945). Mean motions and zeros of almost periodic functions. *Acta Math.*, 77:137–279.
- Kantorovich, L. V. and Akilov, G. (1982). Functional analysis (translated by Howard L. Silcock).
- Lapidus, M. L. and Frankenhuysen, M. v. (2003). Complex dimensions of self-similar fractal strings and diophantine approximation. *Experimental Mathematics*, 12(1):41–69.
- Lapidus, M. L. and Van Frankenhuijsen, M. (2006). *Fractal geometry, complex dimensions and zeta functions: geometry and spectra of fractal strings*. Springer Science & Business Media.
- Lapidus, M. L. and van Frankenhuysen, M. (2000). *Fractal geometry and number theory*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. Complex dimensions of fractal strings and zeros of zeta functions.
- Lapidus, M. L. and van Frankenhuysen, M. (2003). Complex dimensions of self-similar fractal strings and Diophantine approximation. *Experiment. Math.*, 12(1):41–69.
- Laurinčikas, A. (2012). The Riemann zeta-function: approximation of analytic functions. In *Advances in applied analysis. Selected papers based on the lectures presented at the 3rd international winter school “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” held in Minsk, Belarus, January 2010*, pages 95–114. Basel: Birkhäuser.
- Lenstra, A. K., Lenstra, H. W., and Lovász, L. (1982). Factoring polynomials with rational coefficients. *Mathematische annalen*, 261(ARTICLE):515–534.
- Levin, B. Y. (1996). *Lectures on entire functions*, volume 150 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Translated from the Russian manuscript by Tkachenko.

- Monach, W. R. (1980). Numerical investigation of several problems in number theory, Univ. of Michigan Ph. D Dissertation. *Ann Arbor*.
- Montgomery, H. L. (1977). Polynomials in many variables. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, 17(1):1–6.
- Montgomery, H. L. (1983). Zeros of approximations to the zeta function. In *Studies in pure mathematics*, pages 497–506. Springer.
- Montgomery, H. L. and Vaughan, R. C. (2002). Mean values of multiplicative functions. *Periodica Mathematica Hungarica*, 43(1-2):199–214.
- Mora, G. (2013a). Accumulation points of the sets of real parts of zeros of the partial sums of the riemann zeta function. *arXiv preprint arXiv:1311.5171*.
- Mora, G. (2013b). On the asymptotically uniform distribution of the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function. *J. Math. Anal. Appl.*, 403(1):120–128.
- Mora, G. (2018). Density intervals of zeros of the partial sums of the Dirichlet eta function. *Mediterr. J. Math.*, 15(6):11. Id/No 208.
- Mora, G. (2019). A fixed point theory linked to the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function. In honour of Manuel López-Pellicer. In *Descriptive topology and functional analysis. II. In honour of Manuel López-Pellicer mathematical work. Proceedings of the 2nd meeting in topology and functional analysis, Elche, Spain, June 7–8, 2018*, pages 241–266. Cham: Springer.
- Mora, G. and Benítez, E. (2022). On the lower bounds of the partial sums of a Dirichlet series. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM*, 116(3):12. Id/No 97.
- Mora, G. and Sepulcre, J. M. (2015). Computing the zeros of the partial sums of the riemann zeta function. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 194(5):1499–1504.
- Nocedal, J. and Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*. New York, NY: Springer.
- Platt, D. and Trudgian, T. (2020). The riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$. *arXiv preprint arXiv:2004.09765*.
- Platt, D. J. and Trudgian, T. S. (2016). Zeroes of partial sums of the zeta-function. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 19(1):37–41.

- Righetti, M. (2017). On bohr's equivalence theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 445(1):650–654.
- Roy, A. and Vatwani, A. (2021). Zeros of dirichlet polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 374(1):643–661.
- Sánchez, P. A., Luca, F., López, J. P. M., Sabbagh, D. F. N., and Venegas, R. N. P. (2006). Valores irracionales de la función zeta de riemann en los impares. *Morfismos*, 10(2):15–43.
- Schäling, B. (2014). *The boost C++ libraries*. XML Press.
- Sepulcre, J. and Vidal, T. (2018). On the real projections of zeros of almost periodic functions. *arXiv preprint arXiv:1805.02041*.
- Sepulcre, J. M. (2016). On the result of invariance of the closure set of the real projections of the zeros of an important class of exponential polynomials. *J. Funct. Spaces*, 2016:9. Id/No 3605690.
- Sondow, J. (2003). Zeros of the alternating zeta function on the line $\Re(s) = 1$. *The American mathematical monthly*, 110(5):435–437.
- Spira, R. (1966). Zeros of sections of the zeta function. i. *Mathematics of Computation*, 20(96):542–550.
- Sprang, J. (2018). Infinitely many odd zeta values are irrational. by elementary means. *arXiv preprint arXiv:1802.09410*.
- Stoer, J. and Bulirsch, R. (2002). *Introduction to numerical analysis*. Texts in applied mathematics. Springer.
- Stoer, J. and Bulirsch, R. (2013). *Introduction to numerical analysis*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Tenenbaum, G. (2015). *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*.
- Titchmarsh, E. C. (1986). *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

- Turán, P. (1948). On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. *Danske Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* 24, No. 17, 36 S. (1948).
- van de Lune, J. and te Riele, H. J. J. (1982). Numerical computation of special zeros of partial sums of Riemann's zeta function. In *Computational methods in number theory, Part II*, volume 155 of *Math. Centre Tracts*, pages 371–387. Math. Centrum, Amsterdam.
- Van der Poorten, A. and Apéry, R. (1979). A proof that euler missed... *The Mathematical Intelligencer*, 1(4):195–203.
- Velasquez Castanon, O. (2008). *Sur la répartition des zéros de certaines fonctions méromorphes liées à la fonction zêta de Riemann*. PhD thesis, Bordeaux 1.
- Yakoubsohn, J.-C. (2005). Numerical analysis of a bisection-exclusion method to find zeros of univariate analytic functions. *J. Complexity*, 21(5):652–690.
- Ying, X. and Katz, I. N. (1988). A reliable argument principle algorithm to find the number of zeros of an analytic function in a bounded domain. *Numer. Math.*, 53(1-2):143–163.
- Ying, X. and Katz, I. N. (1989). A simple reliable solver for all the roots of a nonlinear function in a given domain. *Computing*, 41(4):317–333.

ANEXOS

A: Proyección sobre un convexo

En el siguiente teorema H será un espacio vectorial con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de tal forma que H es completo con respecto a la norma inducida $\|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, esto es, H denotará un espacio de Hilbert

Teorema 25 (Theorem 5.2. (Brezis, 2010) Proyección sobre un convexo). Sea $K \subset H$ un conjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces para todo $w \in H$ existe un único $u \in K$ tal que

$$|w - u| = \min_{v \in K} |w - v| = \text{dist}(w, K). \quad (5.1)$$

Además, u está caracterizado por la propiedad

$$u \in K \text{ y } \langle w - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (5.2)$$

El elemento u dado en este teorema es llamado la proyección de w sobre K y es denotado por

$$u := \text{Proy}_K w$$

la desigualdad (5.2) dice que el producto escalar del vector \overrightarrow{uw} con el vector \overrightarrow{uv} ($v \in K$) es ≤ 0 . i.e., el ángulo θ determinado por esos dos vectores es $\geq \pi/2$.

B: Interpolación por Polinomiales

Denotaremos por \mathcal{P}_n al conjunto de todas las funciones polinomiales P con coeficientes reales o complejos de grado $\leq n$

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Teorema 26 (Theorem 2.1.1.1, (Stoer and Bulirsch, 2013)). Dados $n+1$ puntos arbitrarios

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j,$$

existe un único polinomio $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

En la página 39 de (Stoer and Bulirsch, 2013) se demuestra que tal polinomio viene dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (5.3)$$

llamado *polinomio de interpolación de Lagrange*. Para obtener el polinomio de interpolación completo se puede resolver el problema para subconjuntos del conjunto de puntos dado, y llegar al caso general recursivamente. En efecto, dado un conjunto de puntos $(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$ denotaremos por $P_{i_0 i_1 \dots i_k}$ al polinomio en \mathcal{P}_k tal que:

$$P_i(x) \equiv f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (k \geq 1)$$

Proposición 21. Estos polinomios estan relacionados por la siguiente fórmula recursiva

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) \equiv \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}} \quad (5.5)$$

Demostración. Denotando el lado derecho de (5.5) por $R(x)$, demostraremos que R tiene las propiedades características de $P_{i_0 i_1 \dots i_k}$. El grado de R es claramente menor o igual que k . Por las definiciones de $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$ y $P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}$,

$$R(x_{i_0}) = P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x_{i_0}) = f_{i_0},$$

$$R(x_{i_k}) = P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_k}) = f_{i_k},$$

y

$$R(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})f_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})f_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_j}$$

para $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Así $R = P_{i_0 i_1 \dots i_k}$, en vista de la unicidad de la interpolación polinomial dado en el teorema 26. \square

	k=0	1	2	3
x_0	$f_0 \equiv P_0(x)$			
		$P_{01}(x)$		
x_1	$f_1 \equiv P_1(x)$		$P_{012}(x)$	
		$P_{12}(x)$		$P_{0123}(x)$
x_2	$f_2 \equiv P_2(x)$		$P_{123}(x)$	
		$P_{23}(x)$		
x_3	$f_3 \equiv P_3(x)$			

Cuadro 5.1: El proceso iterativo en la interpolación polinomial

Las dos primeras columnas del cuadro contienen las ordenadas de los puntos dados (x_i, f_i) (en este caso $0 \leq i \leq 3$). Las columnas subsiguientes se llenan mediante el cálculo de cada entrada de forma recursiva desde sus dos “vecinos” en la columna anterior, según la ecuación (5.5). Fijando ideas

$$P_{0123}(x) \equiv \frac{(x - x_0)P_{123}(x) - (x - x_3)P_{012}(x)}{x_3 - x_0}$$

Ejemplo 8. Para dos puntos (x_0, f_0) y (x_1, f_1)

$$P_0(x) \equiv f_0, \quad P_1(x) \equiv f_1$$

y

$$P(x) \equiv P_{01}(x) = \frac{(x - x_0)f_1 - (x - x_1)f_0}{x_1 - x_0} = f_0 + \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right) (x - x_0)$$

Ahora, dada una función f y algunos de sus valores

$$f_i := f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

surge la siguiente interrogante ¿Qué tan buena será la interpolación polinomial $P(x) \equiv P_{01\dots n}(x) \in \mathcal{P}_n$ para reproducir los valores de $f(x)$ cuando $x \neq x_i$?. En el siguiente resultado veremos que bajo ciertas condiciones, será posible acotar este error $f(x) - P(x)$

Teorema 27 (Theorem 2.1.4.1, (Stoer and Bulirsch, 2013)). Si la función f es derivable $(n+1)$ veces, entonces para todo \bar{x} existe ξ en el menor intervalo $I[x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$ que contiene a \bar{x} y todas las abscisas x_i , satisfaciendo

$$f(\bar{x}) - P_{01\dots n}(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n) \quad (5.6)$$

En particular, cuando $n = 1$

$$f(\bar{x}) - P_{01}(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \quad (5.7)$$

C: Lista de símbolos

\mathbb{N}	–	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{Z}	–	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{Q}	–	Conjunto de los números racionales.
\mathbb{R}	–	Conjunto de los números reales.
\mathbb{C}	–	Conjunto de los números complejos.
\sum	–	sumatoria.
$\zeta(s)$	–	funcion zeta de Riemann evaluado en s .
$\eta(s)$	–	funcion eta de Dirichlet evaluado en s .
\prod	–	productoria.
$\Gamma(s)$	–	funcion gamma de Euler evaluado en s .
$\Re(s)$	–	parte real del número complejo s .
$\Im(s)$	–	parte imaginaria del número complejo s .
\log	–	logaritmo natural de.
$ s $	–	módulo del número complejo s .
$Z(f)$	–	conjunto de números complejos que son ceros de la función f .
\bar{s}	–	conjugado del número complejo s .
$[z; w]$	–	intervalo de extremos los números complejos z, w .
$R_n(T)$	–	rectángulo de lados horizontal $[\psi_n; \varphi_n]$ y lado vertical $[0; T]$.
$N_n(T)$	–	número de ceros de $\zeta_n(s)$ hasta una altura T .
$N_n(\sigma, T)$	–	número de ceros de $\zeta_n(s)$ hasta una altura T con parte real $\leq \sigma$.
$\mu_n(\sigma, T)$	–	función de distribución acumulada.
$\mu_n(\sigma)$	–	función de distribución acumulada asintótica.
$\mu_n^*(\sigma)$	–	restricción de la función de distribución acumulada a $[\psi_n; \varphi_n]$.
$\pi(x)$	–	número de primos positivos menores o iguales a x .
γ	–	la constante de Euler.
$T_f(\varepsilon)$	–	casi-periodo de f asociado a ε .
$\text{spec}(f)$	–	espectro de la función casi-periódica f .
$\Lambda(n)$	–	función de Mangoldt evaluado en n .
$k[x_1, \dots, x_n]$	–	anillo de polinomios sobre el cuerpo k en n indeterminadas.