

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**“Método de elementos finitos para una formulación
variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la
ecuación de una superficie bidimensional, usando
algoritmo de Free Fem++”**

**Tesis para optar el grado académico de
Doctor en Matemática**

Autor:

Mg. Sucasaire Sucasaire, Guillermo

Asesor:

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI. N° 18162818

Linea de Investigación
Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ
2023



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACIÓN VARIACIONAL DE UNA EDP LINEAL TIPO ELIPTICO, ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE BIDIMENCIONAL, USANDO ALGORITMO DE FREE FEM++, elaborada por el magister Guillermo Sucasaire Sucasaire para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, octubre del 2023

DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIÉRREZ

ASESOR

CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734

DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACIÓN VARIACIONAL DE UNA EDP LINEAL TIPO ELIPTICO, ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE BIDIMENCIONAL, USANDO ALGORITMO DE FREE FEM++

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA EN ALIMENTOS

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

DR. ERNESTO ANTONIO CEDRÓN LEÓN

PRESIDENTE

CODIGO ORCID: 0000-0002-3198-831X

DNI N° 32966495

DR. TEODORO MOORE FLORES

SECRETARIO

CODIGO ORCID: 0000-0002-1755-3459

DNI N° 32763522

DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIÉRREZ

VOCAL

CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734

DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los once días del mes de octubre del año 2023, siendo las 12:00 horas, en el aula multimedia N° P 1 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador conformado por los docentes: Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario), Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Vocal); designados mediante Resolución Directoral N° 215-2023-EPG-UNS de fecha 07.09.2023, con la finalidad de evaluar la tesis titulada: "**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACIÓN VARIACIONAL DE UNA EDP LINEAL TIPO ELIPTICO, ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE BIDIMENCIONAL, USANDO ALGORITMO DE FREE FEM++**"; presentado por el tesista **Mg. Guillermo Sucasaire Sucasaire**, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

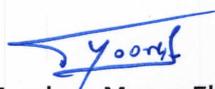
Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 267-2023-EPG-UNS de fecha 10 de octubre de 2023.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como: APROBADO asignándole la calificación de: Diecinueve 19.

Siendo las 13:10 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Presidente


Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario


Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
Vocal



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Guillermo SUCASAIRE SUCASAIRE
Título del ejercicio:	DOCTORADO 2023
Título de la entrega:	METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACION...
Nombre del archivo:	GUILLERMO_SUCASAIRE_SUCASAIRE_-_TESIS_DOCTOTAL.docx
Tamaño del archivo:	1.41M
Total páginas:	58
Total de palabras:	6,846
Total de caracteres:	37,564
Fecha de entrega:	04-sept.-2023 04:04p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	2157770007



METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACION VARIACIONAL DE UNA EDP LINEAL TIPO ELIPTICO, ASOCIADO A LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE BIDIMENSIONAL, USANDO ALGORITMO DE FREE FEM++

INFORME DE ORIGINALIDAD

3%

INDICE DE SIMILITUD

3%

FUENTES DE INTERNET

0%

PUBLICACIONES

0%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

www.scribd.com

Fuente de Internet

1%

2

archive.org

Fuente de Internet

1%

3

www.slideshare.net

Fuente de Internet

<1%

4

webdelprofesor.ula.ve

Fuente de Internet

<1%

5

repositorio.unfv.edu.pe

Fuente de Internet

<1%

6

idoc.pub

Fuente de Internet

<1%

7

repositorio.ucv.edu.pe

Fuente de Internet

<1%

8

www3.freefem.org

Fuente de Internet

<1%

DEDICATORIA

A mis padres Guillermo y lidia

A mis amigos Alex, Rodolfo, Bustillos SM, Pablo
y Victoriano

Agradecimiento

Mi más profundo agradecimiento a mis padres **Guillermo** y **Lidia** que ayudaron tanto en mi formación profesional y en mi idiosincrasia también a mis hermanas por su apoyo colateral y por otra parte deseo expresar mi gratitud a mis amistades más grandes que yo considero **Alex, Rodolfo, Bustillos SM** muy agradecido por sus consejos que hicieron posible culminar este manuscrito de cual estoy orgulloso, mil gracias por su amistad.

Y por último y no menos importante a mis dos grandes amigos que ya no “están” pero los tengo siempre conmigo **Pablo C. Villavicencio Espinoza** y **Victoriano Yauri Luque**, esta tesis se las dedico a ustedes que me enseñaron a que nada es imposible y que una silla bien sentada dice más que mil palabras (Pablito esta frase es tuya), se los agradeceré por siempre.

INDICE GENERAL

Certificación de asesoramiento de la tesis	ii
Aval del jurado evaluador	iii
Acta de sustentación	iv
Dedicatoria	viii
Agradecimientos	ix
Índice general	x
Lista de cuadros y figuras	xii
Resumen	xiii
Abstrac	xiv
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación	4
1.2. Antecedentes de la investigación	4
1.3. Formulación del problema de investigación	5
1.4. Delimitación del estudio	6
1.5. Justificación e importancia de la investigación	6
1.6. Objetivos de la investigación	6
1.6.1. Objetivo general	6
1.6.2. Objetivos específicos	6
CAPITULO II: MARCO TEÓRICO	8
2.1. Fundamentos teóricos de la investigación	9
2.1.1. Distribuciones	9
2.1.2. Espacios de Sobolev	10
2.2. Marco conceptual	11
CAPITULO III: MARCO METODOLÓGICO	13
3.1. Hipótesis central de la investigación	14
3.2. Variables e indicadores de la investigación	14
3.3. Métodos de la investigación	15
3.4. Diseño o esquema de la investigación	15
3.5. Población y muestra	15
3.6. Actividades del proceso investigativo	15
3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación	16

3.8. Procedimiento para la recolección de datos	16
3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos	16
CAPITULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	17
4.1. Teorema (Generalización del Teorema de Lax Milgram)	18
4.2. Teorema (EDPs del modelo no estacionario con fuente interna)	19
4.3. Algoritmo del problema de contorno bidimensional	26
4.4. Discusión de los resultados	41
CAPITULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	42
5.1. Conclusiones de la investigación	43
5.2. Recomendaciones de la investigación	43
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44
ANEXOS	46
Anexo N°1: Matriz de consistencia	46

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Malla generada con Difusión.edp	29
Figura 2: Solución obtenida de la EDP para $t=0.0$	30
Figura 3: Solución obtenida de la EDP para $t=0.5$	30
Figura 4: Solución obtenida de la EDP para $t=1.0$	31
Figura 5: Solución obtenida de la EDP para $t=1.5$	31
Figura 6: Solución obtenida de la EDP para $t=2.0$	32
Figura 7: Solución obtenida de la EDP para $t=2.5$	32
Figura 8: Solución obtenida de la EDP para $t=3.0$	33
Figura 9: Solución obtenida de la EDP en 3D	33
Figura 10: Malla generada con Freno_calor.edp	35
Figura 11: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=0.0$	36
Figura 12: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=1.0$	36
Figura 13: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.0$	37
Figura 14: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.4$	37
Figura 15: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.5$	38
Figura 16: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.6$	38
Figura 17: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.7$	39
Figura 18: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.9$	39
Figura 19: Malla y solución obtenida de la EDP que modela un freno en 3D	40

Resumen

La investigación presentada y titulada “método de elementos finitos para una formulación variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la ecuación de una superficie bidimensional, usando algoritmo de Free Fem++” tuvo como objetivo determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas.

La investigación fue de tipo básica, con un enfoque cuantitativo, tipo de diseño no experimental. La información se recopiló de libros, tesis, trabajos virtuales y revistas para luego obtener los resultados del trabajo; en la investigación se verificó que el teorema de Lax-Milgram es una herramienta fundamental en la solución de EDP elípticas, mencionar que se siguió el procedimiento metodológico establecido y con la información recopilada nos permitió corroborar nuestra hipótesis mediante la aplicación de un problema de contorno dando lugar a la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor.

Palabras claves: Teorema de Lax Milgram, ecuaciones diferenciales parciales tipo elípticas, Free Fem++

Abstrac

The research presented and entitled "finite element method for a variational formulation of a linear elliptic type PDE, associated with the equation of a two-dimensional surface, using Free Fem++ algorithm" aimed to determine the numerical solution of the partial differential equation of non-stationary heat transfer with internal heat source using finite difference method.

The research was of basic type, with a quantitative approach, type of non-experimental design. The information was collected books, theses, virtual works and magazines to then obtain the results of the work; in the research it was verified that the Lax-Milgram theorem is a fundamental tool in the solution of elliptic PDEs, mentioning that the established methodological procedure was followed and with the information collected allowed us to corroborate our hypothesis by applying a boundary problem leading to the numerical solution of the partial differential equation of non-stationary heat transfer with internal heat source.

Keywords: Lax Milgram's theorem, elliptic partial differential equations, Free Fem++

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, planteamos una aproximación para la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas. El problema del modelo se plantea de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) - qu_t = -f \quad (I)$$

$$\Omega \subset R^2, u \in H^1(\Omega) \text{ y } k, q \in L^\infty(\Omega)$$

donde $\Omega \subset R^2$ es un dominio de la ecuación diferencial parcial elíptica. La ecuación (I) es la versión de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor además se consideró un problema bidimensional y empleó el método de diferencias finitas para resolver el problema. Aunque la mayor parte del estudio se vinculara con la existencia y unicidad de la solución de un problema del tipo bidimensional. Hay que mencionar que la solución numérica del problema planteado por el método de diferencias finitas usando el algoritmo de Free Fem++ a desarrollar tiene una escasa literatura, pero pese a ello se desarrollara algunos ejemplos muy ilustrativos al usar el algoritmo de Free Fem++ que ayudaran a la comprensión de este tipo de estudios.

La presente investigación tiene la siguiente estructura:

El primer capítulo se presenta el planteamiento del problema de investigación en el cual podemos resaltar la problemática de estudiar las EDPs elípticas en cual radica en la complejidad de las soluciones analíticas y por ello la necesidad de recurrir a los métodos numéricos y simulaciones.

El segundo capítulo se presenta el marco teórico muy importante pues nos dará las herramientas necesarias para poder atacar la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor a analizar.

El tercer capítulo comprende el marco metodológico, en este apartado se describirá la hipótesis de la investigación, la variable, diseño, población entre otros; además es crucial para la tesis pues nos proporciona la base para la investigación y nos asegura

la rigurosidad y validez del trabajo a analizar, además de abordar las limitaciones potenciales.

El cuarto capítulo se expone los resultados y discusión del trabajo realizado, se presenta el resultado principal el cual es la demostración la existencia y unicidad de un conjunto de soluciones para poder hacer la simulación en el programa de Free Fem++ de la ecuación diferencial parcial elíptico que se estará analizando; dentro del proceso se analiza minuciosamente las todas las condiciones, como la interacción de las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann dentro de un dominio abierto. Por otro lado, se hará la comparación con otros trabajos para de esa manera ver la diferencia sustancial y su importancia dentro del mundo científico.

El quinto capítulo se presenta las conclusiones y recomendaciones, en este apartado se resalta las recomendaciones, pues estas contribuirán a seguir el estudio en campos más complejos y un punto muy importante como autor, trata del estudio de las ecuaciones de Maxwell por su gran importancia en el estudio del electromagnetismo.

CAPITULO I
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) elípticas tienen una amplia aplicación en diversas áreas científicas y de ingeniería, algunas ecuaciones notables son la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace y la ecuación de Helmholtz, cada una de ellas tiene aplicaciones en física teórica, electrostática, mecánica de fluidos y otras áreas. La razón principal para estudiar estas EDPs radica en su capacidad para describir fenómenos físicos y naturales con comportamientos que dependen de múltiples variables y que están gobernados por leyes de conservación. En el caso específico de la ecuación del calor modela la difusión en sistemas que exhiben una distribución espacial y temporal de temperatura. La problemática que se enfrenta al estudiar EDPs elípticas radica en la complejidad de las soluciones analíticas y la necesidad de recurrir a técnicas avanzadas de análisis matemático, métodos numéricos y simulaciones para poder obtener aproximaciones prácticas. Además, dependiendo de las condiciones iniciales y de contorno, pueden surgir fenómenos como la existencia de múltiples soluciones o la no existencia de soluciones.

En esta investigación se analizó la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor.

$$\begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Donde Ω es un abierto acotado en R^2 con dominio de la forma $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ y $q, k \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$, además $q(x, y) \geq 0$ y $k(x, y) \geq C_5$ con $C_5 \in R^+$.

1.2. Antecedentes de la investigación

Mendoza en el año 2016, realizó el trabajo “Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Mediante el Método de Diferencias Finitas y su Paralelización”, concluyo: Desarrollé los algoritmos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales en

espacio y tiempo. En el capítulo dos, secciones 2.6 y 2.7 se enseñan los algoritmos para poder solucionar las ecuaciones diferenciales parciales, tanto en espacio como en tiempo. Se enseña el mapa theta para ecuaciones con una derivada temporal, como la formula del calor. Además, se desarrolla el algoritmo para solucionar las ecuaciones con segunda derivada temporal, por ejemplo, a fin de resolver la ecuación de ondas. Por último, se detalla y se indica el esquema o modelo upwind, para determinar ecuaciones poco más o menos la ecuación de advección.

Izquierdo en el año 2017, realizó el trabajo “Modelización de la ecuación de calor con diferencias finitas”, conclusión: El método de diferencias finitas propone hallar la temperatura de un dominio a lo largo del tiempo dándose cuenta de la temperatura en tiempo inicial y la de la frontera en todo periodo. Programando este método y usando algún instrumento de visualización, se ha desarrollado una secuencia a fin de acercar el calor del interior del dominio. Esto contribuye a darse cuenta de ciertos comportamientos, por ejemplo, en el caso si se tiene una situación de equilibrio y la temperatura no varía en relación con el tiempo, se tiene que realizar el principio del máximo y se conoce que el máximo o mínimo está en la frontera. Otra exploración que se puede hacer es la siguiente, en la relación diferencial, la función $g(u, t)$ se puede explicar, de manera automática, como una variación de temperatura en el que altera a todo punto del dominio (como un microondas); en el caso particular que la función $g()$ sea invariable se puede divisar en la gráfica, la típica transmisión de calor que sería la que da la frontera. Las aproximaciones que se obtienen con el método son realmente muy próximas a la realidad. Al igual que se ha divisado en las tablas de resultados, el mínimo error de $\approx 1 \cdot 10^{-7}$, ha sido cuantificado usando el método de Crank- Nicolson.

Vidaurre en el año 2015, realizo el trabajo “Modelamiento de la transferencia de calor durante el escaldado del loche (cucurbita moschata) y papa (solanum tuberosum)”, concluyo: Se modeló la propagación de calor a lo largo del escaldo de cubos de loche y de papa explicando la ecuación de propagación del calor, por medio del método analítico y el método de diferencias finitas explícitas en 3D.

1.3. Formulación del problema de investigación

¿Será que el uso del método de diferencias finitas y el programa de Free Fem++ determinan la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor?

1.4. Delimitación del estudio

El trabajo de investigación de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario a estudiar se restringe a funciones del espacio $L^p(\Omega)$ además nos basamos en el análisis de espacios en 2D y no en 3D.

1.5. Justificación e importancia de la investigación

En los últimos años se ha tomado gran interés en la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales, por esta razón esta investigación aportara grandes beneficios para futuros investigadores, pues de ello saldrán resultados y logros que ayudaran a la investigación en el Perú y el Mundo

De esta investigación saldrán resultados y recomendaciones y estas podrán ser empleadas tanto por alumnos, docentes, investigadores e instituciones científicas evocadas en estos temas de matemática aplicada abstracta.

Los estudios realizados en esta tesis y programas como Free Fem++, utilizados para mostrar la solución de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor, servirán para los estudiosos.

1.6. Formulación de los objetivos de la investigación

1.6.1. Objetivo general

Determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas y la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++

1.6.2. Objetivos específicos

- Determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas
- Determinar la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentación teóricos de la investigación

2.1.1 Distribuciones

En este apartado aprenderemos nociones o topics importantes que nos ayudaran a entender mejor el analisis de las ecuaciones diferenciales elipticas que estamos por estudiar, como la definición de distribuciones o funciones generalizadas de L.Schwartz, asi como el conocimiento de las distribuciones tanto regulares como irregulares, tambien algunos ejemplos de una distribución y el conocimiento de la formulación variacional.

Definición: De acuerdo a Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) mencionaron “una distribución en Ω es cualquier aplicación $T : D(\Omega) \rightarrow R$ el cual cumple las siguientes condiciones:

- 1) Lineal
- 2) Secuencialmente continua”

Dentro del espacio de Sobolev se distingue dos tipos de distribuciones llamadas las distribuciones regulares y las singulares, a continuación, veamos su definición.

Definición: Segun a Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) mencionaron “manifestaremos que una distribución T es regular si, para todo $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$; T se puede expresar de la siguiente manera:

$$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \psi(x)\phi(x)dx “$$

Ejemplo: Sea c una constante real, luego para $c \in L^1_{loc}(\Omega)$ se genera la distribución regular siguiente:

$$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} c\phi(x)dx$$

Definición: Segun a Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) mencionaron “manifestaremos que una distribución T es singular si para todo ψ donde ψ es una

aplicación singular; su respectiva distribución T no la podemos expresar de la siguiente manera:

$$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \psi(x)\phi(x)dx "$$

Ejemplo: Sea $\psi(x) = \frac{1}{x^n}$ una función singular de variable real, luego para $c \in L^1_{loc}(\Omega)$ se genera la distribución singular siguiente:

$$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{x^n} \phi(x)dx$$

Esta distribución singular no cumplirá todas las condiciones para ser una distribución regular, uno de esos puntos es que no converge para todas las funciones de prueba.

2.1.2 Espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Como parte del analisis que se va hacer se necesita ciertos conocimientos como los espacios en los cuales trabajaremos y la esencia del problema a resolver, veremos a continuación la definición del espacio de Sobolev así como los subespacios $H^k(\Omega)$; algunas reglas algebraicas para la gradiente, además veremos la definición de las formas bilineales H-elípticas así como también dos herramientas muy importantes.

Definición: Yosida (1980, p.55) afirma “los espacios de Sobolev se definen de la siguiente manera. Sea $\Omega \subset R^2$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1, \infty >$. se define.

$$W^{k,p} = \{f \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Para $1 \leq p < \infty$ la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ es definida de la siguiente manera

$$\|f\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^{\alpha} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} "$$

Definición: De acuerdo a Ferragut y Asensio (2007, p.29) afirma “para el caso particular cuando $p=2$, definimos el espacio de Sobolev de orden k en Ω con $k \geq 1$, al espacio:

$$H^k(\Omega) = W^{k,p}$$

Tal que

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Donde la norma asociada es:

$$\|f\|_{H^k} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Además, comentamos que en el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ se usa la siguiente seminorma estándar, que conjuntamente con la desigualdad de Poincaré nos ayudara a poder acotar ciertas expresiones y poder demostrar la coercividad de cierta funciones que mas adelante se observara.

$$|f|_{k,p} \stackrel{\text{not}}{=} |f|_{W^{k,p}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

Observación si $k=0$ entonces tendremos que:

$$H^0(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\} = L^2(\Omega)$$

Definición (Problema Variacional). Sea un espacio de Hilbert H , una forma bilineal $B: H \times H \rightarrow R$, una forma lineal y continua $F: H \rightarrow R$, el problema variacional se fundamenta en encontrar $u \in H$ tal que:

$$B(u, v) = F(v), \forall v \in H \tag{I}$$

Al elemento $u \in H$ se le llama solución débil de (I)

2.2. Marco conceptual

Problema principal para resolver: La ecuación diferencial parcial a resolver es la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor, viene modelada por:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) - q u_t = -f$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, u \in H^1(\Omega) \text{ y } k, q \in L^\infty(\Omega)$$

CAPITULO III
MARCO METODOLÓGICO

3.1. Hipótesis central de la investigación

El empleo de métodos de diferencias finitas a la formulación variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la ecuación de una superficie bidimensional, usando algoritmo de Free Fem++, facilitara obtener la solución de dicha ecuación diferencial parcial.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

Variables

Variable dependiente: Espacios de Sobolev.

Variable independiente: Variable espacio – temporal: $(x, y, t) \in \Omega \times (0, T)$

Definición conceptual

Los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$ está definida de la siguiente manera $H^1(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se definen de la siguiente manera. Sea $\Omega \subset R^2$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1, \infty >$. Se define:

$$W^{k,p} = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Para $1 \leq p < \infty$ la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ es definida de la siguiente manera

$$\|f\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definición operacional

La variable espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ tiene su medición en su dimension, además $H^1(\Omega)$ nos ayudará a encontrar la solución de la EDP elíptica buscada, pues es el espacio más óptimo.

Indicadores

Los indicadores que corresponden a la variable Espacio de Sobolev, son los espacios de Sobolev tipo $H^1(\Omega)$.

3.3. Métodos de la investigación

El tipo de investigación usado es del tipo pura o básica, según Sanchez y Reyes (2015, p.44) menciona “trata de la búsqueda de inéditos conocimientos en los campos de la investigación, y recoge información para enriquecer el conocimiento científico”.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

El diseño utilizado en esta investigación será del tipo no experimental, que según Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.152) menciona “la variable a analizar no es posible manipularlas, en el contexto más amplio son fijas o dadas”.

3.5. Población y muestra

Población

La población según Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.174) “viene definida como un conjunto de todos los elementos que coinciden con una lista de especificaciones”. La población que se examinó en esta tesis es el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales.

Muestra

La muestra de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.175) “viene definida como un subconjunto de la población”. La muestra que se consideró en esta investigación es el conjunto de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

3.6. Actividades del proceso investigativo

FASE INICIAL

En la fase inicial se buscó la información necesaria para la investigación tanto en libros, tesis, revistas permitiéndonos de este modo ver de manera más amplia y clara las ecuaciones diferenciales parciales elípticas a desarrollar.

FASE INTERMEDIA

En la fase intermedia de planteo de maneras más precisa las ecuaciones diferenciales parciales de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor, el análisis del teorema de Lax-Milgram con el cual aseguramos la existencia y unicidad de la solución.

FASE FINAL

En la fase final la contrastación de la hipótesis se da aplicando la teoría de diferencias finitas al resultado de la forma variacional, además de ello estos resultados fueron contrastados con un problema de contorno bidimensional elíptico de segundo orden.

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

La técnica que se utilizó para recabar la información fue el análisis documental, se recolectaron los datos de libros, revistas, páginas web y el instrumento utilizado fue la ficha de registro.

3.8. Procesamiento para la recolección de datos

Dado el tipo de investigación, no requiere recolección de datos del tipo estadístico para su respectivo análisis.

3.9. Técnicas y procesamiento y análisis de datos

Respecto a la técnica de análisis de datos se puede decir que, en base a nuestro diseño de investigación las técnicas de procesamiento de datos serán la demostración matemática y el uso del software llamado FreeFem++, el cual es gratuito en las redes.

Respecto al procedimiento de recolección de datos se dará mediante la búsqueda de las fuentes bibliográficas y virtuales de donde se obtendrá la información para la investigación, luego se analizará los datos recabados de las fuentes mencionadas bibliográficas y virtuales.

CAPITULO IV
RESULTADOS Y DISCUSION

En este capítulo veremos como el teorema de Lax Milgram es una herramienta muy importante el cual nos ayudara a demostrar la existencia y unicidad de las soluciones de la formulacion variacional, utilizaremos tambien la desigualdad de Poincare asi como el teorema de Green para reducir a una forma mas simple la ecuación diferencial parcial eliptica de transferencia de calor no estacionario y mas adelante se sera las silumaciones de casos reales.

4.1 Teorema (Generalización del Teorema de Lax-Milgram). Sea \mathcal{X} y Y espacios de Banach reales, donde Y es reflexiva. Sea $a : \mathcal{X} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal , $X \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado, que cumplen las siguientes condiciones:

1. a es continua en $\mathcal{X} \times Y$, es decir, existe algun $M > 0$ tal que:

$$|a(x, y)| \leq M \|x\|_{\mathcal{X}} \|y\|_Y \quad \forall x \in \mathcal{X}, y \in Y$$

2. a satisface la condición de inf-sup sobre $\mathcal{X} \times Y$, es decir, existe algun $\gamma > 0$ tal que:

$$\inf_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\|_{\mathcal{X}}=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y=1}} a(x, y) \geq \gamma > 0$$

3. a satisface la condición de no degenerado sobre X , es decir:

$$\sup_{x \in X} a(x, y) > 0 \quad \forall y \in Y, y \neq 0$$

Si $x_0 \in \mathcal{X}$ y $F \in Y^*$, entonces existe un único $u \in X + x_0 \subset \mathcal{X}$ tal que:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in Y$$

Además:

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\gamma} \|F\|_{Y^*} + \left(\frac{M}{\gamma} + 1\right) \|x_0\|_{\mathcal{X}}$$

4.2 Teorema (EDPs del modelo no estacionario con fuente interna). – Sea Ω un abierto y acotado de R^2 . Supongamos que $f, g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ y que $q, k \in L^\infty(\Omega)$ con $k \geq C_5, C_5 \in R^+, q \geq 0$ además $g_1 = c, c \in R$ y $u \in H^1(\Omega)$ tales que:

$$(I) \quad \begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Entonces existen únicas u_1, u_2, \dots, u_N soluciones aproximadas de la formulación variacional de (I).

En efecto:

Para el estudio de la resolución de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usaremos el siguiente modelo.

$$\begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Donde Ω es un abierto acotado en R^2 con $g_1(x, y) = c; c \in R$ con dominio de la forma $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ y $q, k \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$, además $q(x, y) \geq 0$ y $k(x, y) \geq C_5$ con $C_5 \in R^+$ condiciones necesarias que ayudaran a comprobar la coercividad de la forma bilineal que se formara luego de la formulación variacional de la ecuación diferencial parcial elíptica.

Sea $v \in H^1$, luego procedemos a hallar la formulación variacional de la ecuación diferencial parcial elíptico del siguiente modo:

$$(1) \quad \int_{\Omega} [\nabla(k\nabla u)]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_tvd\Omega = - \int_{\Omega} fvd\Omega$$

Luego aplicando las propiedades del gradiente en la primera parte de la expresión (1) tenemos:

$$\int_{\Omega} [(\nabla k)(\nabla u) + k\nabla^2 u]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega$$

$$\int_{\Omega} [(\nabla k)(\nabla u) + k\Delta u]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} (\nabla k)(\nabla u)vd\Omega + \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega$$

Luego aplicando Teorema de Green en la segunda parte de la expresión (2) tenemos:

$$\int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial g_1}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma$$

Como g_1 es una función constante tenemos que su derivada en la dirección de la normal es cero, por tanto, se reduce la expresión anterior:

$$\int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)[(\nabla k)v + k(\nabla v)]d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega = -\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla k)vd\Omega - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma$$

Combinando (2) y (3) se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla k)(\nabla u)vd\Omega - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla k)vd\Omega - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega$$

$$-\int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega$$

$$-\int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega - \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = -\int_{\Omega} fvd\Omega - \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Omega} qu_ivd\Omega = \int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2kvd\Gamma$$

Donde:

$$B_{(u,v)} = \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Omega} qu_tvd\Omega$$

$$F_{(v)} = \int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2kvd\Gamma$$

Ahora faltaría probar que se cumplan las condiciones para la forma bilineal “B” y el funcional “F” y así garantizar la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional.

Ahora veamos la parte numérica de la formulación variacional y poder implementarla en el programa de FreeFem++, para ello haremos la discretización del tiempo, comenzamos tomando una partición en $(0, T)$ tal que se cumpla lo siguiente:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T ; \text{ Luego utilizando las diferencias finitas con } h = \frac{T}{N} > 0 \text{ y para}$$

$t = t_1$ tenemos que:

$$u_t(x, y, t_1) = \frac{u(x, y, t_1) - u(x, y, t_1 - h)}{h} = \frac{u(x, y, t_1) - u(x, y, 0)}{h}$$

Pues como $t_0 = 0$ y como sabemos $t_1 - t_0 = h$ por tanto $t_1 - h = 0$; en general para el análisis de los demás casos, cuando se tome $t = t_2$ usaremos la siguiente expresión

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_N - t_{N-1} = h \text{ además denotaremos a condición inicial de la}$$

siguiente forma $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, por otro lado para los cálculos posteriores

denotaremos $f_1(x, y) = f(x, y, t_1)$, $u_1(x, y) = u(x, y, t_1)$, $v_1(x, y) = v(x, y, t_1)$,

$$q_1(x, y) = q(x, y, t_1) \text{ y } k_1(x, y) = k(x, y, t_1) \text{ luego reemplazando las nuevas notaciones en}$$

la formulación variacional (4):

$$\int_{\Omega} k_1(x, y)\nabla u_1(x, y)\nabla v_1(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y)\frac{u_1(x, y) - u_0(x, y)}{h}v_1(x, y)d\Omega = \int_{\Omega} f_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_N} g_2(x, y)k_1(x, y)v_1(x, y)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} k_1(x, y)h\nabla u_1(x, y)\nabla v_1(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y)[u_1(x, y) - u_0(x, y)]v_1(x, y)d\Omega = \int_{\Omega} hf_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y)k_1(x, y)v_1(x, y)d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} hk_1(x, y) \nabla u_1(x, y) \nabla v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y) u_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega - \int_{\Omega} q_1(x, y) u_0(x, y) v_1(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} hf_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y) k_1(x, y) v_1(x, y) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} hk_1(x, y) \nabla u_1(x, y) \nabla v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y) u_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} hf_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y) u_0(x, y) v_1(x, y) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y) k_1(x, y) v_1(x, y) d\Gamma \\
(5) \quad & \int_{\Omega} [hk_1(x, y) \nabla u_1(x, y) \nabla v_1(x, y) + q_1(x, y) u_1(x, y) v_1(x, y)] d\Omega = \int_{\Omega} [hf_1(x, y) + q_1(x, y) u_0(x, y)] v_1(x, y) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y) k_1(x, y) v_1(x, y) d\Gamma
\end{aligned}$$

Definamos la siguiente función $\psi_1(x, y) = (hf_1 + q_1 u_0)(x, y)$; luego a partir de (5) tenemos la siguiente expresión:

$$a(u_1, v_1) = \psi(v_1)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
(6) \quad a(u_1, v_1) &= \int_{\Omega} [hk_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + q_1 u_1 v_1] d\Omega \\
\psi(v_1) &= \int_{\Omega} \psi_1 v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} hg_2 k_1 v_1 d\Gamma
\end{aligned}$$

Para el caso de u_1, v_1 , hasta el momento hemos conseguido las expresiones necesarias para poder probar la linealidad de la funcional ψ , la bilinealidad de la forma bilineal “ a ”, también la continuidad y coercividad de “ a ” y así poder utilizar el Teorema de Lax-Milgram generalizado para garantizar la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional.

Afirmación 1: Para el caso de u_1, v_1 probaremos que “ ψ ” es acotado y lineal.

En efecto:

Tomemos $\psi_1 \in L^2$, usando la desigualdad de Schwartz (o Hölder) y dado que $q_1, k_1 \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$ tenemos que existe un número $C_1 > 0$ tal que $|k_1(x, y)| \leq C_1$ y $|q_1(x, y)| \leq C_1$ además como

$f \in L^2(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / u \text{ medible} \wedge \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 < \infty\}$ se garantiza que la norma

de “ f ” esta acotado superiormente también, luego:

$$|\psi(v_1)| = \left| \int_{\Omega} (hf_1 + q_1u_0)v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} hg_2k_1v_1 d\Gamma \right| \leq \|hf_1 + q_1u_0\|_{L^2} \cdot \|v_1\|_{L^2} + \|hg_2k_1\|_{L^2} \cdot \|v_1\|_{L^2}$$

$$\leq (\|hf_1\|_{L^2} + \|q_1u_0\|_{L^2} + \|hg_2k_1\|) \|v_1\|_{L^2}$$

$$|\psi(v_1)| \leq (|h| \|f_1\|_{L^2} + \|q_1\| \|u_0\|_{L^2} + |hg_2| \|k_1\|) \|v_1\|_{L^2} \leq (|h| \|f_1\|_{L^2} + C_1 \|u_0\|_{L^2} + C_1 |hg_2|) \|v_1\|_{L^2}$$

$$|\psi(v_1)| \leq C_2 \|v_1\|_{L^2} \leq C_2 \|v_1\|_{H^1}$$

Donde:

$$C_2 = |h| \|f_1\|_{L^2} + C_1 (\|u_0\|_{L^2} + |hg_2|)$$

$$|\psi(v_1)| \leq C_2 \|v_1\|_{H^1}$$

Afirmación 2: Para el caso de u_1, v_1 probaremos que “ a ” es bilineal.

En efecto:

Tomemos $u, u', v \in H^1(\Omega); n, m \in R$ y probemos que se cumpla la bilinealidad:

Luego:

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1(nu + mu')v + k_1h\nabla(nu + mu')\nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1nuv + q_1mu'v + k_1h(\nabla(nu) + \nabla(mu'))\nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1nuv + q_1mu'v + k_1h\nabla(nu)\nabla v + k_1h\nabla(mu')\nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [nq_1uv + nk_1h\nabla u\nabla v + mq_1u'v + mk_1h\nabla u'\nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [n(q_1uv + k_1h\nabla u\nabla v) + m(q_1u'v + k_1h\nabla u'\nabla v)] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = n \int_{\Omega} (q_1uv + k_1h\nabla u\nabla v) d\Omega + m \int_{\Omega} (q_1u'v + k_1h\nabla u'\nabla v) d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = na(u, v) + ma(u', v)$$

Por tanto, tenemos probado la linealidad en la primera componente de la forma bilineal “ a ” luego la linealidad en la segunda componente es demostrada en forma análoga. Tenemos

Afirmación 3: Para el caso de u_1, v_1 probaremos que “ a ” es acotado.

En efecto:

Sean $u_1, v_1 \in H^1(\Omega)$, luego en (6) tomamos la norma y así tenemos la siguiente expresión:

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1 + h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1| d\Omega + \int_{\Omega} |h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

Luego así como en la afirmación 1, sabemos que como $k_1, q_1 \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / \sup |u(x, y)| < \infty\}$, tenemos que están acotados superiormente en Ω , entonces existe $C_1 > 0$ tal que $|k_1(x, y)| \leq C_1$ y $|q_1(x, y)| \leq C_1$ luego aplicando la desigualdad de Schwartz tenemos la siguiente desigualdad:

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1| d\Omega + \int_{\Omega} |h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega \leq \int_{\Omega} \|q_1\| \|u_1 v_1\| d\Omega + \int_{\Omega} \|h\| \|k_1\| |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

$$(7) \quad |a(u_1, v_1)| \leq C_1 \int_{\Omega} |u_1 v_1| d\Omega + C_3 \int_{\Omega} |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

donde $C_3 = |h| C_1$.

Por otro lado, de la definición de semi norma tenemos que:

$$\|u\|_{1,2} \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} = \left(\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \right)^{1/2}$$

$$(8) \quad \|u\|_{1,2} \leq \|u\|_{H^1}$$

Luego, analizaremos la segunda integral de la desigualdad (7) para luego usar la desigualdad de Hölder juntamente con la definición de semi norma y la desigualdad en (8), es así como tenemos la siguiente expresión:

$$(9) \quad \int_{\Omega} |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega \leq \|\nabla u_1\|_{L^2} \|\nabla v_1\|_{L^2} = \|u_1\|_{1,2} \|v_1\|_{1,2} \leq \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

Luego de (7) y (9) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_1 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1} + C_3 |u_1|_{1,2} \cdot |v_1|_{1,2}$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_1 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1} + C_3 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_4 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

donde $C_4 = C_1 + C_3$.

Por tanto, tenemos probado que “ a ” es acotado.

Afirmación 4: Para el caso de u_1, v_1 probaremos que “ a ” es coersiva en $H^1(\Omega)$.

En efecto:

Tomemos la forma bilineal “ a ” en (6), luego usando la desigualdad de Poincaré y también usando las condiciones de “ q ” y “ k ”, tenemos lo siguiente:

Primero sabemos que:

$$a(u_1, v_1) = \int_{\Omega} [hk_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + q_1 u_1 v_1] \partial \Omega$$

luego de lo anterior tenemos que:

$$a(u_1, u_1) = \int_{\Omega} [q_1 u_1^2 + hk_1 |\nabla u_1|^2] \partial \Omega \geq \int_{\Omega} hk_1 |\nabla u_1|^2 \partial \Omega$$

$$(9) \quad a(u_1, u_1) \geq h \int_{\Omega} k_1 |\nabla u_1|^2 \partial \Omega \stackrel{def}{\geq} hC_5 \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \partial \Omega = hC_5 |u_1|_{1,2}^2$$

Por otro lado, de la desigualdad de Poincaré formemos una desigualdad el cual utilizaremos, para ello sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{H^1} \leq (C_p + 1) \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$(10) \quad \|u\|_{H^1} \leq (C_p + 1) |u|_{1,2}$$

Con $C_p > 0$.

Luego continuando de (9) y (10) resulta que:

$$a(u_1, u_1) \geq hC_5 |u_1|_{1,2}^2 \geq \frac{hC_5}{(C_p + 1)^2} \|u_1\|_{H^1}^2 \geq M \|u_1\|_{H^1}^2$$

$$a(u_1, u_1) \geq M \|u_1\|_{H^1}^2$$

Donde $M = \frac{hC_5}{(C_p + 1)^2}$

Luego tenemos probado que “ a ” es coersiva en $H^1(\Omega)$.

Por tanto, por el teorema de Lax-Milgram podemos garantizar la existencia y unicidad de la solución u_1 de la formulación variacional.

Continuando con la discretización del tiempo para el caso de $t = t_2$ se prueba que se cumplan las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Lax-Milgram garantizar la existencia y unicidad de la solución u_2 de la formulación variacional. Por lo tanto, realizando el mismo procedimiento se puede hallar de forma reiterativa $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$ soluciones aproximadas de la formulación variacional.

4.3. Algoritmo del problema de contorno bidimensional

FreeFem++ es un programa de código abierto y el cual puede ser descargado de forma gratuita de su página oficial <https://freefem.org/> el cual sirve para determinar ecuaciones diferenciales parciales por medio del método de elementos finitos, y en particular para esta investigación la usaremos para hallar la solución de una ecuación diferencial parcial elíptica. He de comentar que este programa es ampliamente utilizado en la simulación numérica de problemas en ciencia e ingeniería, por otro lado, tener en cuenta que como FreeFem++ es un programa que resuelve ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de elementos finitos entonces es también un método numérico, por tanto, se enfoca en la discretización espacial para encontrar la aproximación de soluciones de EDP muy complicados, pero si las EDP tuvieran una dependieran del tiempo lo cual quiere decir que en las EDP estarían involucradas derivadas respecto del tiempo FreeFem++ tiene la facilidad de incorporar la discretización del tiempo mediante el bucle “for” por ejemplo. Su lenguaje de alto nivel

facilita el planteamiento y resolución de modelos complejos, para ser específicos trabaja con C++ como lenguaje base. A continuación, veremos el algoritmo de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor.

Para este capítulo analizaremos en caso de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor, la cual es:

$$\begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Mostraremos ahora el código en FreeFem++ para la aproximación de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor.

Algoritmo del problema de contorno bidimensional de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor viene dada por:

Supongamos se tiene un cuarto de habitación en 3D cuya forma es de “L” y en uno de sus lados se ubica una fuente interna de calor que podría ser una chimenea o una estufa ubicado en uno de los lados del cuarto, se desea hacer la simulación del flujo de calor sobre el plano generado por la intersección del corte transversal paralelo al plano XY y el cuarto de habitación en 3D cuya forma es de “L”. Además, la conductividad térmica que usaremos será de $k=0.023 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ pues se hará la simulación en un medio que será el aire.

Archivo: Difusión.edp

```
load "iovtk"
int C1=10;
real k=0.023;
real q=0.01;
real[int] colorhsv=[
```

```

4./6., 1 , 0.5,
4./6., 1 , 1,
0.5, 1 , 1,
1./3.,1, 1,
1./6.,1,1,
0,1,1
];
border a(t=0,1){x=4*t;y=0;};
border b(t=0,1){x=4;y=t;};
border c(t=0,1){x=4-t;y=1;};
border circu1(t=1.5*pi,pi){x=3+cos(t);y=2+sin(t);};
border e(t=0,1){x=2;y=2+t;};
border f0(t=0,1){x=2;y=3+t;};
border g(t=0,2){x=2-t;y=4;};
border h(t=0,4){x=0;y=4-t;};
border circu(t=0,2*pi){x=1+0.1*cos(t);y=3+0.1*sin(t);};
int n=10;

//Generación de la malla:
mesh Mesh= buildmesh (a(7*n)+b(2*n)+c(2*n)+circu1(2*n)+e(2*n)+f0(2*n)+
g(5*n)+h(7*n)+circu(-10*n));
plot (Mesh, wait=true,cmm="Malla");
real dt=0.1;
real t=0;
fespace SpaceP1(Mesh,P2);
SpaceP1 u,v,u0,f,g1,g2;
//Formulación variacional:
problem diffuse(u,v)=int2d(Mesh)(dt*k*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))+q*u*v)-
int2d(Mesh)(dt*f*v+q*u0*v)-int1d(Mesh,circu)(dt*g2*k*v)
+on(a,b,c,circu1,e,f0,g,h,u=18)
+on(circu,u=60);
u0=18;
for(int m=0; m<=3/dt; m++)
{

```

```

f=exp(t) ;//sin(x)
diffuse;
//plot (u,wait=0,value=1,fill=1,hsv=colorhsv);
plot (u,wait=0,cmm=" t="+t +", min=" + u[].min + ", max=" + u[].max,
value=0,fill=1,hsv=colorhsv);
t=t+dt;
}
plot (u, dim=3, wait=1, value=true, hsv=colorhsv, fill=true,cmm="Modelo de
transferencia de calor no estacionario con fuente interna");

```

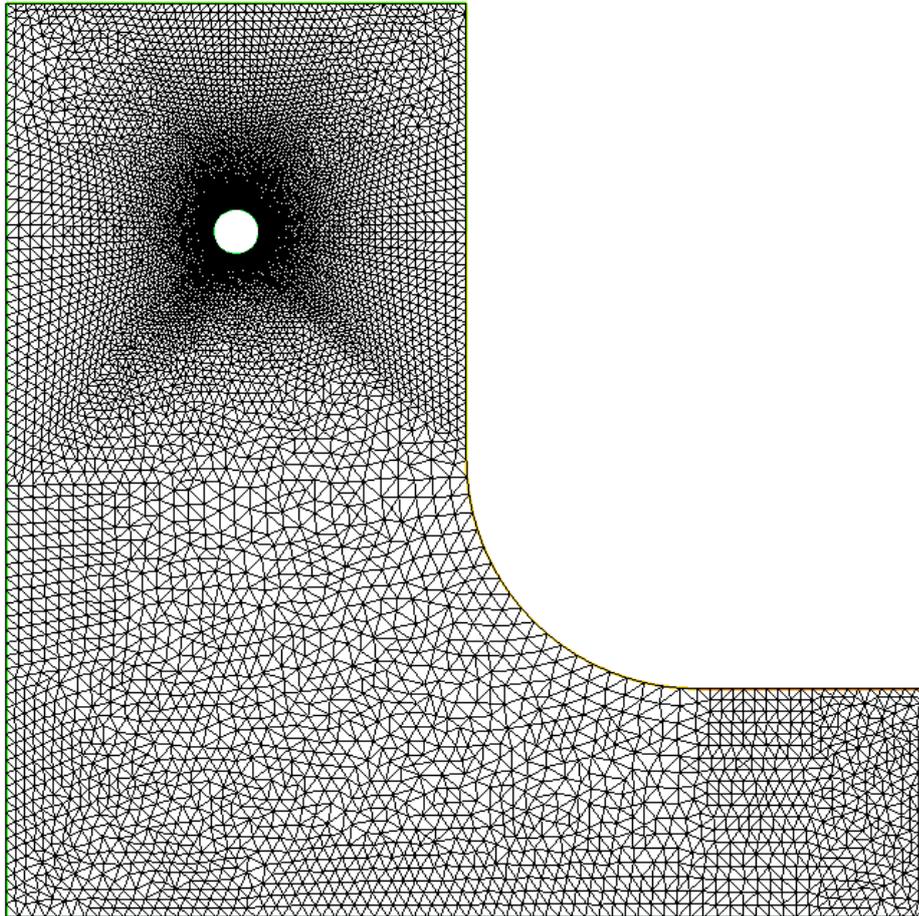


Figura 1: Malla generada con Difusión.edp

t=0, min=18, max=60

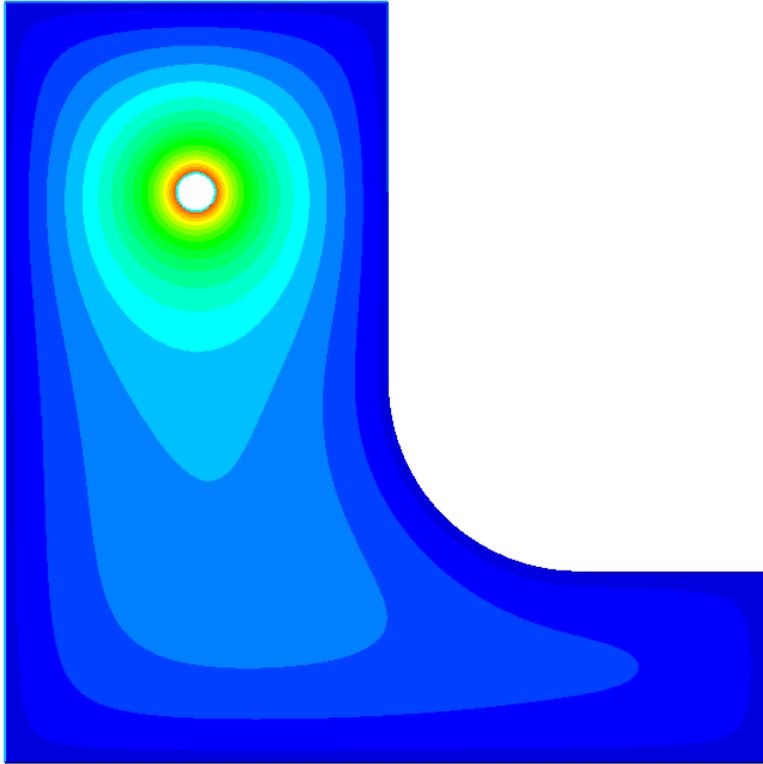


Figura 2: Solución obtenida de la EDP para $t=0.0$

t=0.5, min=18, max=60

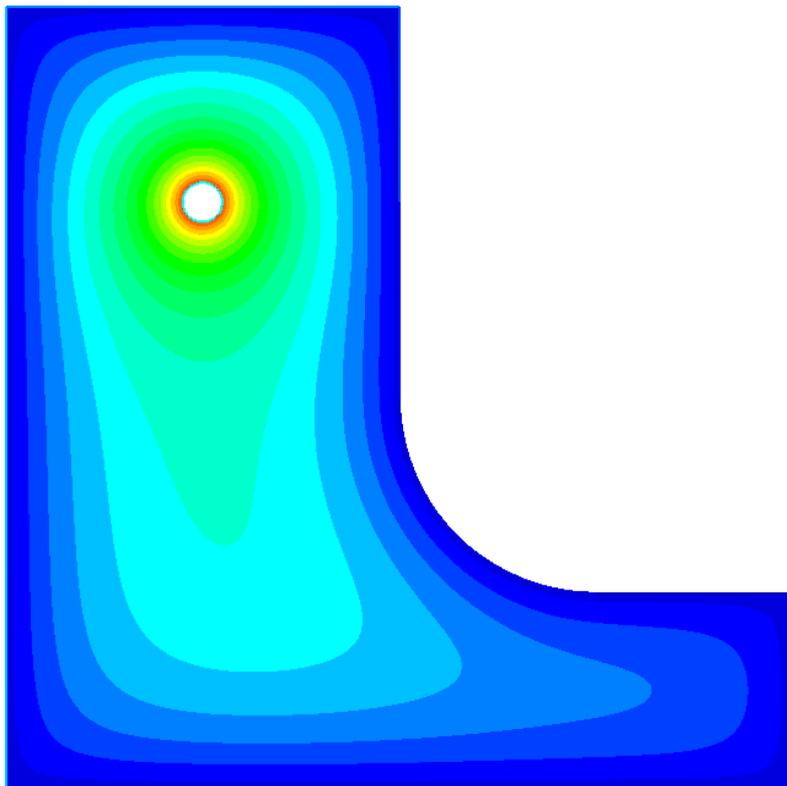


Figura 3: Solución obtenida de la EDP para $t=0.5$

t=1, min=18, max=60

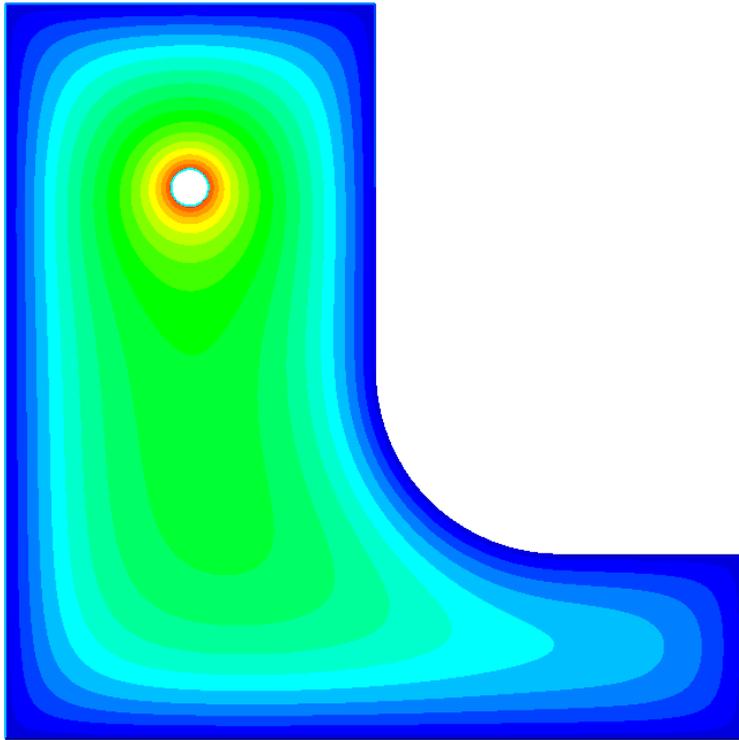


Figura 4: Solución obtenida de la EDP para t=1.0

t=1.5, min=18, max=60

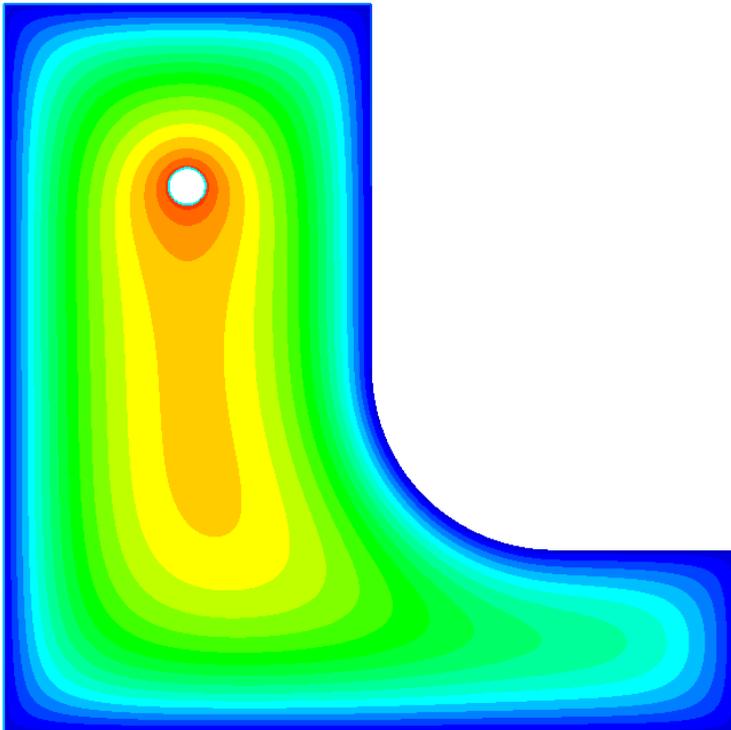


Figura 5: Solución obtenida de la EDP para t=1.5

t=2, min=18, max=74.7049

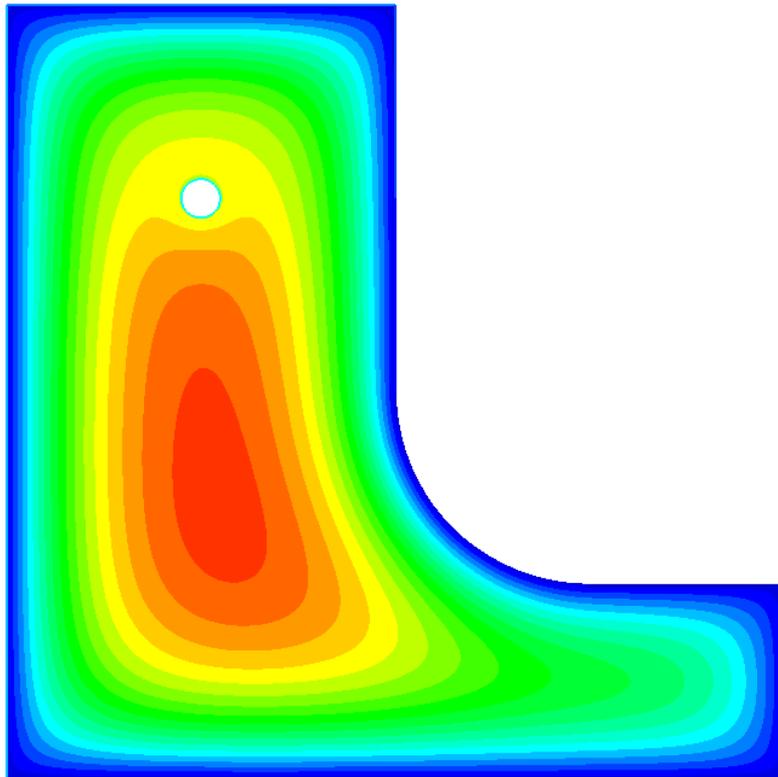


Figura 6: Solución obtenida de la EDP para t=2.0

t=2.5, min=18, max=111.172

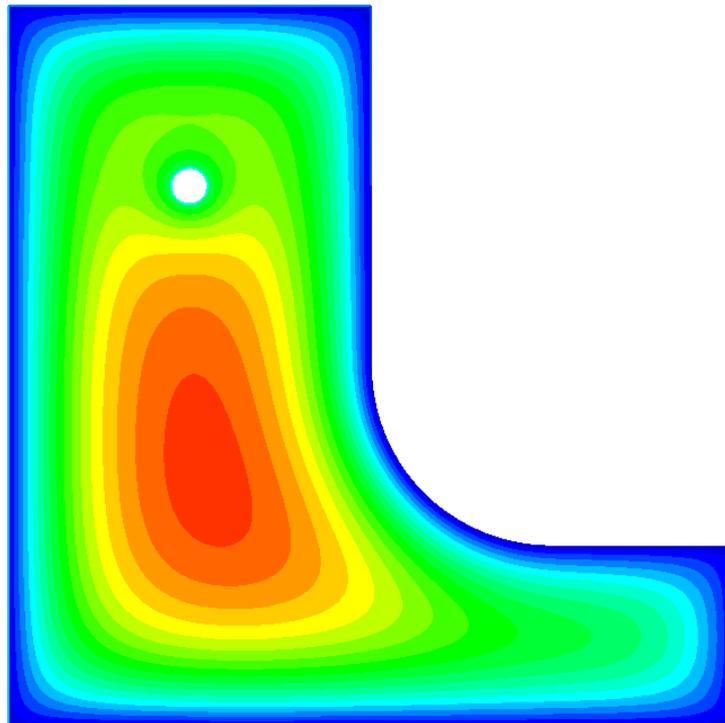


Figura 7: Solución obtenida de la EDP para t=2.5

t=3, min=18, max=171.325

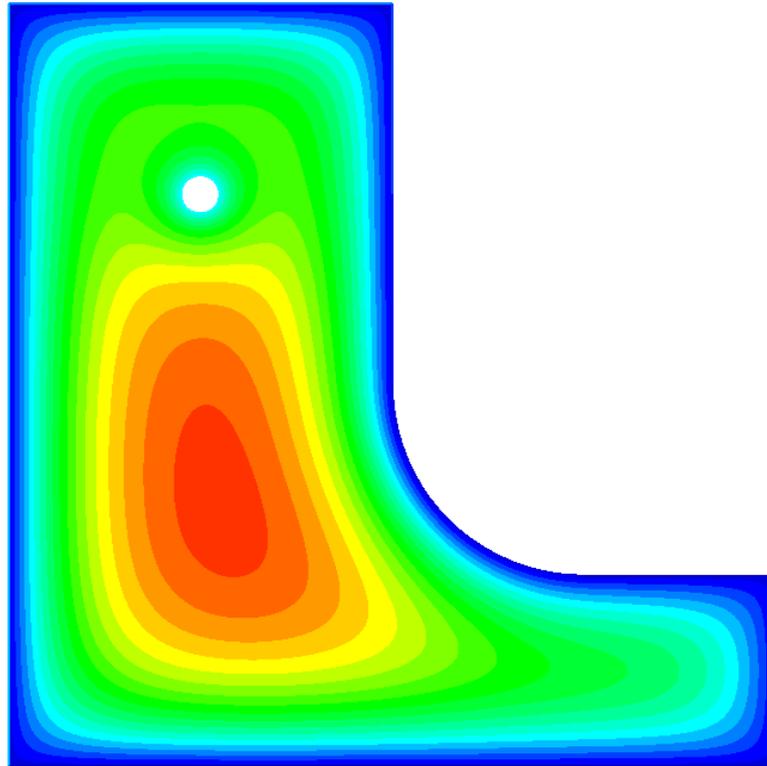


Figura 8: Solución obtenida de la EDP para $t=3.0$

Modelo de transferencia de calor no estacionario con fuente interna

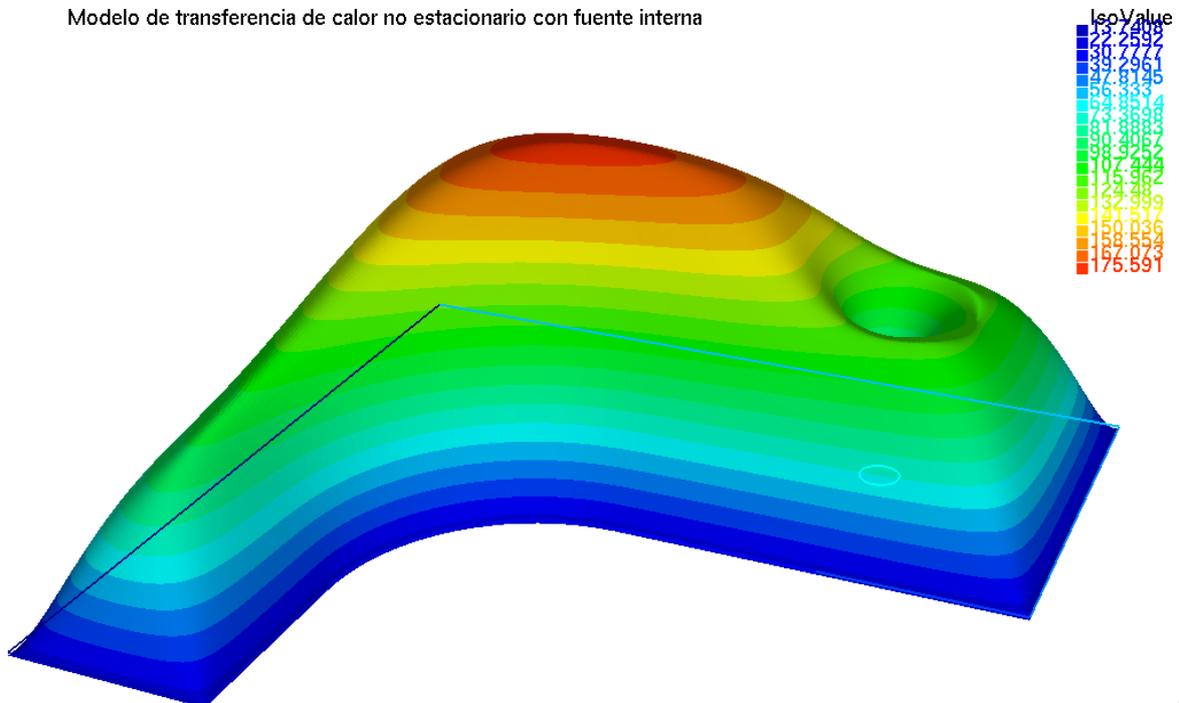


Figura 9: Solución obtenida de la EDP en 3D

Supongamos se tiene un sistema de frenado de forma cilíndrica dentro del cual se ubica el sistema interno del frenado que por la fricción genera una fuente de calor interno, se desea hacer la simulación del flujo de calor sobre el plano generado por la intersección del corte transversal paralelo al plano XY y sistema de frenado de forma cilíndrica. Además, la conductividad termica que usaremos será de $k=16 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ pues se hará la simulación en un medio que será el acero inoxidable.

Archivo: Freno_calor.edp

```
load "gmsht"
load "msh3"
load "medit"
int C1=999;
int meshSize=5;
func k=16; //k=2 + sin(pi*x/4)
real q=0.01;
real[int] colorhsv=[
4./6., 1 , 0.5, //azul oscuro
4./6., 1 , 1, //azul
0.5, 1 , 1, //celeste
1./3.,1, 1, //verde
1./6.,1,1, //amarillo
0,1,1 //rojo
];
border C0(t=0,2*pi){x=5*cos(t);y=5*sin(t);} //Ro_D
border C11(t=0,1){x=-0.5+t;y=3;label=C1;} //Ro_N
border C12(t=0,1){x=0.5;y=3-6*t;label=C1;} //Ro_N
border C13(t=0,1){x=0.5-t;y=-3;label=C1;} //Ro_N
border C14(t=0,1){x=-0.5;y=-3+6*t;label=C1;} //Ro_N

mesh Mesh=buildmesh(C0(meshSize*15)+C11(meshSize)+C12(meshSize*10)+
C13(meshSize)+C14(meshSize*15));
plot (Mesh, wait=true);
real dt=0.1;
```

```

real t=0;
fespace SpaceP1(Mesh,P2);
SpaceP1 u,v,u0,f,g1,g2;
problem          diffuse(u,v)=int2d(Mesh)(dt*k*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))+q*u*v)-
int2d(Mesh)(dt*f*v+q*u0*v)-int1d(Mesh,999)(dt*g2*k*v)
+on(C0,999,u=g1)
+on(999,u=200);
u0=18;//
for(int m=0; m<=3/dt; m++)
{t=t+dt;
    f=t^(5.6); //exp(1.9*t);
    g1=t^(5.6); //exp(1.9*t);
    diffuse;
    plot (u,wait=1,fill=1,value=false,hsv=colorhsv);
    t=t+dt;
}
plot (u, dim=3, wait=1,cmm=" t="+t+"", min=" + u[].min + ", max=" + u[].max,value=true,
fill=true,hsv=colorhsv);

```

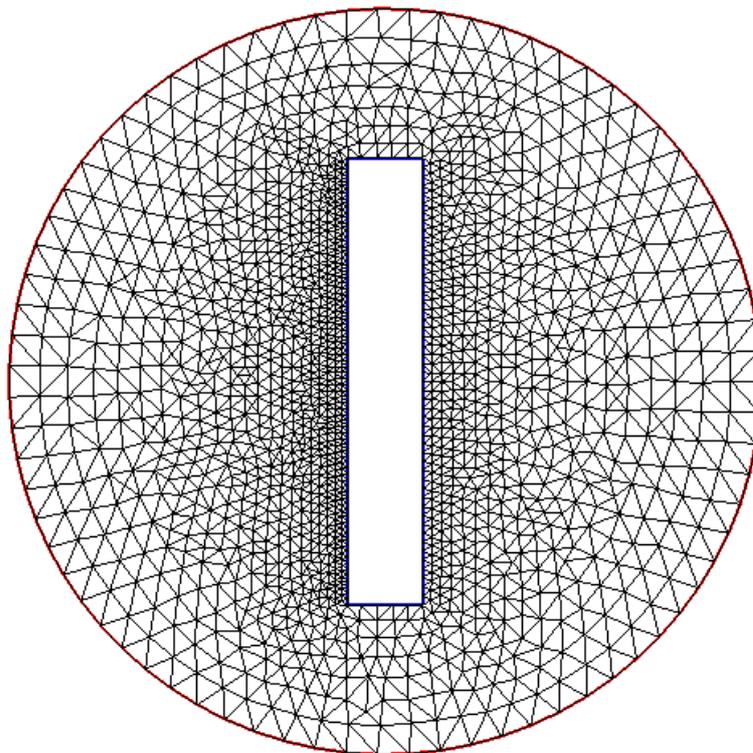


Figura 10: Malla generada con Freno_calor.edp

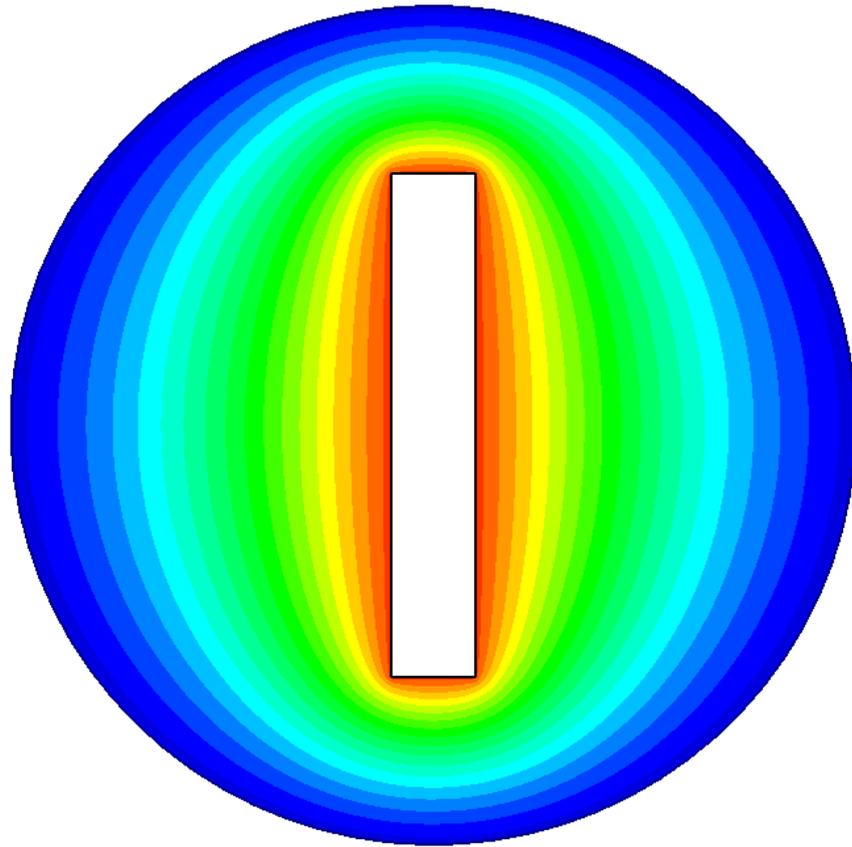


Figura 11: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=0.0$

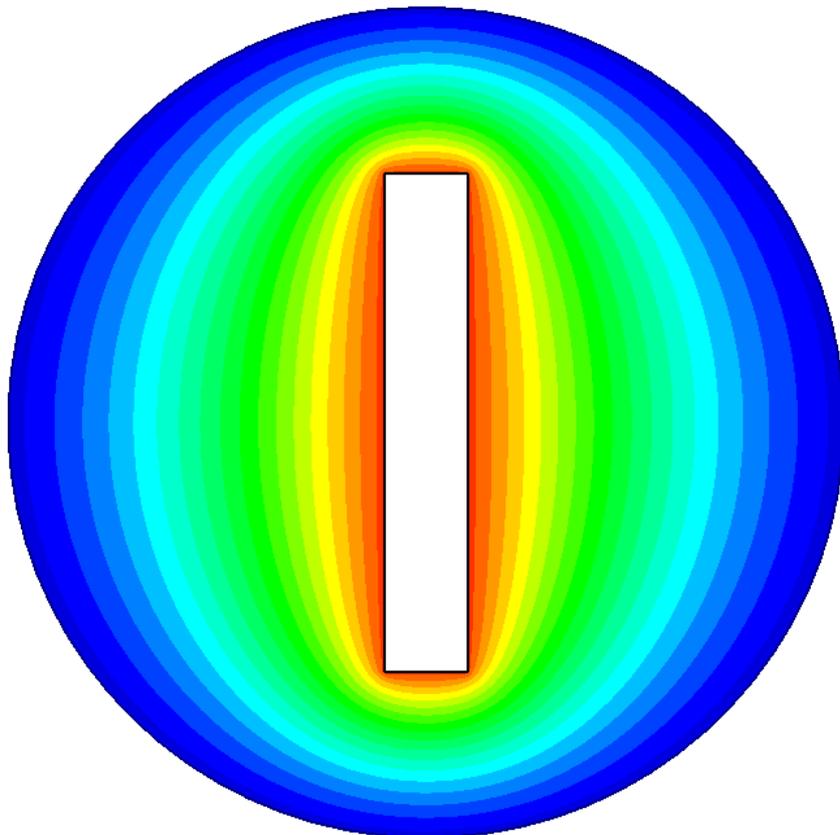


Figura 12: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=1.0$

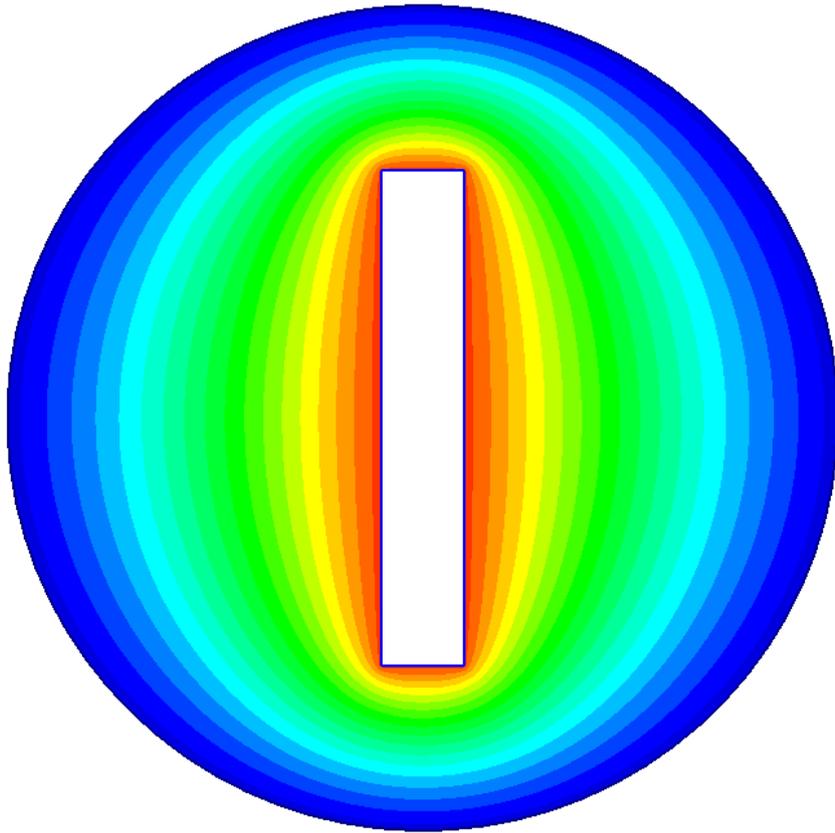


Figura 13: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.0$

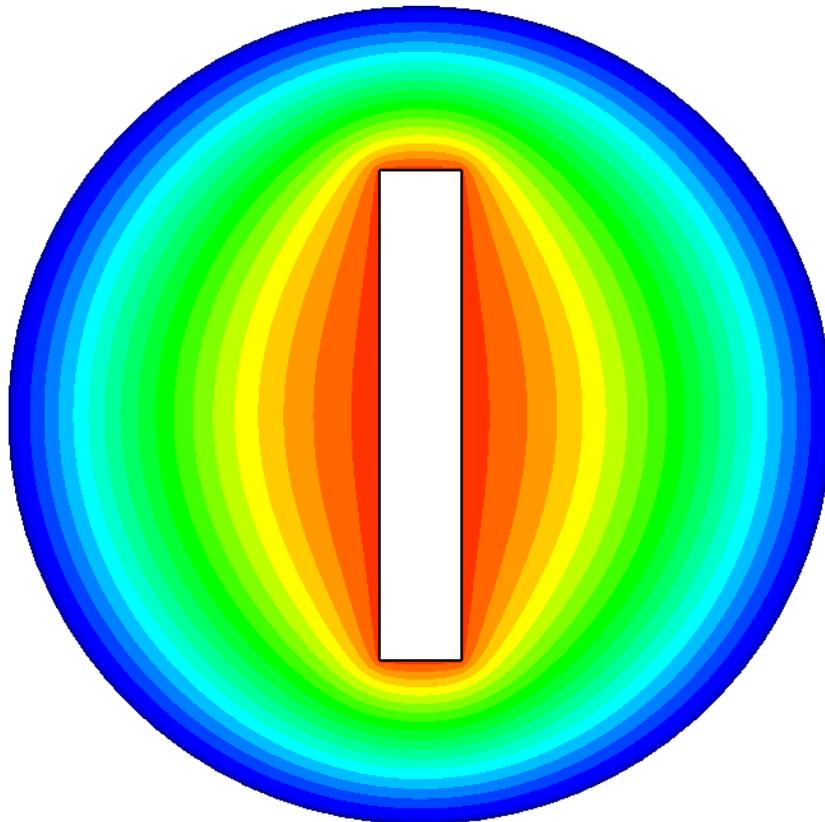


Figura 14: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.4$

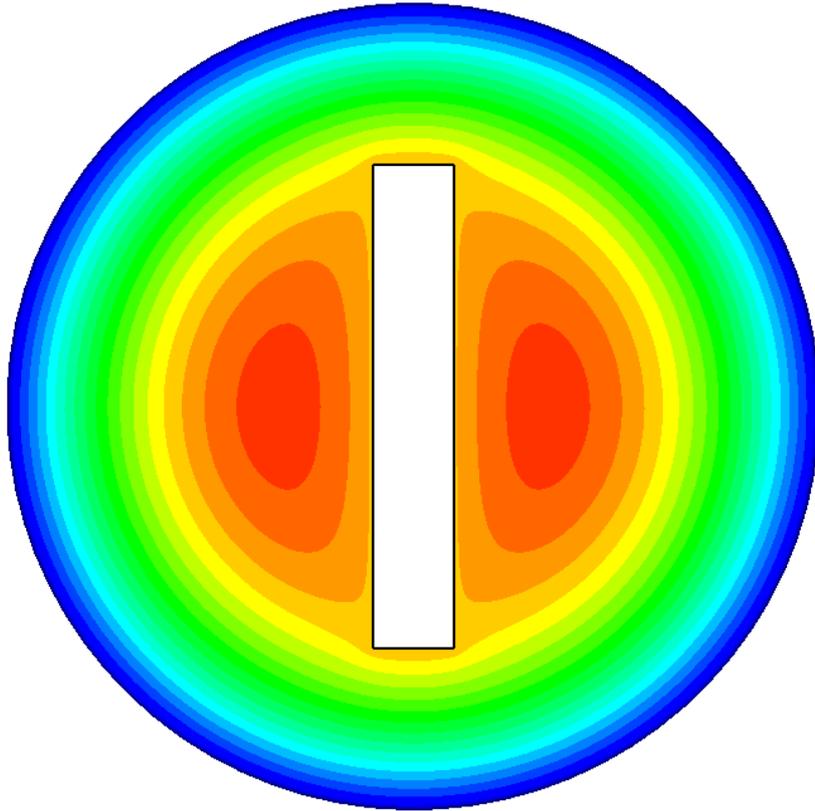


Figura 15: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.5$

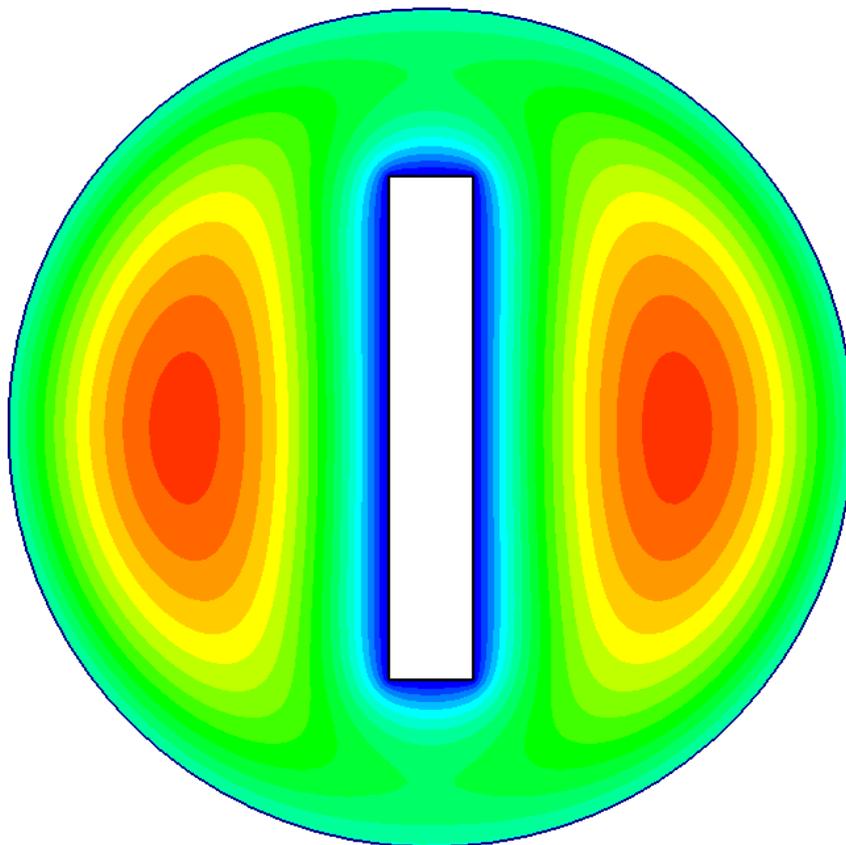


Figura 16: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.6$

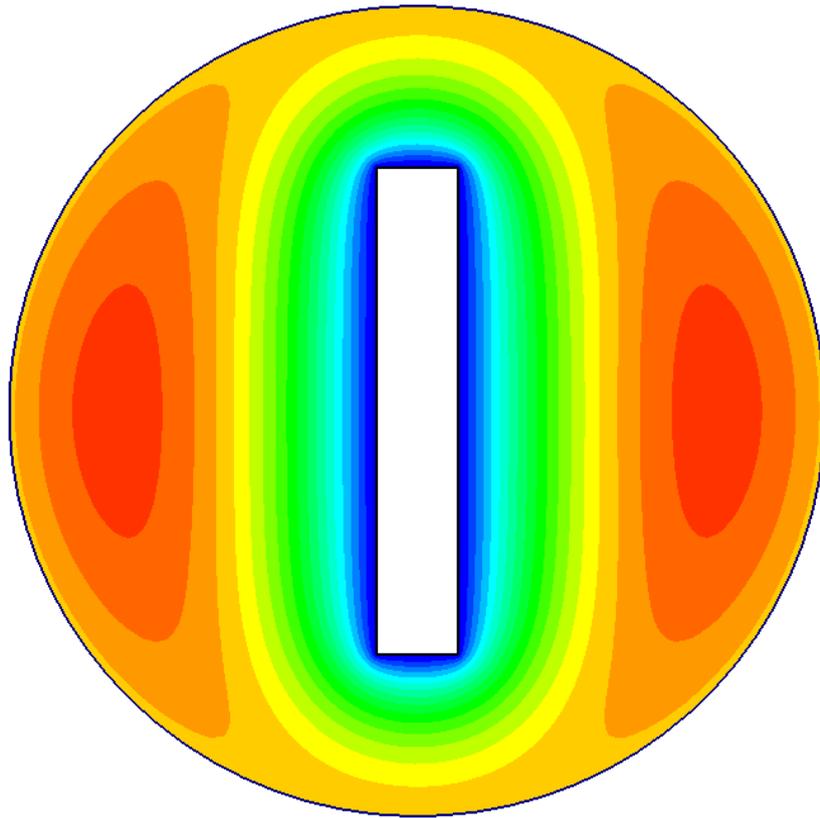


Figura 17: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.7$

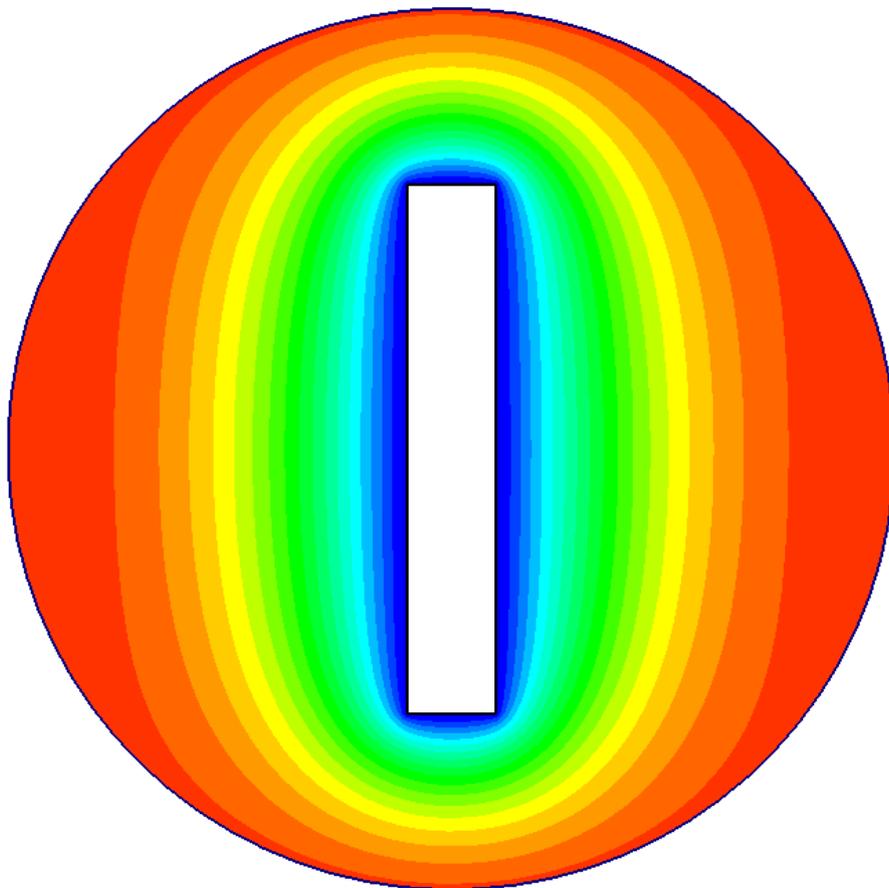


Figura 18: Solución obtenida de la EDP que modela un freno para $t=2.9$

t=3.1, min=200, max=470.514

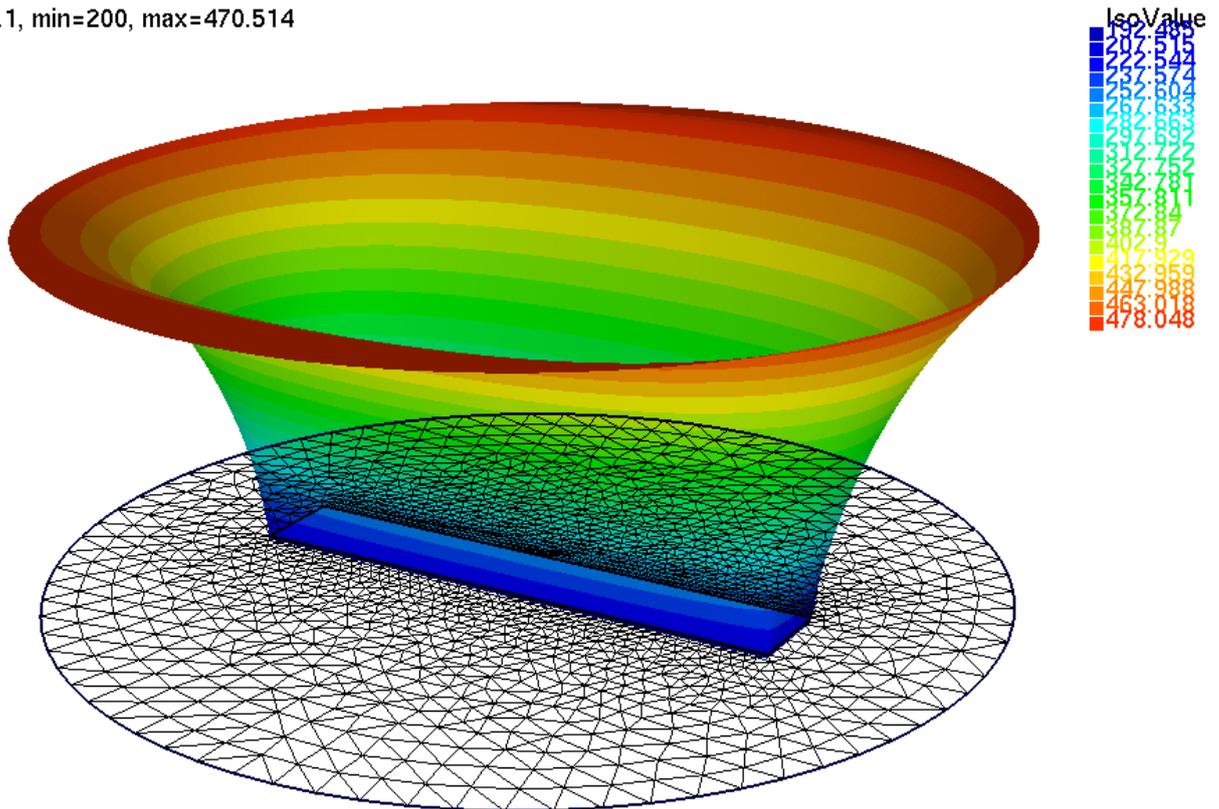


Figura 19: Malla y solución obtenida de la EDP que modela un freno en 3D

Si se desea mejorar los resultados de FreeFem++, es decir, respecto a la gráfica de la malla y poder hacer simulaciones sobre ciertos materiales u objetos o “situaciones reales” más complejas se puede utilizar el programa Gmsh el cual tiene la facilidad de construir dominios y mallas más complejas y también es de código abierto y libre, por otro lado, si aun así si se desearía mejorar u optimizar aún más las mallas en el sentido de poder graficarlo se puede recurrir al programa de FreeCad el cual optimizaría las gráficas de las mallas.

Algunas funciones del FreeFem++ más utilizadas al momento de presentar las soluciones de las EDPs.

FreeFem++ tiene algunas funciones u opciones las cuales hacen más manejables la interpretación de los resultados como las gráficas que el programa da, algunas como resaltar las líneas isoclinas en un modelo de difusión de calor, y como presentar la malla y la solución al mismo. Estas son algunas de las opciones:

L: Sombre o resalta la gráfica en 2D o 3D.

P: regresa a la malla.

F: resalta las líneas isoclinas.

I: cambia a colores grises.

H: Reduce la visión de 2D a 3D.

V: Esconde la leyenda de colores.

N y n: aumenta y reduce la cantidad de líneas isoclinas.

3: visión en 3D.

B: Cambia entre mostrar malla o borde.

4.4. Discusión de los resultados

Con respecto al objetivo general que nos proponemos en este estudio, que es determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas y la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++, los resultados demuestran lo óptimo del método para determinar la solución aproximada de la formulación variacional por los algoritmos generados, esto se relaciona con los resultados obtenidos en otros estudios, por ejemplo, Mendoza (2016) los cuales constataron que el desarrollo de algoritmos para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales analizadas es un método óptimo, por tanto podemos constatar el objetivo general.

En lo que se refiere a los objetivos específicos que nos proponemos en este estudio, que es determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas y determinar la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++ , los resultados muestran la solución numérica y su aplicación en dos casos reales usando el programa de Free Fem++, estos hallazgos se ajustan o concuerdan con los resultados obtenidos por Izquierdo (2017), los cuales constataron que usando un algoritmo y un software de visualización se puede determinar la solución aproximada y así visualizar la difusión del calor dentro del dominio.

CAPITULO V
CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones de la investigación

Se determina y aplica la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor empleando el método de diferencias finitas con el programa Free Fem++ además se presenta el algoritmo que realiza la simulación del fenómeno descrito por la ecuación diferencial parcial elíptica.

Se determina la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++

5.2. Recomendaciones de la investigación

Se recomienda para un mejor análisis y optimización de las soluciones utilizar programa Gmsh y programa de FreeCad que son herramientas que ayudaran a poder mostrar las mallas y generarlas de maneras más eficientes y reales.

Se recomienda poder hacer variaciones al momento de definir las funciones, por ejemplo, bastaría para "f" definida de la siguiente manera $f = \exp(i*t)$ con "i" perteneciente a los complejos ya en este punto se entraría en el mundo de números complejos lo cual es un campo no muy estudiado y de esa manera poder simular fenómenos de la naturaleza mucho más complejos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adams, R. y Fourier, J. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, Amsterdam.
- [2] Brézis, H. (1983). *Análisis funcional Teoría y Aplicaciones*, Paris.
- [3] Calderón, G. y Gallo, R. (2011). *Introducción al Método de los Elementos Finitos: un enfoque matemático*, Universidad de los Andes. Caracas, Venezuela.
- [4] Chumpitaz, M. (s.f.). *Análisis Funcional*, Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, Perú
- [5] Ferragut, L. y Asensio, M. (2007). *Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales*.
- [6] Gatica G. (2012). *Análisis Numérico de EDPs. El Método de Elementos Finitos Mixtos*, Universidad de Concepción.
- [7] Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). México: McGraw-Hill interamericana.
- [8] Izquierdo, G. (2017). *Modelización de la ecuación de calor con diferencias finitas*, Universidad de Barcelona.
- [9] Kolmogorov, A. y Fomin, S. (1970). *Introductory Real Analysis*, New York, Dover Publications.
- [10] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, New York.
- [11] Mendoza, B. (2016). *Resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de diferencias finitas y su paralelización*, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [12] Miana, P. (2006). *Curso de Análisis funcional*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

- [13] Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2da edición). University of Wisconsin, New York: McGraw-Hill.
- [14] Sánchez, H. y Reyes, C. (2015). *Metodología y diseños en la investigación científica*. Lima, Perú.
- [15] Solín, P. (2006). *Partial Differential Equations and the finite Element Method*, John Wiley y Sons, Ltd 2006.
- [16] Tamayo, M. (2015). *El proceso de la investigación científica: incluye evaluación y administración de proyectos de investigación* (5ta edición). México: Limusa.
- [17] Treves, F. (1967). *Topological Vector Spaces, Distribuciones and Kernels*, Academic press , New York.
- [18] Vidaurre, R. (2015). Modelización de la transferencia de calor durante el escaldado del loche (*cucurbita moschata*) y papa (*solanum tuberosum*), Universidad Nacional Agraria la Molina.
- [19] Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*, Berlin Heidelberg - New York.

ANEXOS

Anexo 1: Matriz de consistencia

Título: Método de elementos finitos para una formulación variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la ecuación de una superficie bidimensional, usando algoritmo de Free Fem++

FORMULACION DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES
¿Será que el uso del método de diferencias finitas y el programa de Free Fem++ determinan la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor?	<p>Objetivo general</p> <p>Determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas y la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++</p> <p>Objetivo específico</p> <ul style="list-style-type: none"> Determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas 	<p>Hipótesis de la investigación</p> <p>El empleo de métodos de diferencias finitas a la formulación variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la ecuación de una superficie bidimensional, usando algoritmo de Free Fem++, facilitara obtener la solución de dicha ecuación diferencial parcial.</p>	<p>Variable dependiente: Espacios de Sobolev.</p> <p>Variable independiente: Variable espacio – temporal: $(x, y, t) \in \Omega \times (0, T)$</p> <p>Definición de concepto:</p> <p>Los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$ es definida se la siguiente manera $H^1(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se definen de la siguiente manera. Sea $\Omega \subset R^2$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1, \infty >$. se define $W^{k,p} = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega), \forall \alpha \leq k\}$</p> <p>Para $1 \leq p < \infty$ la norma $\ \cdot\ _{k,p}$ es definida de la siguiente manera</p>	<p>Los indicadores correspondientes a la variable Espacio de Sobolev, son los espacios de Sobolev tipo $H^1(\Omega)$.</p>

	<ul style="list-style-type: none">Determinar la aplicación del método a algunos ejemplos usando el programa Free Fem++		$\ f\ _{k,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq \alpha \leq k} D^{\alpha} f ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$	
--	--	--	--	--



DECLARACION JURADA DE AUTORÍA

Yo, **Guillermo Sucasaire Sucasaire**

Estudiante de la

Facultad:	Ciencias		Educación		Ingeniería	
Escuela Profesional:						
Departamento Académico:						
Escuela de Posgrado	Maestría			Doctorado		X

Programa: **MATEMÁTICA**

De la Universidad Nacional del Santa; Declaro que el trabajo de investigación intitulado:

“METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNA FORMULACION VARIACIONAL DE UNA EDP LINEAL TIPO ELIPTICO, ASOCIADO A LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE BIDIMENSIONAL, USANDO ALGORITMO DE FREE FEM++”

presentado en **61** folios, para la obtención del Grado académico:

Título profesional:	()	DOCTORADO EN MATEMÁTICA	(X)
---------------------	-----	--------------------------------	--------------

- He citado todas las fuentes empleadas, no he utilizado otra fuente distinta a las declaradas en el presente trabajo.
- Este trabajo de investigación no ha sido presentado con anterioridad ni completa ni parcialmente para la obtención de grado académico o título profesional.
- Comprendo que el trabajo de investigación será público y por lo tanto sujeto a ser revisado electrónicamente para la detección de plagio por el VRIN.
- De encontrarse uso de material intelectual sin el reconocimiento de su fuente o autor, me someto a las sanciones que determinan el proceso disciplinario.

Nuevo Chimbote, 17 de Agosto de 2023

Firma:

Nombres y Apellidos: **Guillermo Sucasaire Sucasaire**

DNI: 42050079

Excluir citas Activo
Excluir bibliografía Activo

Excluir coincidencias < 15 words