UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSGRADO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA

Soluciones Polinómicas aproximadas de Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales en dos Variables Independientes en el Espacio de Sobolev

Tesis para obtener el Grado de Doctor en Matemática

Autor:

Ms. Marquina Alvarado, Carlos Alfonso

Asesor:

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milcíades
DNI. N° 18162818
Código ORCID. 0000-0003-4939-7734

Línia de Investigación
Matemática Teórica

Nuevo Chimbote - PERÚ
2022

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO

Yo, Cortez Gutiérrez, Milton Milciades;

Mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis de Doctorado titulada:

Soluciones Polinómicas Aproximadas de Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales en Dos Variables Independientes en el Espacio de Sobolev.

Elaborado por el Autor,

Marquina Alvarado, Carlos Alfonso;

Para optar el Grado de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, setiembre del 2022

....
Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
ASESOR
DNI. 18162818
Código: ORCID. 0000-0003-4939-7734

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

Soluciones Polinómicas Aproximadas de Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales en Dos Variables Independientes en el Espacio de Sobolev.

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

....

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
PRESIDENTE
DNI. 32966495
Código: ORCID.0000-0002-3198-831X

....

Dr. Teodoro Moore Flores
SECRETARIO
DNI. 32763522
Código: ORCID.0000-0002-1755-3459

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
VOCAL
DNI. 18162818
Código: ORCID.0000-0003-4939-7734

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los quince días del mes de setiembre del año 2022, siendo las 09:00 horas, en el aula multimedia N° 01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 116-2022-EPG-UNS de fecha 20 de mayo de 2022, conformado por los docentes: Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Vocal), con la finalidad de evaluar la tesis titulada: ***SOLUCIONES POLINÓMICAS APROXIMADAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO LINEALES EN DOS VARIABLES INDEPENDIENTES EN EL ESPACIO DE SOBOLEV,*** presentado por el tesista **Carlos Alfonso Marquina Alvarado**, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 463-2022-EPG-UNS de fecha 05 de setiembre de 2022.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como: APROBADO asignándole la calificación de: DIECINUEVE

Siendo las 11.00 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Presidente

Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario

Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
Vocal

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Carlos Marquina Alvarado
Título del ejercicio:	Investigaciones diversas
Título de la entrega:	SOLUCION POLINOMICA APROXIMADA DE UNA ECUACION DI...
Nombre del archivo:	Informe_de_Tesis_-_Doctorado_en_Matematica_1.pdf
Tamaño del archivo:	844.38K
Total páginas:	48
Total de palabras:	9,444
Total de caracteres:	40,358
Fecha de entrega:	30-ago.-2022 11:05p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1889823130

CAPITULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACION

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), es aquella área de la matemática que, desde el punto de vista moderno, tienen una más clara motivación en las aplicaciones porque muchos problemas de las ciencias aplicadas y la ingeniería están descritos por estas ecuaciones que implican funciones desconocidas que dependen de al menos dos variables independientes.

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, se encuentran en una posición central porque ellas modelan una gran variedad de fenómenos complejos, tales como: Movimiento, difusión, oscilaciones de cuerdas elásticas, vibraciones de vigas o membranas, transmisión de calor, entre otros, donde debido a la presencia de términos no lineales, las funciones involucradas no tienen derivadas clásicas, lo que afecta notoriamente la existencia de solución unica, razón por la cual se recurre a funciones con derivadas en el sentido de las distribuciones, derivadas que permiten tratar el estudio de las EDP en espacios de funciones apropiados, tal como son los espacios de Sobolev.

En esta investigación se considera la ecuación no lineal de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) = f(x,y) & en\ \ \Omega \\ u > 0 & en\ \ \Omega \\ u = 0 & en\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

, donde Ω es una región abierta acotada y conexa de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontera $\partial\Omega$.

Ahora como esta es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, nos abocaremos a estudiar la existencia y unicidad de su solución.

1

SOLUCION POLINOMICA APROXIMADA DE UNA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES EN EL ESPACIO DE SOBOLEV

INFORME DE ORIGINALIDAD

20%	20%	2%	1%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net Fuente de Internet	9%
2	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	7%
3	www.cfm.udec.cl Fuente de Internet	1%
4	es.wikipedia.org Fuente de Internet	1%
5	kharidan.com Fuente de Internet	<1%
6	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1%
7	prezi.com Fuente de Internet	<1%
8	eur-lex.europa.eu Fuente de Internet	<1%

FICHA CATALOGRAFICA

Universidad Nacional del Santa

Escuela de Postgrado

TESIS DE DOCTORADO:

TÍTULO: SOLUCIONES POLINOMICAS APROXIMADAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO LINEALES EN DOS VARIABLES INDEPENDIENTES EN EL ESPACIO DE SOBOLEV

Autor : Ms. Marquina Alvarado Carlos Alfonso

ASESOR: Dr. Milton Milcíades Cortez Gutiérrez

1. Solución Polinómica Aproximada
2. Ecuación Diferencial Parcial no Lineal
3. Espacio de Sóbolev

DEDICATORIA

A la memoria de mis queridos padres Alfonso y Herminia, por su abnegación dedicación, amor, cariño y apoyo total con valores morales que influyeron en mi educación y formación profesional.

A mi esposa Irma Margarita y mis queridos hijos Diego y Raúl, a quienes, por su invalorable comprensión, apoyo moral y el tiempo que sacrificaron para realizar y culminar mis estudios de postgrado.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a Dios por haberme iluminado con el entusiasmo y la fuerza para culminar este trabajo. Asimismo, agradezco de manera muy especial a mi asesor, Dr. Milton Milcíades Cortez Gutiérrez por aceptarme realizar este trabajo bajo su dirección, su apoyo, sugerencias y el tiempo dedicado que ha sido un aporte invalorable.

A la plana Docente del Programa Doctoral de la Universidad Nacional del Santa que no escatimaron esfuerzo, tiempo, dedicación y desprendimiento personal y profesional lo que permitió hacer realidad el presente grado obtenido.

CARLOS ALFONSO

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tuvo como objetivo fundamental estudiar la existencia y la unicidad de la solución polinómica aproximada de una ecuación diferencial parcial no lineal en dos variables independientes en el espacio de Sobolev. El método utilizado fue deductivo demostrativo, porque permitió elaborar soluciones aproximadas en un espacio de dimensión finita, hacer las estimativas en los espacios de funciones correspondientes, hacer el paso al límite de estas soluciones y utilizando técnicas multiplicativas. Finalmente, bajo apropiadas condiciones y restricciones sobre los datos y utilizando el método de Faedo-Galerkin, y el método estándar de la energía, se demostró la existencia y unicidad de las soluciones polinómicas aproximadas para la ecuación diferencial.

$$\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right) = f(x_1, x_2) \quad en \quad \Omega$$

Palabras claves: Solución polinómica aproximada, ecuación diferencial parcial no Lineal, Método de Faedo Galerkin, método estándar de la energía, Espacios de Sobolev.

ABSTRACT

The main objective of this research work was to study the existence and uniqueness of the approximate polynomial solution of a nonlinear partial differential equation in two independent variables in the Sobolev space. The method used was demonstrative deductive, because it allowed elaborating approximate solutions in a finite-dimensional space, making estimates in the corresponding function spaces, making the passage to the limit of these solutions and using multiplicative techniques. Finally, under appropriate conditions and restrictions on the data and using the Faedo-Galerkin method, and the standard energy method, the existence and uniqueness of the approximate polynomial solutions for the differential equation were proved.

$$\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right) = f(x_1, x_2) \quad en \quad \Omega$$

Keywords: Approximate polynomial solution, differential partial not linear stationary equation, method Faedo-Galerkin, standart method of the energy, Sobolev space.

Índice General

CAPITULO III

MARCO METODOLOGICO

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSION

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

INTRODUCCIÓN

Aunque la importancia de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) ha sido reconocida desde hace varios años entre los temas de la aplicación de la matemática, el aumento de la complejidad de la tecnología actual requiere que matemáticos, ingenieros y científicos conozcan el tema. Es tal la influencia de las EDP que se puede afirmar que no hay rama de las ciencias que no las utilice. El éxito de las EDP radica en su capacidad de modelar una enorme variedad de fenómenos físicos, químicos, biológicos, de la ingeniería, de la economía, etc. Mas aun, las EDP no solo son importantes por sus aplicaciones, sino que tienen importancia en sí mismas y son objeto de exhaustiva investigación científica hoy por hoy.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales puede describirse como una relación donde aparece una función incógnita $u = u(x\,,t)$ de una o más variables independientes.

$$G\left(x\,,t\,,u\,,u_{x_1}\,,u_{x_2}\,,\ldots\,,u._{x_n},.\ .\ .\ ,u_{x_1^{m_1}\,x_2^{m_2}\,..\ .\ .\ x_n^{m_n}} \right) = 0 \qquad (1)$$

, donde $u = u(x\,,t\,)$ depende de la variable espacial $x = (\,x_1\,,x_2\,,.\ \ .\ \ .,x_n)\epsilon\mathbb{R}^n$ y la variable tiempo t. La ecuación (1) establece una relación entre la función incógnita u, sus derivadas parciales y los puntos $(x\,,t)$.

Las EDP de segundo orden, que expone los conocimientos que consideramos básicos para el estudiante de ciencias o de ingeniería, pueda entender sin grandes problemas, son las ecuaciones clásicas, que modelan el problema calor, de onda y de Laplace.:

1. Ecuación de calor: $u_{t\,\_}\ \Delta u =$
2. Ecuación de calor: $u_{t\,\_}\ \Delta u = 0$
3. Ecuación de Laplace: $-\Delta u + u = 0$

Estos tres ejemplos, y con desarrollos de mayor sofisticación permitirán estudiar las EDP de segundo orden lineales e incluso algunos problemas no lineales.

En este trabajo de tesis se estudia la existencia y unicidad de solución polinómica aproximada de ecuación estacionaria de calor, modelada por:

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) = f(x\,,y) \qquad (2)$$

, donde $u = u(x\,,y\,,t)$ es la función incógnita y representa la transmisión de calor en un punto $(x\,,y\,,t)$ de una región $\Omega\epsilon\mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ es una fuente de calor interna.

Esta ecuación (2), modela el flujo de calor en estado estacionario en una región plana o bien problema que se relacionan con potenciales gravitacionales, potenciales electrostáticos, potenciales de flujo de fluidos incomprensibles, etc.

La estructura de la presente investigación, es la siguiente:

Capitulo I. Comprende Planteamiento y fundamentación del problema de investigación, Antecedentes de la investigación, formulación del problema de investigación, delimitación del estudio, justificación e importancia de la investigación objetivos de la investigación.

Capitulo II. Se expone el marco teórico, fundamentos teóricos de la investigación, así como el marco conceptual necesarios para el desarrollo del trabajo de investigación.

Capitulo III. Se formula la hipótesis de investigación, variables e indicadores de investigación, el método y el diseño de la investigación, así como también la población y muestra del estudio realizado.

Capitulo IV. Se presenta los resultados y discusión de la investigación realizada: Prueba de resultado de existencia de solución polinómica aproximada y prueba de resultado de unicidad de la solución polinómica aproximada del problema planteado.

Capitulo V. Se enuncia las conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación.

Al final del trabajo se encuentra las referencias bibliográficas de libros y artículos científicos que se relacionan y que se han tomado en cuenta para la investigación.

CAPITULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACION

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), es aquella área de la matemática que, desde el punto de vista moderno, tienen una más clara motivación en las aplicaciones porque muchos problemas de las ciencias aplicadas y la ingeniería están descritos por estas ecuaciones que implican funciones desconocidas que dependen de al menos dos variables independientes.

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, se encuentran en una posición central porque ellas modelan una gran variedad de fenómenos complejos, tales como: Movimiento, difusión, oscilaciones de cuerdas elásticas, vibraciones de vigas o membranas, transmisión de calor, entre otros, donde debido a la presencia de términos no lineales, las funciones involucradas no tienen derivadas clásicas, lo que afecta notoriamente la existencia de solución única, razón por la cual se recurre a funciones con derivadas en el sentido de las distribuciones, derivadas que permiten tratar el estudio de las EDP en espacios de funciones apropiados, tal como son los espacios de Sóbolev.

En esta investigación se considera la ecuación no lineal de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2\right) = f(x, y) & en \quad \Omega \\ u > 0 & en \ \Omega \\ u = g & en \ \partial\Omega \end{cases}$$

, donde Ω es una región abierta acotada y conexa de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, y con frontera $\partial\Omega$.

Ahora como ésta es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, nos abocaremos a estudiar la existencia y unicidad de su solución.

1.2 Antecedentes de la investigación

Durante las tres últimas décadas hasta la fecha se estudia con bastante interés problemas que implican ecuaciones diferenciales parciales no lineales, sobre dominios abiertos, acotados Ω de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, con condiciones de frontera de diversas ramas de la ciencia, tal como: física, química, biología, ingeniería, etc. En particular el estudio del fenómeno físico de transmisión estacionaria de calor por conducción, modelado por la ecuación lineal,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \alpha^2 \Delta u(x,t) + F(x,t) \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

, donde α^2 es la difusividad térmica (constante), y se ha obtenido soluciones analíticas mediante diferentes métodos conocidos,

Una simple modificación de (1), conduce a la conocida ecuación lineal de Poisson

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Q(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Donde, $u(x,y)$ es la temperatura, K_x y K_y son las conductividades en las direcciones,

$x - y$, y no son constantes pues dependen de la función temperatura.

Morales (2,015), en su tesis de doctorado; Existencia y Unicidad de solución de una ecuación no lineal de tipo elíptico,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -f(x,y) \quad en \ \Omega \qquad (3)$$

, demuestra la existencia única de la solución de la ecuación (3).

1.3 Formulación del problema de investigación

Sea Ω una placa o lamina delgada del plano $\mathbb{R}^2$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, se plantea la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal,

$$\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) = f(x, y) \quad en \quad \Omega \qquad (1.1)$$

, donde la función u no varia con el tiempo, por lo que sólo es función de $(x , y) \epsilon\, \Omega$,

$$u(x,y) > 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \qquad (1.2)$$

, y además la condición siguiente,

$$u(x, y) = g(x,y) \qquad \text{en } \partial\Omega \text{ la frontera de } \Omega \qquad (1.3)$$

Formulación del problema

¿Existe una única Solución Polinómica Aproximada para el problema (1.1) – (1.3) en el espacio de Sobolev?

Es decir, se limita nuestra atención a la existencia y unicidad del modelo no lineal de transmisión estacionaria de calor, representada en forma breve por el sistema:

$$\begin{cases} -\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)\right] = f & en \ \Omega \quad (1.1) \\ u > 0 & en\ \Omega \quad (1.2) \\ u = g & en\ \partial\Omega \quad (1.3) \end{cases}$$

, donde Δ denotará el laplaciano con $\Delta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, Ω es un conjunto abierto convexo del plano y $u|_{\partial\Omega} = g$ es la función valuada en la frontera de Ω, y que para la cual no se puede aplicar métodos conocidos, como: separación de variables, diferencias finitas, elementos finitos, o series y transformadas de Fourier, etc.

1.4 Delimitación del estudio

El presente trabajo de investigación se ha centrado fundamentalmente en los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$, los espacios de las distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$, los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, los espacios de las funciones de prueba $\mathcal{D}((\Omega)$, y el algebra de polinomios en dos variables independientes, $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$.

1.5 Justificación e importancia de la investigación

La justificación del presente trabajo de investigación radica que la ecuación (1.1), modela la transmisión estacionaria de calor por conducción, es uno de los modelos más relevantes que se expresa mediante EDP. Así, la ecuación de calor modela no solo el proceso físico de transmisión de calor por conducción, sino también el fenómeno químico de difusión, o el fenómeno biológico de movimiento browniano, etc.

Esta investigación tiene una importancia teórica y práctica, puesto que los resultados obtenidos pueden ser aplicados por especialistas en otras ramas de la ciencia, cuyos trabajos se relacionen con este estudio.

1.6 Objetivos de la investigación

Objetivo General

Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones polinómicas aproximadas del problema (1.1) -(1.3)

Objetivos Específicos

1. Demostrar la existencia de solución polinómica aproximada del problema (1.1) - (1.3)
2. Demostrar la unicidad de solución polinómica aproximada del problema (1.1) - (1.3).

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

En esta sección se presenta definiciones, propiedades y resultados apropiados que se utilizó, en la demostración de existencia y unicidad de solución polinómica aproximada de la EDPNL.

2.1.1 Espacios de funciones continuas

Definición 1. (***Soporte de una función***)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función real. El Soporte de f, denotado $\mathrm{Supp}(f)$, es la clausura del conjunto $\{ x\epsilon\Omega \ / \ f(x) \neq 0 \}$. Es decir, el soporte de f es el complemento del conjunto abierto más grande donde f se anula, lo que se representa, como: $Supp(f) = \overline{\{ x\epsilon\Omega \ \ f(x) \neq 0 \}}^{\Omega}$.

Ejemplo 1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & si \ \ |x| < 1 \\ 0 & si \ \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

, donde $Supp(f) = [-1\,, 1\,]$

Definición 2. (*Funciones de Prueba*)

Las funciones test o funciones de prueba, son funciones de decrecimiento rápido, es decir, tienden a cero más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio.

Definición 3. (***Espacio de funciones de prueba***)

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, el espacio de las funciones de prueba se denota $\mathcal{D}(\Omega)$, y define por:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi\colon \Omega \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ / \ \varphi\epsilon\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega), \ (\varphi_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \longrightarrow 0 \ \}$$

, donde $\mathcal{C}_0^\infty$ con la noción de convergencia es un espacio vectorial.

Este espacio se compone de funciones "que se comportan bien", lo que permite en particular la definición generalizada y de cualquier orden de la derivada en el caso de las distribuciones.

Definición 4. (Espacio de funciones acotadas)

a) Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Se denota $\mathcal{C}^0(\Omega)$, el espacio de todas las funciones continuas φ, definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$, y define como: $\mathcal{C}^0(\Omega) = \{ \varphi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \varphi \text{ es continua en } \Omega \}$

b) Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Se denota con $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, el espacio de todas las funciones continuas que son acotadas y uniformemente continuas en Ω, y define por:

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) = \{ \varphi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,/ \varphi \text{ es acotada y uniformemente continua en } \Omega \}$$

. donde $\overline{\Omega}$ es la clausura de Ω, esto es, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

c) El conjunto $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$, denota el algebra de todos los polinomios en las coordenadas x_1 y x_2 (o variables independientes x_1 , x_2).

Teorema 1 (Teorema de Stone-Weierstrass

Toda función de $C^o(\overline{\Omega})$ puede ser aproximada por polinomios en $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$

Demostración Ver en (Young: 2, 006)

Definición 5. (Funcional Lineal)

Se llama Funcional lineal, a una función numérica f, definida sobre un espacio vectorial. Un funcional no es más que una función definida sobre un espacio de funciones, tal como, $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$,un funcional lineal. Se dice que T es un funcional continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, si y sólo si, $\forall \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$, entonces: $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ (convergencia puntual)

Definición 6. (Espacio Dual)

Sea E un espacio topológico, dotado de las operaciones de la adición y la multiplicación por números. El espacio dual de E, denotado E^*, está conformado por todas las funcionales lineales continuas, definidas sobre el espacio topológico lineal E, es decir:

$$E^* = \{ f \epsilon E \,/\, f \text{ es funcional lineal continua} \}$$

Además, en el espacio dual E^* se puede definir diferentes topologías.

Definición 7. (Espacio Dual a un espacio normado)

Para funcionales lineales continuas, definidas sobre un espacio normado, se introduce el concepto de **norma,** definida por**:**

$$\| \boldsymbol{f} \| = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{| f(x) |}{\| x \|}$$

Esta norma verifica todas las condiciones contenidas en la definición de espacio normado, es decir:

1) $\| f \| \geq 0$, para cualquier funcional lineal no nula f.

2) $\| \alpha f \| = |\alpha| \|f\|$

3) $\|f_1 + f_2\| = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{| f_1 + f_2 |}{\| x \|} \leq \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{| f_1 |}{\| x \|} + \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{| f_2 |}{\| x \|} \leq \| f_1 \| + \| f_2 \|$

Teorema 2. El espacio dual (E^* , $\| . \|$) es completo.

Demostración Ver en (Kolmogorov: 1,975)

2.1.2 Espacios de Banach

Entre los espacios topológicos lineales constituyen una clase importante los espacios normados. La teoría de estos espacios fue desarrollada por Stefan Banach y otros autores. Acá haremos una breve introducción de estos espacios.

Definición 8. (Espacio vectorial normado)

Se dice que V, es un **Espacio Normado,** si existe una función $\| \ . \ \| : \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $x , y \epsilon V$ se satisface lo siguiente:

1) $\| x \| \geq 0 \ \ y \ \ \| x \| = 0$, si y sol si $x = 0$ (Positividad)

2) $\| \alpha x \| = \ |\alpha| \| x \|$ para cualquier $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ (Cambio de escala)

3) $\| x + y \| \leq \ \| x \| + \ \| y \|$ (Desigualdad triangular)

Un espacio vectorial normado V, se denota mediante el par $(V , \ \| . \|)$. La norma de un elemento $x \epsilon V$ se denota con el simbolo $\| x \|$.

Definición 9. (Distancia entre dos puntos)

La distancia que separa x y y, se denota y define como: $d(x , y) = \ \| x - y \|$.

Es evidente que todo **espacio normado** es un **espacio métrico**, si para cualesquiera dos elementos $x, y \epsilon V$ se cumple que: $d(x , y) = \| x - y \|$

Ejemplos de espacios normados

1. En el espacio $\mathcal{C}_{[a , b]}$ de funciones continuas sobre el intervalo $[a , b]$ si se define la norma mediante: $\| f \| = \ \underset{a \leq t \leq b}{\text{Max}} | f(t) |$, en donde la distancia correspondiente a esta norma es, $d(f) = \ \underset{a \leq t \leq b}{\text{Max}} | f \ (t)|$.

2. Sea ⍰ un espacio de sucesiones numéricas acotadas, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

   Si se define, $\| x \| = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} | x_n |$, entonces las condiciones 1), 2) y 3) de la definición de norma se satisfacen.

Definición 10. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio normado**.** Se dice que X es, un espacio completo**,** si, toda sucesión de Cauchy en X es convergente, es decir:

$$\forall (x_n) \subseteq X : \lim_{n,m \to \infty} \| x_n - x_m \| = 0 \implies \exists \lim_{n \to \infty} x_n = x \epsilon X$$

Definición 11. (Espacio de Banach)

Se dice que, X es un espacio de **Banach,** si X es un espacio normado completo.

Definición 12. (Operador Lineal)

Sea X, Y dos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$. Un **Operador Lineal** T, es una función, $T: X \longrightarrow Y$, tal que para $x, z \epsilon X$ y α, β escalares se cumple que: $T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$.

Definición 13. Sean X, Y dos espacios vectoriales normados. Un **Operador Lineal,** $T: X \longrightarrow Y$ es **Acotado** si existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\| Tx \|_Y \leq M \| x \|_X \text{ , para todo } x \epsilon X.$$

Teorema 3. Un operador lineal es **acotado** si, y solo si, él es continuo.

Demostración Ver en (Kolmogorov: 1,975)

Definición 14. (***Inmersión de espacios***)

Sea X, Y dos espacios normados. Se dice que X está inmerso continuamente en Y, lo que se denota, $X \hookrightarrow Y, si$:

1) X es un subespacio vectorial de Y

2) El operador identidad I definido sobre X es continuo.

Definición 15. (***Producto escalar o producto interno***)

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo K. El **producto escalar** o **producto interno** definido sobre X es la aplicación $\langle\, .\ ,\ .\rangle : X \times X \longrightarrow K$ tal satisface los siguientes axiomas:

1) $\langle u + v , w \rangle = \langle u , w \rangle + \langle v , w \rangle$ $, \forall\, u , v , w \in X$ (Aditiva)

2) $\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$, $\forall\, u, v \in X$ y todo $\alpha \epsilon K$ (Homogénea)

3) $\langle u , v \rangle = \langle \overline{v , u} \rangle$, $\forall u , v \in X$ (Hermítica)

4) $\langle u , u \rangle \geq 0$ y $\langle u , u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$ (Positiva

Definición 16. (**Sucesión Convergente**)

Una sucesión $\{f_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ en un espacio normado V, se dice que **Converge** a un elemento f, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $N\epsilon\mathbb{N}$ tal que sí, $n > N$ se cumple que: $\| f - f_n \| < \varepsilon$.

Si f_n converge a f, entonces escribimos: $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ o $f_n \longrightarrow f$.

2.1.3 Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 17. (Exponentes Conjugados)

Sean $p , q \in [1, \infty)$, se dice que p y q son exponentes conjugados si, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definición 18. (Espacio $L^p(\Omega)$)

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. El espacio de todas las clases de equivalencia de funciones medibles f definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$, se denota y define por

$$\mathrm{L^p}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \ / \int_{\Omega} |\ f(x)\ |^p d\mu < \infty \right\}$$

Definición 19. (Norma en $\boldsymbol{L^p}(\Omega)$)

Para todo elemento $f\epsilon\ \boldsymbol{L^p}(\Omega)$ **. La norma** en $L^p(\Omega)$ se denota y define por**:**

$$\| \boldsymbol{f} \|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega | \boldsymbol{f(x)}|^{\boldsymbol{p}}\ \boldsymbol{d\mu} \right]^{\frac{1}{p}}$$

, siempre que $p < \infty$.

En el caso que $p = \infty$, entonces $L^\infty(\Omega)$, denota el espacio de funciones medibles f que son esencialmente acotadas: La norma en $L^\infty(\Omega)$, se denota y define como:

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = Inf\{\ C\ /\ | u(x)| \leq C\ ,\ \ c.s\ en\ \Omega\ \}$$

, donde $c.s$ significa casi siempre en Ω.

Proposición 1.

1) Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de **Banach**, cuya norma es:

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega | u(x)|^p\ dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

2) Si $p = 2$, entonces $L^2(\Omega)$ es un espacio de **Hilbert** con producto interno definido por:

$$\langle\ u\ ,v\ \rangle = \int_\Omega\ u(x)v(x)dx \text{ y la norma: } \| u \|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega | u(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Demostración Ver en (Brezis:1,987)

Proposición 2. (Desigualdad integral de Hölder)

Si $u\epsilon L^p(\Omega)$ y $v\epsilon L^q(\Omega)$ donde $p\ y\ q$ son exponentes conjugados, con $1 \leq p \leq \infty$, $fg\epsilon\ L^1(\Omega)$, entonces se cumple que:

$$\int_\Omega | uv | \leq \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración Ver en (Gatica: 2,011)

Teorema 4. (Desigualdad de Minkowski)

Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\| u + v \|_{L^p(\Omega)} \leq \| u \|_{L^p(\Omega)} + \| v \|_{L^q(\Omega)}$

Teorema 5. $L^p(\Omega)$ es un espacio separable para $1 \leq p < \infty$

Teorema 6. (Teorema de la representación de Riesz)

Si $\varphi \epsilon \left(L^p(\Omega)\right)'$, p y q son exponentes conjugados con, $1 \leq p < \infty$, entonces existe una única, $u \epsilon L^q(\Omega)$, tal que:

$$\langle u , v \rangle = \int_\Omega u(x) v(x) dx , \forall v \epsilon L^p(\Omega) \; y \; \| u \|_{L^q(\Omega)} = \| \varphi \|_{\left(L^p(\Omega)\right)'} .$$

Demostración Ver en (Brezis: 1,987)

2.1.4 Teoría de las Distribuciones

En análisis funcional, una **distribución** o ***función generalizada*** se dice que es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida. Además, la noción de distribución sirve para *extender* el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a entes aún más generales.

Definición 20. (Conjunto Continuamente Compacto)

Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto no vacío, entonces se dice que G es continuamente compacto en Ω, lo que se denota, $G \Subset \Omega$, si $\bar{G} \subset \Omega$ y además $\bar{G}$ es compacto.

Definición 21. (Sucesión Convergente)

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Una sucesión de funciones, $\{\phi_j\}_{j \epsilon \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ se dice que, **converge** a la función $\phi \epsilon\, C_0^\infty(\Omega)$ si satisface las siguientes condiciones:

i) Existe $K \Subset \Omega$ tal que: $Supp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j.

ii) $\lim\limits_{j \to \infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para cada $\alpha \epsilon \mathbb{N}^n$.

Definición 22. (Espacio de Distribuciones)

El espacio de distribuciones sobre Ω, se denota, $\mathcal{D}'(\Omega)$ o $\mathcal{D}^*(\Omega)$ y define mediante:

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{\, T\colon\ \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{N} \,/\, T\ es\ lineal\ y\ continua \,\}$$

Así para $S, T \epsilon\ \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ y $\phi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$ se cumple lo siguiente:

i) $(\, S + T\,)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$

ii) $(\,\alpha\, T)(\phi) = \alpha\, T(\phi)$

Definición 23. (Convergencia en el sentido de las distribuciones)

Se dice que, una sucesión $\{\, T_n \,\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge en el sentido de las distribuciones a $T\epsilon\ \mathcal{D}'(\Omega)$, si $T_n(\phi) \longrightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{R}$ para toda $\phi\epsilon\mathcal{D}(\Omega)$**.**

Una función u definida en casi todas partes (c.t.p) en Ω, se dice que es localmente integrable en Ω y de denota con $u\epsilon L^1_{loc}(\Omega)$, si $u\epsilon L^1(\mathcal{U})$ para cada abierto $\mathcal{U}\Subset\Omega$.

Ejemplo 1. Sea $u\epsilon L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el funcional definido por:

$$T_u(\Omega) \coloneqq \int_\Omega u(x)\phi(x)dx \text{ , para } \phi\epsilon\mathcal{D}(\Omega), \qquad \text{(A)}$$

es una distribución. Demuestre que T_u es lineal.

Solución:

ϕ_1 , $\phi_2 \epsilon\ \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta\epsilon\mathbb{C}$, entonces:

$$T_u(\,\phi_1 + \beta\phi_2) = \int_\Omega u(x)(\,\phi_1 + \beta\phi_2)(x)dx$$

$$= \int_\Omega u(x)\left(\,\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)\right)dx$$

$$= \int_{\Omega} u(x)\phi_1(x)dx + \beta \int_{\Omega} u(x)\phi_2(x)dx$$

$$= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2)$$

Por lo tanto T_u es lineal.

Observación: Debe tenerse presente que, no todas las distribuciones $T\epsilon\, Ɗ'(\Omega)$ tienen la forma dada en (A) (ejemplo 1, para algún $u\epsilon L^1_{loc}(\Omega)$.

En efecto, sea $\delta : Ɗ(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $\delta(\phi) = \phi(0)$, para toda $\phi\epsilon Ɗ(\Omega)$.

Sean $\phi_{1\,,}\ \phi_2\epsilon\, Ɗ(\Omega)$ y $\beta\epsilon\mathbb{C}$, entonces:

$$\delta(\phi_1 + \beta\phi_2) = (\phi_1 + \beta\phi_2)(0) = \delta(\phi_1) + \beta\delta(\phi_2)$$

Por lo tanto, es lineal.

Por otro lado, si $\{\phi_j\}_{j\epsilon\mathbb{N}}$ es una sucesión en $Ɗ(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow \phi$ en el sentido $Ɗ(\Omega)$, entonces existe $K \Subset \Omega$ tal que el $Supp \subset K$ para cada j y

$\lim\limits_{j \to \infty} D^{\alpha}\phi_j(x) = D^{\alpha}\phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α. Por lo tanto: $\left|\delta(\phi_j) - \phi(\phi)\right| = \left|\phi_j(0) - \phi(0)\right| \longrightarrow 0$, cuando $j \longrightarrow \infty$.

Consecuentemente, $\delta\epsilon\, Ɗ'(\Omega)$.

Pero se comprueba que, $\delta(0)$ es una distribución que no satisface(A). En efecto supóngase que $\delta(0)$ satisface (A), entonces existe una función $u\epsilon L^1_{loc}(\Omega)$ de tal manera que:

$$\phi(0) = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \text{ para todo } \phi\epsilon Ɗ(\Omega). \qquad \text{(B)}$$

Considérese la función prueba ϕ_a, definida por:

$$\phi_a(x) = \begin{cases} e^{\frac{a^2}{\| x \|^2 - a^2}} , si \ \|x\| < a \\ 0 \quad , \quad si \ \|x\| > a \end{cases}$$

Con $a > 0$, notamos que:

$$\phi_a(0) = e^{-1} > 0$$

$$|\phi_a(x)| \leq e^{-1}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)||\phi_a(x)| dx$$

$$= \int_{\|x\|<a} |u(x)||\phi_a(x)| dx$$

$$\leq \int_{\|x\|<a} |u(x)|\, e^{-1} dx$$

$$\leq e^{-1} \int_{\|x\|<a} |u(x)| dx$$

$Si\ u$ es localmente integrable entonces $\lim\limits_{a \to 0} \int_{\|x\|<a} |u(x)| dx = 0$, lo cual contradice (B).

Definición 24. (α-ésima derivada distribucional)

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $T \epsilon \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribucion. Si α,es un multi-índice, entonces la α-ésima derivada de T, denotada $D^\alpha T$ se define por:

$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)$, para todo $\phi \epsilon \mathcal{D}'(\Omega)$

Ejemplos

1. Si $0 \epsilon \Omega$ y $\delta \epsilon \mathcal{D}'(\Omega)$ es la distribución de Dirac, entonces, $D^\alpha \delta$ esta dada por,

$$D^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(0)$$

2. Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \epsilon L^1_{loc}(\Omega)$ es la función de Heaviside definida por,

$$H(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \geq 0 \\ 0 \ , & x < 0 \end{cases}$$

Hallar la derivada H' en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solución:

Sea $\phi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$ con soporte compacto en $[-a \,, a\,]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(\,T_H\,)'\phi &= (-1)^{|\,\alpha\,|}\, T_H(\,\phi'\,) \\
&= -\,T_H(\,\phi'\,) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-a}^{a} H(x)\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} H(x)\phi'^{(x)}dx - \int_{0}^{a} H(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{0}^{a} H(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{0}^{a} \phi'(x)dx \\
&= -\phi(x)|_{0}^{a} \\
&= -\big(\phi(a) - \phi(0)\big) \\
&= \phi(0) \\
&= \delta(\phi)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(T_H)'$ es la distribución de Dirac por lo que $(T_H)'$ es una distribución.

Definición 25. (α-ésima derivada débil)

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $u\epsilon L_{loc}^1(\Omega)$ y α un multi-índice. Si existe una función $v_a \epsilon L_{loc}^1(\Omega)$ tal que:

$$T_{v_a}(\phi) = D^\alpha T_u(\phi) \text{ para todo } \phi\epsilon\mathcal{D}(\Omega),$$

, entonces v_a se llama $\boldsymbol{\alpha}$-ésima derivada débil de T_u**.**

2.1.5 Espacio de Sóbolev

Un espacio de Sóbolev, está conformado por funciones reales o complejas de varias variables, integrables en el sentido de Lebesgue y diferenciables en el sentido de las distribuciones, es decir, débilmente diferenciables. La estructura vectorial de los espacios de Sóbolev está íntimamente ligada al espacio de Lebesgue L^p. (Figueroa:1986).

Definición 26. (Espacio de Sóbolev de orden m)

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ y m un número entero positivo. Un espacio de Sóbolev de orden m sobre $\boldsymbol{\Omega}$, se denota $W^{m,p}(\Omega)$, y define por:

$$\mathrm{W}^{\mathrm{m},\mathrm{p}}(\Omega) = \{ \mathrm{u}\epsilon\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\Omega) \;/\; \mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{u}\epsilon\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\Omega), \forall\alpha\epsilon\mathbb{N} ,\ \text{con} \mid \alpha \mid \leq \mathrm{m} \}$$

, donde D^{α} es la derivada en el sentido de las distribuciones de orden $\mid \alpha \mid \leq m$.

En el caso particular que:

1) $m = 0 \rightarrow W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

2) $m = 1 \rightarrow W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;/\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ ,\ \forall\, i : 1 \leq i \leq n \right\}$

3) $m = 2 \rightarrow W^{2,p}(\Omega) = \left\{ u\epsilon L^p(\Omega) \;/\; \frac{\partial u}{\partial x_k} \epsilon L^p(\Omega) ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon L^p(\Omega) , \forall\, i , j , k \epsilon \mathbb{N}^n \right\}$

4) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $0 \leq m - \frac{n}{p} - k < 1$

Observación:

1) $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

Definición 27. (Norma en $\mathbf{W}^{\mathbf{m},\mathbf{p}}$ (Ω))

Para $u\epsilon W^{m,p}(\Omega)$, la Norma para u, denotado $\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}$ es el funcional,

$$\| u \|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} , donde\ 1 \leq p < \infty$$

De esta manera $W^{m,p}(\Omega)$ es: un espacio normado, $\| u \|_{m,p} \geq 0$, además si $\| u \|_{m,p} = 0$ entonces implica que:

$$\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

, y en consecuencia $\| D^{\alpha} u \|_m^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. En particular para $\alpha = 0$ se tiene que: $\| D^{\alpha} u \|_p^p = \| D^{0} u \|_p^p = \| u \|_p^p = 0$, lo cual implica que $u = 0$.

La homogeneidad de este funcional se verifica, ya que la derivada y la norma satisfacen dicha propiedad:

En efecto:

$$\| \beta u \|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^{\alpha}(\beta u) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| \beta D^{\alpha} u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| |\beta|^p D^{\alpha} u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\beta| \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_m^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

, y además, la desigualdad de Hölder, garantiza que el funcional satisface la desigualdad triangular:

$$\| u+v \|_{m,p} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \| D^\alpha(u+v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \| D^\alpha u + D^\alpha v \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \| D^\alpha u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \| D^\alpha v \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \| u \|_{m,p} + \| v \|_{m,p}$$

Observación:

a) La formulación variacional del problema de Dirichlet-Poisson: $-\Delta u = f$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = 0$ en $\Gamma = \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ frontera de **Ω**), se realiza en el espacio $L^2(\Omega)$.

b) El problema de Dirichlet Poisson correspondiente a, Δ^2 el operador biarmónico se realiza en el espacio $H^2(\Omega)$.

c) Desde el punto de vista del análisis numérico, interesa conocer $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$ para poder construir subespacios de dimensión finita incluidos en ellos

d) Esencialmente las demostraciones para los espacios H^1 y H^2 sirven para los espacios H^m. Por lo demás el delicado problema de la **traza** sobre el borde se ve sobre H^1 y el de la derivada normal o convencional sobre H^2.

Teorema 7. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración Ver en (Medeiros: 1,999)

Proposición 3. Sea α un multi-índice, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ y $D^\alpha u_n \longrightarrow v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$, entonces $v_\alpha = D^\alpha u$.

Demostración Ver en (Medeiros: 1,999)

Teorema 8. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ un número entero y $1 \leq p < \infty$, entonces se tiene:

1) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \epsilon (0, p)$

2) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $[1, \infty)$

Demostración Ver en (Adams: 2,003)

Definición 28. Sea $m \geq 1$ un entero y $1 \leq p < \infty$. $W_0^{m,p}(\Omega)$ es la clausura del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\| \cdot \|_{m,p}}$$

, y cuya norma es:

$$\sum_{|\alpha|=m} | D^{\alpha} u |_p^p = \| W \|_{m,p}^p$$

Teorema 9. (**Desigualdad de Poincaré**)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ bien regular, entonces existe

$C_* > 0$ tal que:

$$\| u \|_p \leq C_* \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \forall u \epsilon W_0^{1,p}(\Omega) \; : 1 < p < \infty$$

$$= \| \nabla u \|_p$$

Si $p = 2$, entonces $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ por el teorema de Poincaré.

$\| u \|_2 \ \leq \| \nabla u \|_2 \ , \ \forall \ u \epsilon H_0^1(\Omega)$.

Demostración Ver en (Brezis:1,987)

Definición 29. (Espacio $\boldsymbol{H^m}(\Omega)$)

Sea $m \epsilon \mathbb{N}$. Se denota con $H^m(\Omega)$ al espacio vectorial de todas las funciones $u \epsilon L^2(\Omega)$ tales que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \ \epsilon L^2(\Omega)$, donde $D^\alpha u$ es la derivada en el sentido de las distribuciones.

Definición 30. (Espacio de Sóbolev $\boldsymbol{H^1}(\Omega)$)

Un espacio de Sóbolev de orden 1 sobre el abierto **Ω**, se denota y define por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \epsilon L^2(\Omega) \ / \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \epsilon L^2(\Omega) \ \ , 1 \leq i \leq n \right\}$$

En $H^1(\Omega)$ el **Producto escalar**, denotado $\langle \ u \ , v \ \rangle_{1 \ ,\Omega}$ se define como:

$$\langle \ u \ , v \ \rangle_{1 \ ,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$$

Asimismo, en $H^1(\Omega)$ la **Norma,** denotada $\| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{1} \ ,\Omega}$ y definida como:

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{1} \ ,\Omega} = \langle \ v \ , v \ \rangle_{1 \ ,\Omega}^{1/2}$$

$\boldsymbol{Teorema\ 10}$. $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar, dado por la definición 30.

Demostración Ver en (Figueroa: 1,986

***Teorema* 11.** $H^1(\Omega)$ es un espacio separable, esto es, existe un conjunto numerable denso en $\boldsymbol{H^1}(\Omega)$.

Demostración Ver en (Figueroa: 1,986)

Definición 31. Sea un entero $m \geq 1$, $[\,1\,,\infty\,)$ y $\boldsymbol{H_0^1}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$**(** subespacio de funciones nulas). Se define, $H_0^1(\Omega)$ como la clausura del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathrm{H}^1(\Omega)$, es decir: $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$

Proposición 4. (Formula de Green) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado bien regular. Si $u\,,v\,\epsilon H^1(\Omega)$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que:

$$\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x_i}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x_i}}\, \boldsymbol{dx} = -\int_\Omega \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x_i^2}}\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dx} + \int_\Gamma \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x_i}} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{\nu_i}$$

, donde $\nu = (\nu_1\,,\nu_2\,,.\;.\,,\nu_n)$ denota el vector normal exterior de Γ. Si $u\epsilon H^2(\Omega)$ y $v\epsilon H^1(\Omega)$, entonces $\int_\Omega \nabla u\,.\nabla v\; dx = \int_\Omega (-\Delta u) v\; dx + \int_\Gamma v\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma$, donde $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada distribucional en la dirección del vector ν

Demostración Ver en (Kesavan: 1,989).

2.2 Marco Conceptual

a) "Un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n\,, n \geq 1$ se dice "**Bien Regular**" si su frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es una variedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión $n-1$, y $\boldsymbol{\Omega}$ está localmente de un mismo lado de $\boldsymbol{\Omega}$".

b) "Cuando una propiedad es válida en un conjunto E excepto en un subconjunto de E con medida nula, se dice que la propiedad se cumple **casi siempre** (c.s)".

CAPITULO III

MARCO METODOLOGICO

3.1 Hipótesis de la investigación

Hipótesis general

Existe una única solución polinómica aproximada del problema (1.1) - (1.3)

Hipótesis específicas

a) Existe una solución polinómica aproximada del problema (1.1) – (1.3)

b) Existe única solución polinómica aproximada del problema (1.1) – (1.3)

3.2 Variables e Indicadores de la investigación

3.2.1 Variables

Variables dependientes

a) La temperatura en un punto (x, y), $u(x, y)$

b) Termino independiente de la ecuación (1.1), $f(x, y) \epsilon L^2(\Omega)$

Variables independientes

a) Variable espacial: $(x , y) \epsilon \Omega$

b) Espacios de funciones: $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$ (algebra de polinomios en x , y.

3.2.2 Indicadores de la investigación

<table>
<tr><th>Variable</th><th>Dimensiones</th><th>Indicador</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$u(x, y)$</td><td>Existencia</td><td>Base en el espacio $H_0^1(\Omega)$
Método de Faedo - Galerkin</td></tr>
<tr><td>Unicidad</td><td>Tomar dos soluciones que satisfacen (1.2)
Método estándar de energía</td></tr>
</table>

3.3 Método de la investigación

El método de la investigación fue deductivo-demostrativo. Para demostrar primero la existencia de soluciones polinómicas aproximadas para ecuaciones diferenciales parciales no lineales en dos variables independientes, que consistió en proyectar el sistema original a espacios de dimensión finita, $W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, se utilizó el método de Faedo-Galerkin; y se hizo el paso al límite de las soluciones aproximadas, mientras que para demostrar la unicidad de la solución polinómica aproximada del mismo sistema se supuso dos soluciones y se aplicó el método estándar de la energía.

3.4 Diseño de la investigación

La presente de investigación corresponde a una investigación básica y cuantitativa, mientras que su finalidad fue producir nuevos conocimientos, para ampliar y profundizar la ecuación (1.2).

El diseño utilizado fue descriptivo demostrativo pues a partir de llevar el problema a un espacio finito dimensional, estudiar el resultado de existencia y unicidad en el espacio proyectado, y luego mediante estimaciones previas, para la solución a un espacio adecuado.

3.5 Población y muestra

Población

La población fue el conjunto de las funciones $u \epsilon L^2(\Omega)$, cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones están generadas por funciones $u_\alpha \epsilon L^2(\Omega)$, es decir, el espacio de Sóbolev orden m.

Muestra

La muestra fue el conjunto de las funciones medibles, $u\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que satisfacen:

$$\int_{\Omega} | u(x) |^p dx < \infty$$

, es decir los espacios de $L^p(\Omega)$,

3.6 Actividades del proceso investigativo

Las actividades se iniciaron con la recopilación y análisis obtenida en textos y revistas especializadas de matemática. Para lograr los objetivos de la investigación se utilizó el método de Faedo.Galerkin, resultados propios del análisis funcional, el algebra de polinomios en dos variables.

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación

Para recabar la información se utilizó la técnica de análisis documental que permitió la búsqueda, análisis, e interpretación de la información registrada por otros investigadores en revistas científicas impresas y electrónicas y que gracias a la confiabilidad brindo el marco conceptual necesario para nuestra investigación.

3.8 Técnicas de procesamiento de análisis de los datos

Puesto que no se contó con datos estadísticos u otros que se puedan requerir mediante observaciones o mediciones de tipo experimental, no se realizó algún tipo de análisis ni. Procesamiento de datos. experimentales

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSION

4.1 Solución polinómica aproximada

En la presente sección se va a demostrar la existencia y la unicidad de la solución polinómica aproximada para el problema (1.1) - (1.3), para lo cual se utiliza el método de Faedo-Galerkin,, porque es el método más apropiado para sistemas que están en presencia de términos no lineales como es él, se presenta en este trabajo. y para la unicidad se utilizará el método estándar de la energía.

4.1.1 Existencia de solución polinómica aproximada

En esta subsección, demostramos la existencia de solución polinómica aproximada del problema ((1.1) -(1.3) mediante el método de Faedo Galerkin, sin pérdida de generalidad, mediante traslación se puede considerar $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Para demostrar la existencia de soluciones polinómicas aproximadas, las funciones f y $g = u|_{\partial\Omega}$, son tales que: $f \epsilon W^{-1,\frac{4}{3}}(\Omega)$ y $g \epsilon W^{\frac{3}{4},4}(\Omega)$, entonces existe una única función, $u \, \epsilon \, W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$ tal que satisface el problema no lineal estacionario:

$$-\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)\right] = f(x_1, x_2) \quad , \qquad u|_{\partial\Omega} \tag{4.1}$$

4.1.2 Prueba de resultado de existencia de solución polinómica aproximada

Supongamos que $v \epsilon W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathrm{P}(\overline{\Omega})$ tal que, $v|_{\partial\Omega} = g$ y $\nabla g = 0$, y además considerando, $v = u - g$ de tal manera que (4.1) se puede escribir en la forma:

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 (v+g)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(v+g)\left|\frac{\partial (v+g)}{\partial x_i}\right|^2\right] = f(x_1, x_2) \ , v\epsilon W^{1,4}(\Omega) \Big\} \quad (4.2)$$

Es decir, se debe resolver el problema de Dirichlet homogéneo de la forma:

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)\right] = f\,(x_1, x_2) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Para por último hacer la sustitución: $u = v + g$

En este sentido planteamos el problema aproximado sobre un espacio finito dimensional sobre el cual hallaremos su solución polinómica aproximada para luego extender vía la densidad de los espacios vectoriales.

Sea, $V_m = [\, w_1, w_2, \ldots, w_m\,]$ el espacio finito dimensional de $H^1(\Omega)$ generado por los m vectores de la base hilbertiana.

Consideremos $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$ una base de $W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathrm{P}(\overline{\Omega}) \subset C^0(\overline{\Omega})$ y con inyección continua. Sin pérdida de generalidad, sea:

$v_m \epsilon \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$, de tal manera que:

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_m \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2\right), w_j \right\rangle = \langle f\,, w_j \rangle \ , \ 1 \le j \le m$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \left(v_m \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2\right), \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f\,, w_j \rangle \ , 1 \le j \le m\,,$$

la cual es una derivada distribucional.

Como $v_m \epsilon \{ w_1 ,\ w_2 ,\ w_3 , . . . ,\ w_m \}$, entonces v_m, es la combinación lineal:

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \text{, } de\ donde\ se\ tiene\ que:$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \left(v_m \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \right), \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f , v_m \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx = \int_{\Omega} f\ v_m dx \ \leq \ \|f\|_{V'} \ \|v_m\|_V \quad , desigualdad\ de\ Holder$$

En donde: $V = W_0^{1,4}(\Omega)$ y $V' = W^{-1,4/3}(\Omega)$

Ahora como:

$$\| v_m \|_V^4 \leq \ \alpha \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx \qquad Desigualdad\ de\ Poincare$$

, entonces: $\| v_m \|_V \leq C.$

Por otro lado, como la función $v \epsilon\ W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, entonces se obtiene

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \ \leq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx \right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^4 dx \right]^{\frac{1}{4}} \qquad Desigualdad\ de\ Holder$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx \right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^4 dx \right]^{\frac{1}{4}} = \ \| v_m \|_{V'}^3 \| v \|$$

, de donde resulta

$$\left| \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_m \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \right) \right| \leq \| v_m \|^3 \ \leq \ C^3 \text{ , } acotada\ con\ C : constante$$

Puesto que V es un espacio reflexivo, entonces existe una sub-sucesión $\{ v_r\}$ de $\{ v_m \}$

tal que: $v_r \;\rightarrow\; u$ débilmente en $W_0^{1,4}(\Omega)$

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r \left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \right) \;\rightarrow\; \gamma \quad , débil\ en\ W^{-1\,,4/3}(\Omega)$$

Pasando al límite cuando $r \;\rightarrow\; \infty$ el problema aproximado se reduce a

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r \left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \right), w_j \right\rangle = \langle\, f\,, w_j\, \rangle$$

$$\langle\, \gamma\,, w_j\, \rangle = \langle\, f\,, w_j\, \rangle \;\;,\;\forall j\,,\; 1 \le j \le m$$

, de donde implica que: $\gamma = f$ (4.4)

Además, se tiene que:

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r \left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \right), v_r \right\rangle = \langle\, f\,, v_r\, \rangle$$

Y pasando nuevamente al límite cuando $r \;\rightarrow \infty$ se obtiene

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r \left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \right), v_r \right\rangle \;\rightarrow \langle\, f\,, u\, \rangle = \langle \gamma\,, u\, \rangle$$

Por otro lado

$$\langle\, A v_r - A v\,, v_r - \; v\, \rangle \ge 0 \;\;, \forall v \epsilon V$$

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r \left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \right) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right), v_r - \; v \right\rangle \ge 0$$

Luego pasando al límite cuando, $r \;\rightarrow\; \infty$ se obtiene

$$\left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right), u - v \right\rangle \geq 0 \, . \ \forall v \epsilon V \qquad (4.5)$$

Haciendo: $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \epsilon V$ y sustituyéndolo en (4.5) se obtiene:

$$\lambda \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 (u - \lambda w)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left((u - \lambda w) \left| \frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i} \right|^2 \right), w \right\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 (u - \lambda w)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left((u - \lambda w) \left| \frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i} \right|^2 \right), w \right\rangle \geq 0$$

Pasando al límite cuando $\lambda \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right), w \right\rangle \geq 0 \ , \forall w \epsilon V$$

$$\gamma = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) \qquad (4.6)$$

Por lo tanto, de (4.4) y (4.6) se concluye que:

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) = f(x_1 , x_2) \qquad (4.7)$$

Así de esta manera se ha demostrado que existe solución polinómica aproximada del problema no lineal estacionario:

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right) = f(x_1, x_2)$$

4.1.3 Unicidad de la solución polinómica aproximada

De manera similar a como se hace con una ecuación diferencial ordinaria, se puede definir un operador asociado a las ecuaciones diferenciales parciales, y se puede distinguir los operadores lineales de los no lineales. Así, por ejemplo, con la ecuación, $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$, se asocia el operador lineal: $Au = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y con la ecuación de Burger, $U_t + u\, u_x = 0$, se asocia el operador no lineal,

$Au = \ u_t + u\, u_x$

En esta subsección planteamos las hipótesis y algunos resultados necesarios para el desarrollo del problema en estudio.

En la prueba de la unicidad de la solución polinómica aproximada se utilizó el método estándar de la energía.

Teorema 1. Sea V un espacio de Banach reflexivo, separable y en donde el operador A, está definido como;

$A : V \rightarrow V'$ tal que se satisface:

i) A es acotado y $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, entonces $\langle A\,(u + \lambda v)\,, w \rangle \epsilon \mathbb{R}$ es continua, esto es:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle A\,(u + \lambda v\,),\ w \rangle = \langle A\,(\,u + \lambda_0 v\,),\ w \rangle$$

ii) A es monótono, es decir: $\langle A\,(\,u + \lambda v\,)\,, w \rangle \geq 0\,,\ \forall\, u\,, v \,\epsilon\, V$

iii) $\frac{\langle Au\ ,\ u \rangle}{\|\, u \,\|} \rightarrow \infty$; donde $\|\, u \,\| \rightarrow 0$ por coercitividad del operador A

Por lo tanto, $A : V \rightarrow V'$ es sobreyectivo, es decir, $\forall\, f \epsilon\, V'$, $\exists\, u \epsilon V$, tal que

$$Au = f$$

Consideremos de nuevo el problema no lineal estacionario (4.1)

$$-\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)\right]=f(x_1,x_2)\quad,\qquad u|_{\partial\Omega}$$

, donde Ω es una región plana convexa, y el primer miembro es un operador diferencial, que lo denotaremos con A, de manera que esta ecuación toma la forma:

$$Au=f \tag{4.8}$$

Para ello supongamos que $u\ y\ v$ son dos soluciones polinómicas aproximadas no nulas y diferentes del problema no lineal estacionario (1.1) – (1.3), entonces se cumplen que:

$$\begin{cases} Au=f & ; \quad u|_{\partial\Omega}=g \\ Av=f & : \quad v|_{\partial\Omega}=g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Au-Av=f-f=0 \\ u|_{\partial\Omega}-v|_{\partial\Omega}=g-g=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Au-Av=u-v$$

O bien: $\langle Au-Av\ ,\ u-v\rangle$ (4.9)

, en donde:

$$Au=-\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)\right] \tag{4.10}$$

Sustituyendo (4.10) en (4.9), se obtiene:

$$\langle Au-Av,u-v\rangle=\langle-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right),u-v\rangle$$

$$=\langle\sum_{i=1}^{2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)\right],u-v\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 - v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right], \frac{\partial}{\partial x_i}(u-v) \rangle$$

Como $u \epsilon W^{1,4}(\Omega) \rightarrow V = W^{1,4}(\Omega)$

Por otro lado,

$$\langle Av - Au, v - u \rangle = \langle Au - f, v - u \rangle + \langle Av - Au, v - u \rangle$$

$$= \langle Av - Au, v - u \rangle \geq 0$$, por ser un operador monótono

Por tanto, se tiene que: $\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0, \forall v \epsilon V$.

Ahora, construyamos un subespacio cerrado E en el espacio V:

$\forall v \epsilon V$, sea la sucesión: $S_v = \{ u \epsilon V : \langle Av - f, v - u \rangle \geq 0 , Au = f \}$

$$E = \bigcap_{v \epsilon V} S_v$$

E es cerrado y convexo, además $E = \{ u \epsilon V / Au = f \}$, es conjunto de soluciones de la ecuación (4.8).

Suponga que la norma en V es la función, $\| \, . \| : V \rightarrow \mathbb{R}$, convexa en forma estricta sobre la esfera unitaria de V y que:

$\| Au \| = \| Av \| \rightarrow \| u \| = \| v \|$ y como u satisface la ecuación (4.8), entonces:

$E \subset \{ u \epsilon V / \|u\| = S , Au = f \}$, para una conveniente S.

Por tanto, el subespacio E se reduce a un conjunto unitario, es decir $u = v$, lo que significa que la solución polinómica aproximada del problema (1.1) -(1.3), es Única.

4.2 DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Con respecto a la hipótesis general de investigación" existe una única solución polinómica aproximada para la ecuación diferencial parcial no lineal en dos variables independientes en el espacio de Sóbolev", representada por el modelo no lineal estacionario,

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right) = f(x_1, x_2) \quad en\, \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Los resultados obtenidos y que se muestran en las secciones 4.1.2 y 4.1.3 confirman que existe una única solución polinómica aproximada para el problema (1.1) – (1.3). Por lo que se puede garantizar que la citada hipótesis ha sido respaldada.

Por otra parte, estos resultados no hacen más que ratificar que las aproximaciones hechas en la sección 4.1.2, permitieron acotar las soluciones aproximadas y con el paso al límite determinar la convergencia, probando así la existencia de soluciones polinómicas aproximadas en el problema (1.1) – (1.3).

En lo que respecta a las hipótesis específicas, las condiciones $f \epsilon W^{-1,4/3}(\Omega)$ y $g \epsilon W^{3/4\,,4}\,(\Omega)$ son las necesarias para establecer la existencia de la solución polinómica aproximada en el problema (1.1) – (1.3).

Para la unicidad de la solución polinómica aproximada se consideró dos soluciones aproximadas diferentes para el problema (1.1) - (1.3) y mediante el método estándar de la energía son las necesarias para establecer que ambas soluciones son iguales, demostrando así la unicidad de las soluciones polinómicas aproximadas del problema planteado.

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Al culminar la investigación, se arribó a las siguientes conclusiones**:**

a) Mediante aplicación del método de Faedo-Galerkin, se demostró de manera exhaustiva y detallada la existencia de solución polinómica aproximada del problema (1.1) – (1.3)

b) Suponiendo u y v dos soluciones polinómicas aproximadas diferentes y utilizando el método estándar de la energía, se demostró que $u = v$, la unicidad de solución polinómica aproximada del problema (1.1) – (1.3)

5.2 Recomendaciones

a) Estudiar la existencia de soluciones polinómicas aproximadas del problema (1.1) – (1.3) en dominios no acotados de $\mathbb{R}^n$ y trabajando en espacios de Sóbolev de exponente variable.

b) Se recomienda complementar esta investigación estudiando el comportamiento asintótico de las soluciones aproximadas del problema (1.1) – (1.3).

c) Dentro de un trabajo ambicioso como lo es este, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo, por lo tanto, se recomiendas a futuros investigadores que tengan interés en la línea de investigación respecto de la existencia de solución regular o débil para ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Adams R. (2003) : Sobolev space
Fourier J. Elsevier Second edition

[2] Alonso, J (1993) : Solución de Problemas Singulares en Ecuaciones Elípticas y Elasticidad

.

[3] Brezis H. (1,87) : Functional Analysis Sóbolev Spaces and Partial Differential Equations.

[4] Climent, B (1995) : Soluciones débiles y renormalizadas de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales con origen en Mecánica de Fluidos

[5] Dubova A. (1999) : Análisis y control de algunas EDP no lineales con origen en la Mecánica

[6] De Figuereido D. (1982) : Positive solicitations of semi linear elliptic prblems Notes en Mathematics, 957, Springer-Verlag.

[7] Diaz J. T (1985) : Nonlinear partial differential and free boundaries Vol. I Elliptic equation, London.

[8] Duchateau P. (1988) : Ecuaciones Diferenciales Parciales
Zachmann D.W Mc Graw -Hill- México

[9] Escobar V. Liz A.(2012) : Introducción a la teoría de las distribuciones.
Tesis de Maestría Dpto de Matemática-Facultad de Ciencias- Pontificia Universidad Javeriana-Colombia

[10] Fernández, M (1995) : Control Optimo de Sistemas gobernados por Ecuaciones Elípticas Cuasi lineales.

[11] Figueroa J. 1,986) : Espacios de Sóbolev $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$
Revista Proyecciones N° 11 : 18-60

[12] Gatica M. (2011) : Espacio de funciones: una introducción a los espacios de Sobolev. Selecciones matemáticas

[13] Garrido, J (2001) : Algunos resultados de Existencia y Unicidad y Estabilidad para EDP Funcionales Estocásticas no Lineales

[14] Gómez, M (1997) : Estudio Matemático de algunos problemas no lineales de la Mecánica de Fluidos Incomprensibles

[15] González, M (1995) : Dos problemas relacionados con Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución no Lineales.

[16] Hwei P. Hsu (1989) : Análisis de Fourier Addison Wesley-Iberoamericana

[17] Kolmogorov, A. 1,975 : Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional Editorial MIR-Moscú.

[18] Kesavan, S. (1989) : Topics in functional analysis and applications Wiley Eastern Limited, Mc Graw Hill .EUA

[19] Lopez, G. (2013) : Ecuaciones Diferenciales Parciales – Universidad Autónoma
Martínez, F. H Metropolitana- México

[20] Medeiros L(1999) : Espaços de Sobolev. Iniciaão aos problemas elípticos não Homogêneos Instituto de Matemática -UFRJ Rio de Janeiro

[21] Morales M. (2015): Existencia y Unicidad de solución de uma ecuación Diferencial Parcial no lineal estacionaria de tipo Elíptico -UNS

[22] Pizarro, F.A (2000) : Las Ecuaciones de Laplace y Poisson em Problemas de
Bocanegra, H Eletromagnetismo

[23] Romero S. (2001) : Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales
Moreno F.J Edita: Servicios de Publicaciones Universidad de Huelva
Rodríguez I.M España.

[24] Spiegel, M. (1992) : Ecuaciones Diferenciales Aplicadas Prentice Hall Hispanoamericana S.A – México.

[25] Zill, D. (2015) : Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera . Editorial Cengage -Learning- Mexico.

[26] Young Matt, (2006) : The Stone Weierstrass Theorems, Math 328 Notes, Queen´s University at Kingston, Winter Term

ANEXOS

ANEXO A

A1. **Espacios vectoriales**

Definición A.1.1 Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, es el conjunto V, dotado de dos leyes de composición: una interna $+: V \times V \longrightarrow V$ y otra externa $. : \mathbb{R} \times V \longrightarrow$ V, tales que para todo $x, y, z \epsilon V$ y todo $\lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$ se satisface los siguientes axiomas:

(1) $x + y = y + x \; , x + (y + z) = (x + y) + z$

(2) $\exists ! \, 0 \epsilon E : \; x + 0 = x$

(3) $\exists ! - x \epsilon E : \; x + (-x) = 0$

(4) $\exists 1 \epsilon \mathbb{R} : 1x = x$ y $\lambda_1, \; \lambda_2 \epsilon \mathbb{R} : \; \lambda_1(\lambda_2 x) = \; (\lambda_1, \lambda_2)x$

(5) $\lambda_1(x + y) = \; \lambda_1 x + \; \lambda_1 y$ y $(\lambda_1 + \; \lambda_2)x = \; \lambda_1 x + \; \lambda_2 x$

Los elementos de E sin precisar su naturaleza podrán ser: vectores geométricos, números reales o complejos, matrices, polinomios, funciones, etc.

Definición A.1.2 Sea **Ω** un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Se designa con $\boldsymbol{C^0}(\Omega)$ al espacio de todas las funciones continúas definidas en **Ω** con valores en $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{C^0}(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \; \longrightarrow \; \mathbb{R} \, / \, \varphi \;\; es \; continua \; en \; \Omega \; y \; valor \; real \}$$

Son subespacios de $C^0(\Omega)$ los siguientes:

$\boldsymbol{C^m}(\Omega) = \{ \varphi \epsilon \, C^0(\Omega) \, ; \;\; D^\alpha \varphi \epsilon C^0(\Omega) \, , \forall \, |\alpha| \leq m \; \}$

$\boldsymbol{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{\boldsymbol{m=0}}^{\infty} \boldsymbol{C^m}(\Omega)$

$\boldsymbol{C_0}(\Omega) = \{ \; \varphi \epsilon \, C^0(\Omega) \, ; soporte \; de \; \varphi \; es \; compacto \; en \; \Omega \, \}$

$\boldsymbol{C_0^m}(\Omega) = \boldsymbol{C^m}(\Omega) \cap \boldsymbol{C_0}(\Omega)$

Sobre $\boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ **,** la norma de convergencia uniforme, se define como:

$$\|\varphi\|_\infty \coloneqq \; \operatorname*{Sup}_{x \epsilon \cap} | \, \varphi(x) \, |$$

Definición A.1.3 Sea **Ω** un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se designa con $\boldsymbol{C^m}(\overline{\Omega})$ al espacio vectorial de todas las funciones continuas que son acotadas y uniformemente continuas en **Ω**.

$$\boldsymbol{C^m}(\overline{\Omega}) = \; \{ \, \varphi : \Omega \; \longrightarrow \; \mathbb{R} \, / \, \varphi \; es \; acotada \; y \; uniformente \; continua \; en \;\; \cap \, \}$$

Definición A.1.4 Un espacio vectorial normado es aquel espacio al que se ha dotado una función, $\| . \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada Norma, tal que satisface lo siguiente:

i) $\| x \| \geq 0 \;, para\ todo\ x \neq 0\ y \| 0 \| = 0$

ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$

iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Proposición A.1.1 Una **norma** sobre un espacio E induce una **métrica** dada por: $d(x, y) = \| x - y \|$, la cual induce una **topología** sobre E. Las topologías inducidas por una métrica se denominan topologías metrizables.

Definición A.1.5 (***Dual de un espacio de Banach***) Sea E un espacio de Banach, El espacio dual de E, denotado E^*está formado por todas las aplicaciones $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ (funcionales) lineales continuas.

La norma estándar de E^* es:

$$\| f \|_{E^*} = \operatorname*{Sup}_{\|x \| \leq 1 \;, x \epsilon E} | f(x)| = \operatorname*{Max}_{\| x \| \leq 1 \;, x \epsilon E} | f(x)| = \operatorname*{Max}_{\| x \| = 1 \;, x \epsilon E} | f(x)| = \operatorname*{Max}_{x \epsilon\ E} \frac{| f(x)|}{\| x \|}$$

Proposición A.1.2 Una función lineal, $f: E \longrightarrow F$ entre espacios de Banach, es continua si y solo si es acotada, esto es:

$$\| \mathrm{f} \|_{\mathrm{F}} = \mathrm{C}\, \|\mathrm{x}\|_{\mathrm{E}}$$

Proposición A.1.3 Un subespacio $F \subset E$ de un espacio de Banach cerrado en Ees un espacio de Banach.

A2. Subespacio vectorial

Un subconjunto no vacío, F de un espacio vectorial E, se llama sub-espacio, cuando se deduce que, $\alpha x + \beta y\ \epsilon F$ cualquiera que sean α y β.

Por ejemplo, los polinomios forman un subespacio (de dimensión infinita al igual que todo el $\mathcal{C}_{[\,a,b\,]}$). Al mismo tiempo todo el espacio $\mathcal{C}_{[\,a,b\,]}$ puede ser considerado como un subespacio de un espacio más amplio de todas las funciones, tanto continuas como discontinuas sobre el intervalo $[\,a, b\,]$.

ANEXO B

B1. Espacios con Producto Escalar

Definición B.1.1 (*Espacio de Medida*)

Sea Ω un conjunto abierto. Un ***espacio de medida***, es una terna $(\,\Omega,\ \sum,\ \mu\,)$ donde

(1) $\mathcal{M}$ es una $\sigma -$algebra, una familia de subconjuntos de Ω tales que:

i) $\emptyset \epsilon \mathcal{M}$

ii) Si $A \epsilon \mathcal{M}$, entonces $A^c \epsilon \mathcal{M}$

iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon \mathcal{M}\ ,\forall A_n \epsilon \mathcal{M}$

(2) μ es una medida, esto es, una función, μ: $\mathcal{M} \longrightarrow [0\,,\infty\,)$ talque verifica:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\forall \{A_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{8} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Llamamos a los elementos de $\mathcal{M}$***conjuntos medibles*** y a los elementos $A \epsilon \mathcal{M}$ tales que: $\mu(A) = 0$ conjuntos de **medida nula**.

Definición B.1.2 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y μ una medida de Lebesgue. El espacio denotado, $H^1(\Omega)$ es el espacio de todas las funciones ***integrables Lebesgue*** de Ω *en* $\mathbb{R}$ **.**

Por comodidad se utiliza la notación $\int_{\Omega} f$ en lugar de $\int_{\Omega} f\, d\mu$, o $\int f$ cuando no haya confusión. En adelante, diremos que f es medible para referirnos que f es medible Lebesgue.

Definición B.1.3 (*Espacio de Lebesgue*)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio $L^p(\Omega)$ de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$ para,

$1 < p < \infty$, como:

$$L^p(\Omega) = \{\ f: \Omega\ \longrightarrow\ \mathbb{R}\ /\ |\ f\ |^p \epsilon H^1(\Omega)\ \}$$

Dotamos a $L^p(\Omega)$ de la norma:

$$\parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} = \parallel f \parallel_{L^p} = \ \parallel f \parallel_p = \left(\int_\Omega |\ f\ |^p\right)^{1/p}$$

Definición B.1.4 (*Espacio de Lebesgue*)

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces definimos el espacio $L^\infty(\Omega)$ de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}^n$ para, $1 \leq p \leq \infty$, como:

$$L^\infty(\Omega) = \{\ f: \Omega\ \longrightarrow\ \mathbb{R}\ /\ |\ f(x)| \leq C \quad p.c.t.p\ \ \}$$

, en donde c.t.p se refiere a casi todo punto.

Dotamos a $L^\infty(\Omega)$ de la norma:

$$\parallel f \parallel_{L^\infty(\Omega)} = \parallel f \parallel_{L^\infty} = \ \parallel f \parallel_\infty = Inf\ \{\ C\ /\ \ |\ f(x)| \leq C\ \}$$

Nota. Los espacios L^p se definen como espacios cociente mediante la relación de equivalencia,

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad e.p.c.t, es\ decir \parallel f - g \parallel_p = 0$$

B2. Resultados básicos de la teoría de la medida y espacios L^p

Teorema B.2.1 (*Convergencia monótona*)

Sea $\{f_n\} \subset H^1(\Omega)$ una sucesión de funciones, tal que se cumpla:

1) $f_1 < f_2 < \ .\ .\ .\ .$ en casi todo punto

2) $\operatorname*{Sup}_{n\epsilon\mathbb{N}} \int f_n < \infty$

Entonces,

$f_n(x)$ converge en casi todo punto a un limite $f(x) \epsilon H^1(\Omega)\ y\ \ \parallel f_n - f \parallel \longrightarrow 0$

Teorema B.2.2 (*Convergencia dominada)*

Sea $\{f_n\} \subset H^1(\Omega)$ una sucesión de funciones, tal que se cumpla:

1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en casi todo punto
2) $\exists g \epsilon L^1(\Omega)$ tal que todo n , $| f_n(x) | \leq g(x)$ en casi todo punto

Entonces,

$f \epsilon H^1(\Omega)$ y $\| f_n - f \|_1 \longrightarrow 0$

Lema B..1.1 (Lema de Fatiou)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ que cumple lo siguiente:

1) $f_n \geq 0$
2) $\operatorname{Sup}_{n \epsilon \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n < \infty$

Denotando con $f = \operatorname{Lim}_{n \longrightarrow \infty} Inf = f_n(x)$ p.c.t $x \epsilon \Omega$, entonces $\int_{\Omega} f \leq \operatorname{Lim}_{n \rightarrow \infty} Inf \int_{\Omega} f_n$

Teorema B.1.5 *(Teorema de Tonelli*)

Sea $F(x, y): \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible talque:

1) $\int_{\Omega_2} | F(x, y)| dy < \infty$ para casi todo punto $x \epsilon \Omega_1$
2) $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} | F(x, y) | dy\, dx < \infty$

Entonces, $F \epsilon L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Teorema B.1.6 *(Teorema de Fubini*)

Si $F(x, y): \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $F \epsilon L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, entonces para casi todo punto $x \epsilon \Omega_1$

$F(x, y) \epsilon L^1(\Omega_2)$ y $\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \epsilon L^1(\Omega_1)$ (Análoga para casi toda y). Además:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} | F(x, y) | dy\, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} | F(x, y) | dx\, dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy$$

Teorema B.1.7 *(Desigualdad de Hölder*)

Si $f \epsilon L^p(\Omega)$ y $g \epsilon L^{p'}(\Omega)$, entonces:

$$fg \epsilon L^1(\Omega) \text{ y } \int_{\Omega} | fg | \leq \| f \|_p \| g \|_{p'}$$

ANEXO C

C1. Espacios separables

La ***separabilidad*** es una propiedad ***topológica*** importante para trabajar con espacios de Banach. En esta sección X denota un *espacio topológico*.

Definición C.1.1 Un espacio topológico es separable si y solio si existe un conjunto contable $E \subset X$ denso en X , esto es, $\bar{E}$ denota la clausura de E.

Proposición C.1.1 Todo subconjunto $A \subset X$ de un espacio separable métrico X es separable.

Teorema C1.1 Sea X un espacio de Banach tal que X^* es separable. La implicación reciproca no es cierta, como contraejemplo tenemos $L^1(\Omega)$ (separable), cuyo dual $L^\infty(\Omega)$ (no separable).

Definición C.1.2 Un conjunto $B \subset E$ es convexo si para todo $x, y \epsilon B$, el punto $[x(1- \ t) + yt\,]\epsilon B$ para todo $t \epsilon [\,0\,,1\,]$

C2. Espacios reflexivos

Sea X es un espacio normado, el espacio vidual o segundo dual de X, es el espacio denotado por, $X^{**} \coloneqq \ (X^*)^* = L(\,X^*, \mathbb{R}\,)$, con norma:

$$(\,X^{**}\,) \coloneqq Sup\,\{\,|\,X^{**}(X^*)|\,/\ \ x^* \epsilon\, X^*\,\}$$

$$= Min\,\{\,K > 0\;|X^{**}(X^*)| \leq K/\,|\,X^*|\ \ para\ todo\ x^* \epsilon X^*\,\}$$

ANEXO D

E1. Espacios de Sóbolev

1. Los espacios de Sóbolev, son los de orden entero positivo ($W^{m,p}$ con $m, p \in \mathbb{Z}_+$). Enseguida se extiende la noción de tal manera de considerar valores no enteros de m. Posteriormente se consideran espacios con otras normas en el espacio de Lebesgue, L^p.

   Sin embargo, el tipo de espacios de Sóbolev más importantes son los de funciones de cuadrado integrable, es decir, los $W^{m,2}$ los que serán denotados por H^m. Estos espacios son espacios de Hilbert separables.

   Entre los espacios H^m los más importantes son H^1 y H^2. Por ejemplo, la formulación variacional del clásico problema de Dirichlet-Poisson:

   $-\Delta u = f$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = 0$ en $\partial\Omega$ se realiza en $H^1(\Omega)$

   El problema de Dirichlet-Poisson correspondiente al operador biharmónico Δ^2 se realiza en el espacio $H^2(\Omega)$.

   En análisis numérico, interesa conocer $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$ para poder construir subespacios de dimensión finita incluido en ellos.

   Por otro lado, en las demostraciones para los espacios H^1 y H^2 sirven para los espacios H^m. Por lo demás el delicado problema de la traza sobre el borde se ve sobre H^1 y el de la derivada normal sobre H^2.

Estas razones son las que motivan que una presentación relativamente fácil y completa, además de útil, pueda hacerse sin pérdida de generalidad tratando a fondo H^1 y H^2, después H^m extendiendo los resultados.

Definición 1. Un espacio de Sóbolev de orden 1 sobre Ω es el definido por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \epsilon H^2(\Omega) \ / \ \frac{\partial u}{\partial\, x_i} \epsilon L^2(\Omega)\, , 1 \leq i \leq n \right\}$$

Definición 2. *Producto escalar en* $H^1(\Omega)$

Se define en $\mathrm{H}^1(\Omega)$ el producto escalar de las funciones $u\ y\ v$, denotado $\langle u\, , v \rangle_{1,\Omega}$, como: $\langle u\, , v \rangle_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$

Y la norma correspondiente se denota por: $\|u\|_{1,\Omega} = \langle v\, , v \rangle_{1\, ,\Omega}^{1/2}$

Definición 3. ($H_0^1(\Omega)$: subespacio de $H^1(\Omega)$ de las funciones "nulas" sobre $\partial\Omega$).

Teorema 3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, es decir, $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4. (Teorema de representación de Riesz)

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\varphi \epsilon (L^p)^*$, entonces existe una única función $u \epsilon L^p$ tal que:

$\varphi(f) = \int uf \quad , \ \forall f \epsilon L^p$. Mas aun, $\| \ u \ \|_p = \ \| \ \varphi \ \|_{(L^q)^*}$.

ANEXO E

Teoría de las Distribuciones

E1. Notaciones

Ω : designa un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\partial\Omega = \Gamma$

$L^2(\Omega)$: Espacio de (clases) funciones reales cuyo cuadrado es integrable sobre Ω.

$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \quad , f, g \epsilon L^2(\Omega)$, define en $L^2(\Omega)$ una estructura Hilbertiana

$\|f\|_{0,\Omega} = \langle f, g \rangle^{1/2}$: la norma en $L^2(\Omega)$

Definición 1. (***Espacio de funciones Prueba***)

Se define el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ como el espacio de las funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto en Ω, esto es:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ \varphi \epsilon C^\infty / \ supp(\Omega) \ = \ \overline{\{x \epsilon \Omega : \ \varphi(x) = 0\}}, \ \ es\ compacto\ en\ \Omega \right\}$$

Definición 2. (***Espacio de las distribuciones***)

Se denota con, $\mathcal{D}'(\Omega)$ el espacio de las distribuciones sobre Ω como el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, el espacio de las formas lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Es decir, si $\langle ., . \rangle$ designa la dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces para $T \epsilon \mathcal{D}'(\Omega), \varphi , \varphi_i \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$ y $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ se tiene que: $\langle T , \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T , \varphi \rangle$.

Definición 3. (**Pseudo topología en $\mathcal{D}'(\Omega)$**)

$\mathcal{D}'(\Omega)$ es una pseudo topología: si (T_j) es una sucesión de $\mathcal{D}'(\Omega)$ entonces se dirá que T_j converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si para todo $\varphi \epsilon \ \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_j , \varphi \rangle \to \langle T , \varphi \rangle$.

Ejemplo 1. (Masa de Dirac),

Sea $a \epsilon \Omega$, se define la distribución "masa de Dirac δ_a en el punto a", como:

$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Es evidente que es una distribución sobre Ω, si $a_m \to a$ en Ω se cumple que: $\delta_{a_m} \to \delta_a$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ejemplo 2. ($L^2(\Omega)$ es un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$)

Se recuerda que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y que $\mathcal{D}(\Omega)$es denso en $L^2(\Omega)$.

Dada una función $f \epsilon L^2(\Omega)$ se le asocia la distribución $T_f \epsilon\, \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por:

$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \;, \forall \varphi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$

Se observa que la aplicación $f \to T_f$ es inyectiva. En efecto si $T_f = 0$, $\forall \varphi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, entonces $f = 0$ en virtud de la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Luego $T_f \neq T_g$ si $f \neq g$ de manera que se puede identificar f a T_f lo que equivale a identificar $L^2(\Omega)$ a un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Esto es: $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Por lo demás se tiene que la inclusión es "continua":

$f_n \to f$ en $L^2(\Omega) \;=\; f_n \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

En efecto según la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$\forall \varphi \epsilon \mathcal{D}(\Omega)$: $\left| \int_\Omega (f_n - f)\varphi dx \right| \leq \|f_n - f\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega}$

Como, $f_n \to f$ en $L^2(\Omega)$, $\| f_n - f \|_{0,\Omega} \to 0$, luego $\int_\Omega (f_n - f)\varphi\, dx \to 0$, $\forall \varphi \epsilon, \mathcal{D}(\Omega)$ de donde: $\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx$,esto es: $f_n \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

9	earsiv.anadolu.edu.tr Fuente de Internet	<1 %
10	Submitted to Monash University Trabajo del estudiante	<1 %
11	bdigital.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		